Академия наук БССР
Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова

В.Н. Барыкин

К НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СРЕД

П р е п р и н т № 16

Минск 1989

УДК 530.12:531.15

На основе разделения группы внутренней и внешней симметрии уравнений электродинамики предложена модель расслоенного пространства-времени, синтезирующая его абсолютные и относительные свойства. Установлена связь полученных ранее уравнений электродинамики движущегося разреженного газа с теорией калибровочных полей. Приведены аргументы в пользу использования в электродинамике сред теории луп и тройных систем Ли, а также феноменологической интерпретации аналогов полей Хиггса-Голдстоуна.

О Г Л А В Л Е Н И Е

> Законы природы основаны на наибольшей возможной логической простоте ...
>
> А. Эйнштейн

Введение

При анализе распространения электромагнитного поля от точечного источника, движущегося в вакууме со скоростью $\vec{u}_{ист}$ в атмосферу Земли, локальная скорость $\vec{u}_{ср}$ и плотность ρ которой переменны, необходимо учитывать изменение инерционных свойств излучения. Выделим основные физические факторы. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае показатель преломления меняется от значения $n = 1$ в вакууме до величины $n - 1 = G_\lambda \rho / \rho_н$, где ρ – плотность среды в точке, $\rho_н$ – плотность среды при нормальных условиях, G_λ – постоянная Гладстона-Дейла, в оптическом диапазоне длин волн равная приблизительно $3 \cdot 10^{-4}$. По этой причине кажется очевидным использование для расчета излучения модели электродинамики вакуума.

Эта модель, как хорошо известно, не позволяет учесть изменения инерционных свойств источника поля. Реально же кинематическая характеристика инерции меняется в диапазоне от $\vec{u}_{ист}$ до $\vec{u}_{ср}$. Современная техника позволяет задать первичную скорость источника равной нескольким километрам в секунду, его вторичная скорость, очевидно, не превышает десятков метров в секунду, так как равна скорости движения атмосферы. Как физически реализуется процесс изменения инерции поля, чем он регулируется?

Анализ, проведенный ранее, показал, что центральная роль принадлежит здесь новой физической характеристике - нормированному скалярному полю w, названному отношением. Его связь с показателем преломления среды n имеет вид /I/

$$w = 1 - \exp\left[-P_0(n-1)\right],$$

где $P_0 \simeq 5 \cdot 10^4$. Отношение, дополнительно к известным характеристикам, задает локальные условия, в которых находится поле. Посредством величины w связаны в единый комплекс скорость источника и скорость среды /I/:

$$\vec{u} = (1-w)\vec{u}_{ист} + w\vec{u}_{ср}.$$

Первичная скорость источника $\vec{u}_{ист}$ определяется этим же выражением

$$\vec{u}_{ист} = (1-\overset{o}{w})\vec{\overset{o}{u}}_{ист} + \overset{o}{w}\vec{\overset{o}{u}}_{ср},$$

где $\vec{\overset{o}{u}}_{ист}$, $\vec{\overset{o}{u}}_{ср}$ - скорости источника и среды, $\overset{o}{w}$ - значение отношения. Они выбраны по начальным условиям задачи.

Рассмотрим частные случаи:
- в вакууме $n = 1$, $w = 0$, $\overset{o}{w} = 0$, $\vec{u} = \vec{u}_{ист} = \vec{\overset{o}{u}}_{ист}$;
- в среде("плотной по отношению") $n \gg n_0$, $w = 1$, $\vec{u} = \vec{u}_{ср}$;
$\vec{u}_{ист} = \vec{\overset{o}{u}}_{ист}$ при $\overset{o}{w} = 0$, $\vec{u}_{ист} = \vec{u}_{ср}$ при $\overset{o}{w} = 1$;
- в разреженном газе $1 < n < n_0$, $0 < w < 1$; в данном случае необходимо использовать общие выражения.

Указанные элементы образуют, пока безотносительно к уравнениям электродинамики, модель анализа инерционных характеристик поля. Она имеет самостоятельное значение и может быть уточнена позднее. Величина w и ее градиент $\partial w/\partial x^k$, как показано в /2/, входят как в материальные, так и в дифференциальные уравнения.

С учетом сделанного замечания необходимо описывать электромагнитное поле как в вакууме, так и в среде двухтензорными уравнениями Максвелла для $F_{mn}(\vec{E}, \vec{B})$ и $H^{ik}(\vec{H}, \vec{D})$. Здесь $\vec{E}$, $\vec{B}$ - поля, $\vec{H}$, $\vec{D}$ - индукции. Обоснование такой возможности дано в /3/.

