УРОК 2. СИСТЕМА МЕТРИК В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Наличие и использование неизоморфных групп в обобщенной электродинамике Максвелла инициирует задачу анализа их причин и следствий. В частности, желательно обнаружить «следы» метрик этих групп в структуре уравнений электродинамики. Более того, поскольку анализ релятивистских эффектов выполнен в модели ньютоновского пространства и времени, желательно найти возможность структуризации электромагнитного поля: обосновать структурную модель частиц света. Главная новая идея проводимого анализа такова: уравнения для явлений «подсказывают» структуру объектов, порождающих эти явления.

В данном разделе даны ответы на эту совокупность вопросов.

Воспользуемся моделью электродинамики без ограничения скорости. Она даёт динамическое описание релятивистских эффектов, обобщает специальную теорию относительности и свободна от её ограничений.

В ней динамика полей $(\vec{E},\vec{B})$ и индукций $(\vec{H},\vec{D})$ описывается стандартными уравнениями Максвелла:

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\nabla\cdot\vec{B}=\vec{0},\nabla\cdot\vec{D}=4\pi\rho,\nabla\times\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+4\pi\frac{\vec{J}}{c}.$$

Обобщены связи между полями и индукциями:

$$\vec{D}+w\left[\frac{\vec{U}}{c}\times\vec{H}\right]=\varepsilon\left(\vec{E}+\left[\frac{\vec{U}}{c}\times\vec{B}\right]\right),\ \vec{B}+w\left[\vec{E}\times\frac{\vec{U}}{c}\right]=\mu\left(\vec{H}+\left[\vec{D}\times\frac{\vec{U}}{c}\right]\right).$$

Здесь $\varepsilon,\mu-$диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно, U_x,U_y,U_z-компоненты скорости среды, $c-$скорость света в вакууме. В модели используются величины

$$w=1-\exp\left[-P_0\left(n-1\right)\right],\vec{U}=(1-w)\vec{U}_{fs}+w\vec{U}_m.$$

Здесь $\vec{U}_{fs}-$скорость первичного источника излучения, $\vec{U}_m-$скорость среды, $w-$*показатель отношения*, новая скалярная величина, введенная в электродинамику, $n-$показатель преломления, $P_0(\lambda)-$эмпирическая величина, зависящая от длины волны излучения. Обобщенная модель даёт новые закономерности для света. Например, групповая скорость электромагнитного поля в нерелятивистском пределе зависит не только от показателя преломления, но и от показателя отношения, не только от скорости среды, но и от скорости первичного источника излучения:

$$\vec{V}_g = \frac{c}{n}\frac{\vec{K}}{K} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right)\left[(1-w)\vec{U}_{fs} + w\vec{U}_m\right].$$

Для достижения ответа на поставленные вопросы представим уравнения обобщенной электродинамики в матричном виде. Этот шаг позволит обнаружить в структуре уравнений систему метрик. Кроме этого, модель будет записана на паре кватернионов, заданных матрицами с размерностью 4×4. Отсюда вытекает предположение, что структура частиц света как-то ассоциирована с четвёркой базовых физических объектов, поскольку найденные матрицы можно интерпретировать как систему отношений между четырьмя объектами.

Используем координаты $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^0 = ict$. Зададим два контрвариантных метрических тензора:

$$g^{kn} = diag(1,1,1,-1), r^{kn} = diag(1,1,1,1).$$

Введем величины

$$\Psi = \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi^* = \begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} H_x + iD_x \\ H_y + iD_y \\ H_z + iD_z \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi^* = \begin{pmatrix} H_x - iD_x \\ H_y - iD_y \\ H_z - iD_z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введем матрицы вида

$$A \Rightarrow \left\{ a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B \Rightarrow \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Они имеют стандартные свойства кватернионов и задают, с точностью до матриц с противоположными знаками, пару групп. При их взаимном произведении мы получим новую группу, в которой будет присутствовать тройка антикватернионов. Позже будет показано, что теорию гравитационного поля можно сконструировать на этих антикватернионах. В обоих указанных случаям модели получаются удивительно простым способом.