Из соображений удобства описания и сравнения расчетных и экспериментальных значений используем в качестве опорного многообразия ньютоновское пространство $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^1$. Полученная ранее система уравнений электродинамики имеет вид /2/

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho + (\vec{D}\nabla w),$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j} - \frac{1}{c}\vec{D}\frac{\partial w}{\partial t} + (\nabla w \times \vec{H}),$$

$$\vec{D} + w\left[\frac{\vec{u}}{c}\times\vec{H}\right] = \varepsilon\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c}\times\vec{B}\right]\right),$$

$$\vec{B} + w\left[\vec{E}\times\frac{\vec{u}}{c}\right] = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D}\times\frac{\vec{u}}{c}\right]\right),$$

$$\vec{u} = (1-w)\,\vec{u}_{\text{ист}} + w\,\vec{u}_{\text{ср}},$$

$$\vec{u}_{\text{ист}} = (1-\mathring{w})\,\vec{\mathring{u}}_{\text{ист}} + \mathring{w}\,\vec{\mathring{u}}_{\text{ср}},$$

$$w = 1 - \exp\left[-P_0(n-1)\right].$$

В четырехмерном виде она записывается так /2/ :

$$\left(\partial_k + \frac{\partial w}{\partial x^k}\right)\tilde{H}^{ik} = \tilde{s}^{\,i}, \quad \partial_{[k}F_{mn]} = 0,$$

$$\tilde{H}^{ik} = Y_0\tilde{\Lambda}\chi^{ikmn}F_{mn},$$

$$\chi^{ikmn} = \frac{1}{2}\left(\Omega^{im}\Omega^{kn} - \Omega^{in}\Omega^{km}\right),$$

$$\Omega^{im} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[g^{im} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{w} - 1\right)u^i u^m\right],$$

$$g^{im} = \operatorname{diag}(1,1,1,w), \quad u^i = dx^i/dg.$$

Рассмотрим некоторые решения этих уравнений. При условии незначительного изменения отношения w на расстояниях $L \gg \lambda$, где λ - длина волны излучения, имеем в нерелятивистском приближении для групповой скорости $\vec{v}_g$ поля выражение /3/

$$\vec{v}_g = \frac{c}{n}\frac{\vec{K}}{K} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right)\left[\vec{u}_{ист}(1-w) + w\vec{u}_{ср}\right].$$

В вакууме при $w = 0$ получим

$$\vec{v}_g = c_0\vec{S} + \vec{u}_{ист}.$$

Соответствующие дифференциальные уравнения, как легко проверить, форминвариантны относительно группы Галилея. В оптически плотной среде, когда $w = 1$, имеем известное выражение лоренц-инвариантной теории

$$\vec{v}_g = \frac{c}{n}\vec{S} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\vec{u}_{ср}.$$

Из дисперсионного уравнения

$$c^2K^2 = w\omega^2 + \Gamma^2(\varepsilon\mu - w)\left(\omega^2 - 2(\vec{K}\vec{u})\omega + (\vec{K}\vec{u})^2\right),$$

где

$$\Gamma^2 = \left(1 - wu^2/c^2\right)^{-1},$$

следует "динамическая" трансформация частоты ω и волнового вектора $\vec{K}$ при изменении показателя преломления n и отношения w.

Предложенная модель не вступает в противоречие с известными экспериментальными данными, если учесть, что любое измерительное устройство представляет собой специальным образом сконструированную физическую среду, и на этой основе провести анализ опытных данных. Это замечание относится и к принципам теории /3/. В модели нет ограничений на скорость передачи взаимодействия /4/, группы Галилея и Лоренца физически дополнительны в ней, так как соответствуют различным средам, анализ изменения инерционных свойств источника поля проводится явно.

Однако нелинейность теории по отношению затрудняет нахождение точных решений и анализ структуры теории. Неясно, как связана она с другими физическими моделями, на каком пути и какими средствами можно развивать ее дальше. Обнаружение необходимых связей и анализ некоторых возможностей обобщения составляют основное содержание работы.