Дифференциальные уравнения электродинамики запишем в матричном виде:

$$g^{kn}a_k\,\partial_n\,\Psi^* + r^{kn}b_k\,\partial_n\,\Psi = 0\,,\, r^{kn}a_k\partial_n\,\phi^* + g^{kn}b_k\,\partial_n\,\phi = \Phi\,.$$

Они содержат пару четырехметрик. Здесь

$$\Phi = \textit{столбец}\left(2\rho U_x,\, 2\rho U_y,\, 2\rho U_z,\, -2i\rho\right).$$

Явный вид уравнений Фарадея-Ампера таков:

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\right\}\begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Выполним деформацию матриц A, B с целью применения их на материальных уравнениях электродинамики. Подчиним её правилу

$$\tilde{\xi}_i = wQ^{-1}\xi_i Q, Q = diag\left(1,1,1,w\right).$$

Запишем в матричном виде связи между полями и индукциями:

$$
i\mu\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{U_x}{c}+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\frac{U_y}{c}+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\frac{U_z}{c}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}(-i)\right\}\times
$$

$$
\times\begin{pmatrix}H_x-iD_x\\H_y-iD_y\\H_z-iD_z\\0\end{pmatrix}-i\mu\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{U_x}{c}+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\frac{U_y}{c}+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{U_z}{c}+\right.
$$

$$
\left.+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}(i)\right\}\begin{pmatrix}H_x+iD_x\\H_y+iD_y\\H_z+iD_z\\0\end{pmatrix}=w\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&-w\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\w^{-1}&0&0&0\end{pmatrix}\frac{U_x}{c}+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-w\\1&0&0&0\\0&w^{-1}&0&0\end{pmatrix}\frac{U_y}{c}+\right.
$$

$$
\left.+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-w\\0&0&w^{-1}&0\end{pmatrix}\frac{U_z}{c}+\frac{1}{w}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}(i)\right\}\begin{pmatrix}E_x-iB_x\\E_y-iB_y\\E_z-iB_z\\0\end{pmatrix}+w\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&w\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-w^{-1}&0&0&0\end{pmatrix}\frac{U_x}{c}+\right.
$$

$$
\left.+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&w\\1&0&0&0\\0&-w^{-1}&0&0\end{pmatrix}\frac{U_y}{c}+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&w\\0&0&-w^{-1}&0\end{pmatrix}\frac{U_z}{c}+\frac{1}{w}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}(-i)\right\}\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}=0.
$$

Выражения

$$
\Psi_1=E_x+iB_x=\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial\phi}{\partial x}+i\frac{\partial A_z}{\partial y}-i\frac{\partial A_y}{\partial z},\dots,
$$

$$
\Psi_1^{*}=E_x-iB_x=\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial\phi}{\partial x}-i\frac{\partial A_z}{\partial y}+i\frac{\partial A_y}{\partial z},\dots
$$

также имеют матричное представление:

$$
\begin{pmatrix}-\partial_\tau&-i\partial_z&i\partial_y&-i\partial_x\\i\partial_z&-\partial_\tau&-i\partial_x&-i\partial_y\\-i\partial_y&i\partial_x&-\partial_\tau&-i\partial_z\\i\partial_x&i\partial_y&i\partial_z&-\partial_\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\\-i\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi_1\\\Psi_2\\\Psi_3\\\Psi_0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\partial_\tau&i\partial_z&-i\partial_y&-i\partial_x\\-i\partial_z&-\partial_\tau&i\partial_x&-i\partial_y\\i\partial_y&-i\partial_x&-\partial_\tau&-i\partial_z\\i\partial_x&i\partial_y&i\partial_z&-\partial_\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\\-i\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi_1^{\circ}\\\Psi_2^{*}\\\Psi_3^{*}\\\Psi_0^{*}\end{pmatrix}.
$$

С математической точки зрения запись уравнений обобщенной электродинамики Максвелла в матричном виде проста и естественна.

Принципиально новым моментом является только возможность представления уравнений на паре групп A, B.

Примем предположение, что матрицы, входящие в уравнения электродинамики, свидетельствуют о структуре электромагнитного поля.

Для его теоретического наполнения учтем экспериментальные факты:

- свет не имеет массы и электрического заряда,
- при взаимодействии $\gamma-$квантов рождаются элементарные частицы с электрическим зарядом и массой.

Примем гипотезу, что частицы света могут быть сконструированы из четырех объектов. Одна такая пара не имеет массы и имеет противоположные электрические свойства. Другая их пара не имеет электрического заряда и имеет противоположные гравитационные свойства. Примем основную гипотезу о физической структурности света: свет представляет собой систему объектов, изготовленных в форме нейтральных физических систем, состоящих из положительных и отрицательных электрических и гравитационных предзарядов, соединенных между собой системой силовых линий.

Пространство размеров Ньютона и обобщенное пространство скоростей, которое допускает как метрику Минковского, так и метрику Евклида, не вступают в противоречие друг с другом, Их можно рассматривать, естественно, как единое расслоенное многообразие. Его базой будет пространство Ньютона, а слои задаются структурой пространства скоростей.

Главный новый факт таков: уравнения электродинамики в матричной форме базируются на системе четырехметрик.