В рамках общековариантного описания уравнений электродинамики использован конструктивный способ нахождения группы внутренней симметрии теории на основе алгебраического метода классификации тензора 4-го ранга риманова пространства, разработанного А.З. Петровым. Предложена модель расслоенного пространственно-временного многообразия, в которой синтезированы группы внутренней и внешней симметрии уравнении электродинамики. Выдвинута физическая гипотеза иерархии расслоений как средства моделирования структуры физических объектов. Предложен метод размерностного расширения уравнении Максвелла с учетом внутренних степеней свободы электромагнитного поля.

В работе проанализирована возможность учета отношения W в электродинамике сред в рамках концепции спонтанного нарушения симметрии. Показано, что отношение аналогично полю Голдстоуна, а поле Хиггса - градиенту отношения. Обнаружено свойство метода спонтанного нарушения симметрии как средства учета изменения инерции источника поля.

Установлена связь электродинамики движущихся сред с теорией неассоциативных алгебр и тройных систем Ли. Тройные системы Ли необходимы потому, что электродинамика "индуцирует" расслоенные многообразия,слоями в которых являются однородные пространства. Неассоциативные алгебры связаны с изометрическими движениями в пространстве решений, которые задаются геодезической симметрией и описываются методами теории луп - групп без условия ассоциативности.

Работа выполнена в порядке личной инициативы. На нее получена положительная рецензия чл,-кор. АН ЛитССР В. Ванагаса.

I. К структуре уравнений электродинамики

Используем для записи дифференциальных уравнений Максвелла для полей $\vec{E}$, $\vec{B}$ и индукций $\vec{H}$, $\vec{D}$ матрицы базиса четырехмерных вращений следующего вида:

$$\alpha^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Они образуют алгебру четырехмерных вращений, в которой

$$\alpha^1\alpha^2-\alpha^2\alpha^1=\beta^1\beta^2-\beta^2\beta^1=-\beta^3, \quad \alpha^2\alpha^3-\alpha^3\alpha^2=\beta^2\beta^3-\beta^3\beta^2=-\beta^1,$$

$$\alpha^1\alpha^3-\alpha^3\alpha^1=\beta^1\beta^3-\beta^3\beta^1=\beta^2, \quad \alpha^2\beta^1-\beta^1\alpha^2=\beta^2\alpha^1-\alpha^1\beta^2=\alpha^3,$$

$$\alpha^1\beta^3-\beta^3\alpha^1=\beta^1\alpha^3-\alpha^3\beta^1=\alpha^2, \quad \alpha^2\beta^3-\beta^3\alpha^2=\alpha^3\beta^2-\beta^2\alpha^3=-\alpha^1,$$

$$\alpha^1\beta^1-\beta^1\alpha^1=\alpha^2\beta^2-\beta^2\alpha^2=\alpha^3\beta^3-\beta^3\alpha^3=0,$$

$$\alpha^1\alpha^1+\alpha^2\alpha^2+\alpha^3\alpha^3+\beta^1\beta^1+\beta^2\beta^2+\beta^3\beta^3=(-3)\,\mathrm{diag}(1,1,1,1).$$

Используем их выражение через матрицы τ^k, j^k:

$$\alpha^1=i(\tau^1-j^1), \quad \alpha^2=i(\tau^2-j^2), \quad \alpha^3=i(\tau^3-j^3),$$

$$\beta^1=i(\tau^1+j^1), \quad \beta^2=i(\tau^2+j^2), \quad \beta^3=i(\tau^3+j^3).$$

Имеем

$$\tau^1=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tau^2=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\quad \tau^3=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$j^1=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad j^2=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad j^3=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Матрицы α^K, β^K описывают вращения в плоскостях (ij). При соответствии

$$\alpha^1\Rightarrow L_{14},\ \alpha^2\Rightarrow L_{24},\ \alpha^3\Rightarrow L_{34},\ \beta^1\Rightarrow L_{23},\ \beta^2\Rightarrow L_{31},\ \beta^3\Rightarrow L_{12}$$

получим коммутационные соотношения с метрикой Минковского g_{ac}

$$[L_{ab},L_{cd}]=-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac}+g_{ad}L_{bc}.$$

Матрицы τ^K, j^K задают представление алгебры Клиффорда с матрицами $\hat\Gamma^{(s)}_\mu$ при выполнении коммутационных соотношений

$$\hat\Gamma^{(s)}_\mu\hat\Gamma^{(s)}_\nu+\hat\Gamma^{(s)}_\nu\hat\Gamma^{(s)}_\mu=2\delta_{\mu\nu}.$$

Здесь

$$\hat\Gamma^{(s)}_0=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \hat\Gamma^{(s)}_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \hat\Gamma^{(s)}_a=\begin{pmatrix}0&2\hat\tau^a\\-2\hat\tau^a&0\end{pmatrix}.$$

В е л и ч и н ы $\hat\tau^a$, $\hat 1$, $\hat 0$ являются $4S$-рядными матрицами, где S - спин поля. Для фотонов S = 1, поэтому они имеют размерность 4х4.