Четырехметрики удобно описывать, используя характеристические полиномы для элементов матричной группы. Критические и экстремальные точки этих полиномов индуцируют четырехметрики для физических моделей. В них пространство евклидово в трехмерии. Если же мы рассматриваем уравнения, используя всю матричную группу, дополнительно к ним присоединяются четырехметрики, ассоциированные с матрицами Картана. Они неевклидовы в трехмерии.

Из анализа обобщенной электродинамики движущихся сред следует, что фундаментальные уравнения физики могут быть записаны в единой форме, используя три метрики пространства скоростей вида

$$r_{SE}^{ij} = \left(r^{ij}, n^{ij}, g^{ij}\right).$$

Это обстоятельство изначально отвергает точку зрения, что фундаментальные симметрии в электродинамике «исчерпываются» группой Лоренца, так как есть семейство метрических интервалов. Возникает вопрос: что является математическим средством для их порождения?

Покажем, что их можно рассматривать как конструкции, образованные соединением физически различных элементов: трехмерного пространства размеров R^3 и одномерного времени T^1.

Используем для этого параметры критических и экстремальных точек λ_k характеристических полиномов

$$\overset{*}{Y} = \det\left\|\lambda I - A\right\|$$

соответствующих системе указанных выше кватернионов и антикватернионов.

В данном случае характеристические полиномы заданы рис. 1:

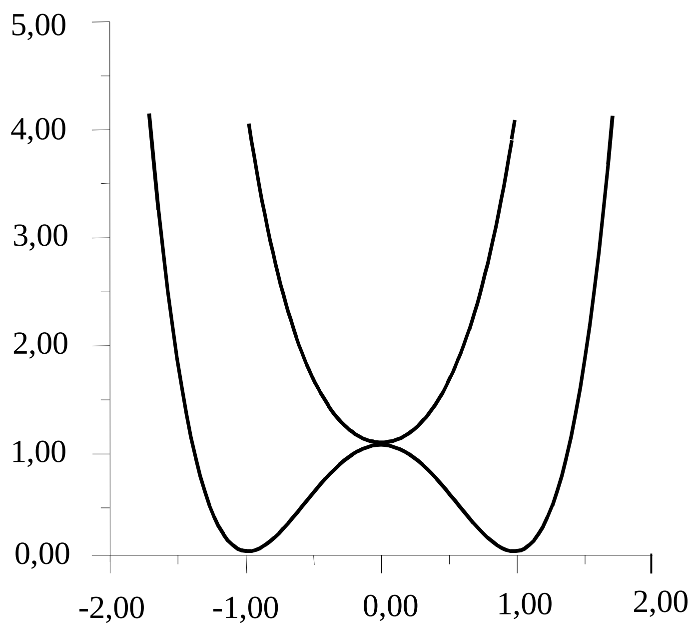

Рис. 1. Форма характеристических полиномов

Используем их критические и экстремальные значения как средство для порождения метрик пространства скоростей. В рассматриваемом случае они заданы числами $\lambda_k = -1{,}0{,}1$. Введем величину

$$\eta_{SE}^{ij} = diag\left(1, 1, 1, \lambda_k \cdot 1\right).$$

Она формально соединяет R^3 и T^1 через λ_k. Выберем значения λ_k, которые соответствуют экстремумам. Тогда

$$\left.\frac{d^2 Y_1}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} < 0, \quad \left.\frac{d^2 Y_2}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} > 0.$$

Критические точки таковы: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Соединим их с точками экстремумов, которые в данном случае совпадают по значениям $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, но различны по величинам $\left.\frac{d^2 Y}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}$. Получим четыре канонические локальные метрики для пространства скоростей:

$$r^{ij} = diag\left(1, 1, 1, -1\right), \quad n^{ij} = diag\left(1, 1, 1, \pm 0\right), \quad g^{ij} = diag\left(1, 1, 1, 1\right).$$

Знаки (±) перед нулем свидетельствуют о том, что в физике используются два типа пространств:

$$\Pi(a): n^{ij}(+) = diag\left(1, 1, 1, +0\right), \left.\frac{d^2 Y_1}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} > 0;$$

$$\Pi(b): n^{ij}(-) = diag\left(1, 1, 1, -0\right), \left.\frac{d^2 Y_1}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} < 0.$$

Первое соответствует «устойчивой» метрике Ньютона, второе – «неустойчивой» метрике Барыкина. П(a) удобно использовать для описания устойчивых состояний объектов и явлений. П(b) удобно использовать для описания событий, которые способны измениться из-за поведения λ_k (например, от $\lambda_1 = -1$ до $\lambda_2 = 1$ через $\lambda = 0$ или в обратном по $\Delta\lambda$ варианте).