Через компоненты полей, заданных в 3-мерном пространстве, определим элементы алгебры Клиффорда

$$\overset{①}{F}_{mn}=\beta^K B_K=\begin{pmatrix}0&B_z&-B_y&0\\-B_z&0&B_x&0\\B_y&-B_x&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \overset{②}{F}_{mn}=\alpha^K(-iE_K)=\begin{pmatrix}0&0&0&-iE_x\\0&0&0&-iE_y\\0&0&0&-iE_z\\iE_x&iE_y&iE_z&0\end{pmatrix}.$$

Введем

$$\sigma_{ijK}=(\mathcal{L}_{ij}+\mathcal{L}_{K\bar l})p u^{\bar l}.$$

Имеем

$$S_{123}=\rho,\ S_{324}=\rho u_x,\ S_{134}=\rho u_y,\ S_{124}=\rho u_z .$$

Запишем индукции поля через элементы алгебры Клиффорда

$$\overset{①}{H}_{ik}=\beta^{k}(-H_k)=\begin{bmatrix} 0 & -H_z & H_y & 0 \\ H_z & 0 & -H_x & 0 \\ -H_y & H_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \overset{②}{H}_{ik}=\alpha^{k}(-iD_k)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -iD_x \\ 0 & 0 & 0 & -iD_y \\ 0 & 0 & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{bmatrix}.$$

Определим тензоры

$$F_{mn}=\overset{①}{F}_{mn}+\overset{②}{F}_{mn},\quad H_{ik}=\overset{①}{H}_{ik}+\overset{②}{H}_{ik},\quad S_{ijk} .$$

Следуя идеологии Ф.Клейна, для перехода от трехмерного описания к четырехмерному необходимо применить дополнительные математические структуры. Используем для этой цели тензорную плотность Леви-Чивита $\tilde{\varepsilon}^{ikmn}$ веса $+1$. Тогда

$$\tilde{H}^{ik}=\tilde{\varepsilon}^{ikmn}H_{mn},\quad \tilde{S}^{i}=\tilde{\varepsilon}^{ikmn}S_{kmn} .$$

Дифференциальные уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\mathbb{R}\mathrm{ot}\,(\overset{①}{F}_{mn}+\overset{②}{F}_{mn})=0,\quad \mathbb{D}\mathrm{iv}\,(\underset{①}{\tilde{H}^{ik}}+\underset{②}{\tilde{H}^{ik}})=\tilde{S}^{i}.$$

Структуры $\mathbb{R}\mathrm{ot}$ и $\mathbb{D}\mathrm{iv}$ заданы следующими выражениями:

$$\mathbb{R}\mathrm{ot}\,F_{mn}=\partial_{[k}F_{mn]},\quad \mathbb{D}\mathrm{iv}\,\tilde{H}^{ik}=\partial_k\tilde{H}^{ik} .$$

В работах Схоутена /5,6/ доказано, что они общековариантны и не меняют своего вида от 4-метрики и римановой связности многообразия, **если отсутствуют** дополнительные внешние поля.

Материальные уравнения для взаимосвязи полей и индукций зададим так:

$$\tilde{H}^{ik}=Y_0\tilde{\Lambda}\chi^{ikmn}F_{mn} .$$

Здесь Y_0 - скалярная функция, $\tilde{\Lambda}$ - скалярная плотность, χ^{ikmn} - тензор четвертого ранга.

Частные производные определены **выражениями**

$$\partial_1=\partial/\partial x^1,\quad \partial_2=\partial/\partial x^2,\quad \partial_3=\partial/\partial x^3,\quad \partial_4=\partial/\partial ict .$$

Заметим, что в данной схеме видна причина независимости уравнений от локальной четырехметрики. Действительно, ее изменение трансформирует базис алгебры Клиффорда. Однако это легко учесть заданием тензоров поля таким образом, что уравнения динамики остаются неизменными. Понятно, что эта тонкость должна быть учтена, если структуры физического и математического изоморфизма неэквивалентны.

Переход от векторной к тензорной форме уравнений есть лишь их новая запись, и потому она не в состоянии изменить опорного пространственно-временного многообразия, в котором описываются поля. Поэтому если векторные уравнения заданы в $\mathbb{R}^3\times\mathbb{T}^1$, то в нем определены и тензорные. В $\mathbb{R}^3\times\mathbb{T}^1$ отсутствует 4-метрика, в тензорной форме записи уравнений электродинамики присутствует другая 4-метрика, посредством которой характеризуются условия, в которых распространяется поле.

С учетом сделанных замечаний имеем следущие формы записи :

$$\partial_{[k}F_{mn]}=0\,,\quad \partial_k\tilde{F}^{ik}=0\,,\qquad \nabla\times\vec{E}+\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}=0\,,$$

$$\nabla\vec{B}=0\,,$$

$$\partial_k\tilde{H}^{ik}=s^i\,,\quad \partial_{[k}H_{mn]}=s_{kmn}\,,\quad \nabla\times\vec{H}-\frac{1}{c}\dot{\vec{D}}=\vec{j}\,,$$

$$\nabla\vec{D}=\rho\,.$$

Известно, что тензор χ^{ikmn}, связывающий поля и индукции, имеет симметрийные свойства, аналогичные тензору кривизны риманова пространства,

$$\chi^{ikmn}=-\chi^{kimn}=-\chi^{iknm}=\chi^{mnik}$$

и удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\partial_i\tilde{\chi}^{[kimn]}=0\,.$$

Аналогичные соотношения верны для тензора Римана /7/

$$\partial_i\Omega^{1/2}R^{[kimn]}=0\,,$$

где Ω_{ik} - метрика риманова многообразия. Величина

$$\Omega=\det|\Omega_{ik}|\,.$$

2. Общая ковариантность уравнений электродинамики

Независимость вида уравнений Максвелла в трехмерном пространстве от метрики, а также общее свойство ковариантности в четырех - мерном пространстве при любом невырожденном голономном преобразовании координат первоначально было обнаружено Г.Вейлем /8/. Позднее эти вопросы рассматривали Ф. Коттлер/9/, А. Картан /10/, Д.Данциг /11/, Е.Пост /7/, Ж.Дешам/12/. В Советском Союзе симметрийные свойства уравнений электродинамики в рамках группового подхода широко проанализированы в работах Н.Х. Ибрагимова/13/, В.И. Фущича и А.Г.Никитина /14/. Г.А. Котельников /15/ рассмотрел нелинейные представления группы Галилея и дополнил анализ, выполненный в этом направлении Леви-Леблоном /16/. Мною рассмотрена галилеевски инвариантная электродинамика сред /17/ и доказана корректность физического со - гласования группы Галилея и Лоренца в электродинамике /18/. В работе /19/ групповым методом доказана инвариантность уравнений Максвелла в среде относительно бесконечномерной группы Ли.

По существу все основные результаты симметрийного анализа системы уравнений электродинамики движущихся сред, полученные в начале века, были переоткрыты заново в рамках группового подхода. Поэтому их следует считать надежно обоснованными и использовать как отправную точку углубленного изучения дифференциально-геометрической структуры уравнений электродинамики. На этом пути предложена модель расслоенного пространства-в р е м е н и, синтезирующая в себе черты ньютоновского и эйнштейновского подходов. В силу этого появляются некоторые новые возможности учета в теории внутренней структуры фотонов и электронов.

Приведем доказательство общей ковариантности уравнений электродинамики, следуя монографии Е.Поста /7/. Рассмотрим преобразования систем координат в четырехмерном пространстве

$$x^{k} = x^{k}(x^{k'}), \quad x^{k'} = x^{k'}(x^{k}),$$

полагая, что они невырожденны и голономны:

$$\partial_{i'} A^{j}_{j'} = \partial_{j'} A^{j}_{i'} \, .$$

Обозначим частные производные и якобиан преобразований

$$A^{i}_{i'} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}, \quad A^{i'}_{i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}, \quad \Delta = \det |A^{i}_{i'}| \, .$$

Используем законы преобразования тензоров и тензорных плотностей

$$F_{i'j'} = \mathcal{A}^{i}_{i'}\mathcal{A}^{j}_{j'}F_{ij}\,, \quad \tilde{H}^{i'j'} = |\Delta|^{-1}\mathcal{A}^{i'}_{i}\mathcal{A}^{j'}_{j}\tilde{H}^{ij}\,.$$

Рассмотрим вопрос об инвариантности первой пары уравнений. Имеем

$$\partial_{[k'}F_{i'j']} = \partial_{[k'}(\mathcal{A}^{i}_{i'}\mathcal{A}^{j}_{j']}F_{ij}) =$$

$$= \mathcal{A}^{i}_{[i'}\mathcal{A}^{j}_{j'}\partial_{k']}F_{ij} + F_{ij}\mathcal{A}^{i}_{[i'}\partial_{k'}\mathcal{A}^{j}_{j']} + F_{ij}\mathcal{A}^{j}_{[j'}\partial_{k'}\mathcal{A}^{i}_{i']}\,.$$

Из-за голономности преобразований второй и третий члены компенсируются, а так как $\partial_{k'} = \mathcal{A}^{k}_{k'}\partial_{k}$, то

$$\partial_{[k'}F_{i'j']} = \mathcal{A}^{i}_{[i'}\mathcal{A}^{j}_{j'}\mathcal{A}^{k}_{k']}\partial_{k}F_{ij}\,.$$

Перенесем индекс альтернирования на (ijk). Получим

$$\partial_{[k'}F_{i'j']} = \mathcal{A}^{k}_{k'}\mathcal{A}^{i}_{i'}\mathcal{A}^{j}_{j'}\partial_{[k}F_{ij]}\,.$$

Поскольку $\partial_{[k}F_{ij]} = 0$, то $\partial_{[k'}F_{i'j']} = 0$.

Проанализируем симметрийные свойства второй пары дифференциальных уравнений электродинамики. Так,

$$\partial_{k'}\tilde{H}^{i'k'} = |\Delta|^{-1}\mathcal{A}^{i'}_{i}\mathcal{A}^{k'}_{k}\partial_{k'}\tilde{H}^{ik} +$$

$$+ \tilde{H}^{ik}\left\{|\Delta|^{-1}\mathcal{A}^{i'}_{i}\partial_{k'}\mathcal{A}^{k'}_{k} + |\Delta|^{-1}\mathcal{A}^{k'}_{k}\partial_{k'}\mathcal{A}^{i'}_{i} + \mathcal{A}^{i'}_{i}\mathcal{A}^{k'}_{k}\partial_{k'}|\Delta|^{-1}\right\}.$$

Используем известные соотношения

$$-|\Delta|^{-1}\mathcal{A}^{k}_{k'}\partial_{i}\mathcal{A}^{k'}_{k} = \partial_{i}|\Delta|^{-1}\,,$$

$$\mathcal{A}^{i'}_{i}\mathcal{A}^{j'}_{j}\partial_{j'}\tilde{H}^{ij} = \mathcal{A}^{i'}_{i}\partial_{j}\tilde{H}^{ij}\,.$$

Сгруппируем выражения

$$\partial_{k'}\tilde{H}^{i'k'} = |\Delta|^{-1} A^{i'}_{i}\partial_{k}\tilde{H}^{ik} +$$

$$+ |\Delta|^{-1}\tilde{H}^{ik}\left\{A^{i'}_{i}A^{m}_{k'}\partial_{m}A^{k'}_{k} + \partial_{k}A^{i'}_{i} - A^{i'}_{i}A^{m}_{k'}\partial_{k}A^{k'}_{m}\right\}.$$

Член вида $\tilde{H}^{ik}\partial_{k}A^{i'}_{i}$ исчезнет из-за антисимметрии $\tilde{H}^{ik}$. Другие члены в скобках компенсируются из условия голономности. Получим

$$\partial_{k'}\tilde{H}^{i'k'} = |\Delta|^{-1}A^{i'}_{i}\partial_{k}\tilde{H}^{ik} = |\Delta|^{-1}A^{i'}_{i}\tilde{S}^{i}.$$

Доказательство инвариантности дифференциальных уравнений электродинамики относительно произвольных невырожденных преобразований голономных систем координат на этом завершено.

Поскольку 4-м е т р и к а используется только в выражении для плотности тензора, дифференциальные уравнения не меняют своего вида в различных системах координат. Кроме этого, сама 4-метрика имеет самостоятельное значение.

Уравнения не показывают и связность многообразия без кручения. Чтобы доказать это, заменим частные производные на ковариантные. Для F_{mn} имеем

$$\nabla_{[k}F_{mn]} = \partial_{[k}F_{mn]} - 2F_{\sigma[k}\Gamma^{\sigma}_{mn]} = \partial_{[k}F_{mn]}.$$

Рассмотрим уравнения для $\tilde{H}^{ik}$:

$$\nabla_{k}\tilde{H}^{ik} = \partial_{k}\tilde{H}^{ik} + \tilde{H}^{pk}\Gamma^{i}_{kp} + \tilde{H}^{ip}\Gamma^{k}_{pk} - \Gamma^{p}_{pk}\tilde{H}^{ik} = \tilde{S}^{i}.$$

Последний член разложения обусловлен структурой $\tilde{H}^{ik}$ – тензорной плотностью. Величина $\tilde{H}^{pk}\Gamma^{i}_{pk} = 0$ из антисимметрии H^{pk}. Два других слагаемых взаимно компенсируются вследствие симметричности связности.

Отсюда следует вывод: дифференциальные уравнения Максвелла для среды независимы от метрики и линейной связности многообразия без кручения и допускают симметрию относительно группы произвольных диффеоморфизмов.

Заметим, что материальные уравнения имеют очевидную тензорную форму

$$\tilde{H}^{ik} = Y_0 \tilde{\Lambda} \chi^{ikmn} F_{mn}.$$

С их помощью конкретизируются условия, в которых находится поле. Если дифференциальные уравнения образуют относительно жесткую схему описания электромагнитного поля, то материальные установлены только для некоторых физических условий и являются относительно свободными. Они будут использованы нами как ростковая точка для обобщения уравнений Максвелла. Ее конкретизация будет обеспечена при установлении элементов

$$\chi^{ikmn},\ \tilde{\Lambda},\ Y_0.$$

Выясним роль кручения. Пусть тензор $B^k_{pn} = \Gamma^k_{pn} - \Gamma^k_{np}$, показывающий отклонение компонент связности Γ^k_{pn} от симметричности по нижним индексам, отличен от нуля. Из предыдущего рассмотрения видно, что уравнения для $\tilde{H}^{ik}$ изменятся следующим образом:

$$(\partial_k + B^p_{kp})\tilde{H}^{ik} = \tilde{S}^i.$$

Для второй пары уравнений используем выражение для ковариантной производной ковариантного тензора второго ранга

$$\nabla_i F_{jk} = \partial_i F_{jk} - \Gamma^l_{ji} F_{lk} - \Gamma^l_{ki} F_{jl}.$$

Их суммирование даст

$$\nabla_{[k} F_{ij]} = \partial_{[k} F_{ij]} - B^l_{[ki} F_{j]l}.$$

Указанными добавками исчерпывается вклад кручения в уравнения Максвелла.

Заметим, что добавление в уравнения члена вида $\tilde{H}^{ik}\partial w/\partial x^k$, выполненное в /2/, есть обобщение уравнений электродинамики, так как базируется на использовании "конвективной добавки" в одну пару уравнений и неэквивалентно учету кручения многообразия, хотя аналогично неминимальному удлинению производных и, очевидно, имеет о[illegible].

3. К модели электродинамических явлений

Покажем, что зависимость от метрики и связности многообразия можно учесть посредством тензора, связывающего поля и индукции. Обобщим результаты, полученные ранее Е.Постом /7/.

Смоделируем физическую среду римановым пространством-временем, полагая, что оно "свободно от материи" ,т.е. тензор ее энергии-импульса тождественно равен нулю. Учтем, что для тензора плотности энергии-импульса электромагнитного поля $\tilde{T}^i_j$ выполняется условие

$$\nabla_i \tilde{T}^i_j \equiv 0 .$$

Используем уравнения А.Эйнштейна, связывающие характеристики пространственно-временного многообразия с тензором материи:

$$\Omega^{1/2}\left(R^i_j - \frac{1}{4}\delta^i_j R\right) = -\kappa \tilde{T}^i_j .$$

Здесь Ω_{ij} - метрический тензор, R - скалярная кривизна, R^i_j - тензор Риччи. Используя условие равенства нулю ковариантной производной от тензора энергии-импульса электромагнитного поля, имеем

$$\nabla_i\left(R^i_j - \frac{1}{4}\delta^i_j R\right) = 0 .$$

С другой стороны, исходя из тождеств Бианки, справедливых в произвольном римановом многообразии, получим

$$\nabla_i\left(R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R\right) = 0 .$$

Их согласование возможно лишь при условии $\nabla_i R = \partial_i R = 0$. Оно означает, что $R(x,y,z,t) = const$. Известно /20/,что для этого случая тензор кривизны риманова пространства имеет вид

$$R^{ijkm} = \Phi\left(\Omega^{ik}\Omega^{jm} - \Omega^{im}\Omega^{jk}\right).$$

Скаляр Φ связан со скалярной кривизной R и размерностью многообразия n выражением /21/

$$\Phi = -\frac{R}{n(n-1)} .$$

В общем случае тензор кривизны R_{ijkl} задается через метрику Ω_{lm} и связность Γ^{m}_{jk} многообразия

$$R_{ijkl}=\Omega_{lm}\left\{2\partial_{[i}\Gamma^{m}_{j]k}+2\Gamma^{m}_{\rho[i}\Gamma^{\rho}_{j]k}\right\}.$$

Учтем, что тензор χ^{ikmn}, связывающий поля и индукции электро - магнитного поля, имеет свойства, во многом аналогичные тензору кривизны риманова пространства R_{ijkl}. Примем ГИПОТЕЗУ: влияние среды, гравитационного и других внешних полей на электромагнитное может быть реализовано по схеме Эйнштейна-Картана посредством геометризации материальных уравнений

метрикой

$$\check{g}_{ik}=\tilde{g}_{ik}\oplus\Omega_{ik}\oplus\hat{g}_{ik},$$

тензором кручения

$$\check{b}^{i}_{jk}=\tilde{b}^{i}_{jk}\oplus b^{i}_{jk}\oplus\hat{b}^{i}_{jk},$$

тензором кривизны

$$\check{R}_{ijkl}=\tilde{R}_{ijkl}\oplus R_{ijkl}\oplus\hat{R}_{ijkl}\Rightarrow\chi^{ikmn}$$

по следующей схеме:

$$\nabla_{[k}F_{mn]}=0,\quad \nabla_{k}\tilde{H}^{ik}=\tilde{S}^{i},$$

$$\tilde{H}^{ik}=\gamma_0(\check{g})^{1/2}\chi^{ikmn}F_{mn}.$$

Здесь приняты обозначения : $\check{g}=\det|\check{g}_{ik}|$, $\nabla_k=\partial_k+A_k$, $\sim$ - символ гравитационного поля, $\wedge$ - символ других внешних полей, физическая среда обозначается характеристиками без дополнительных символов.

Такой вариант использовался ранее в теории гравитации, когда анализировалось ее влияние на электромагнитное поле. Для случая физической среды ее моделирование римановым пространством-временем последовательно выполнено Е. Постом /22/. Он инициировал этот вопрос и провел некоторое исследование материальных уравнений как на основе теории групп /23/, так и исходя из учета возможных физических ограничений.

Принципиально новым в нашем подходе является то, что уже на данном этапе проведено сознательное разделение двух видов пространственно-временных характеристик уравнений электродинамики: с одной стороны, это характеристики многообразия, в котором описываются явления, с другой стороны - физические характеристики условий распространения поля, моделируемые римановым пространством-временем. Их смешение недопустимо, так как может привести к принципиальным ошибкам, трудноразличимым как раз в силу независимости уравнений от 4-метрики и линейной связности.

Рассмотрим частные случаи задания материальных уравнений:

Электродинамика вакуума по Лоренцу-Минковскому

В координатах $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^0 = ict$ имеем метрику Минковского $\bar{g}^{im} = \mathrm{diag}\,(1,1,1,1)$, скалярную плотность веса + I вида $\sqrt{\bar{g}}$, скаляр $Y_0 = 1$, а также тензор

$$\chi^{ikmn} = \frac{1}{2}\left(\bar{g}^{im}\bar{g}^{kn} - \bar{g}^{in}\bar{g}^{km}\right).$$

В этом случае двухтензорное электромагнитное поле описывается как однотензорное, если $\bar{g}_{im}$ рассматривать в качестве метрики однородного опорного четырехмерного пространства-времени. Здесь для опорного многообразия и взаимосвязи полей и индукций используется одна метрика.

Лоренц-инвариантная электродинамика изотропных движущихся сред

Основную роль играет тензор

$$\bar{\Omega}^{im} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[\bar{g}^{im} + (\varepsilon\mu - 1)u^i u^m\right].$$

Здесь $u^i = dx^i/d\bar{q}$, $d\bar{q}^2 = \bar{g}_{ik}dx^i dx^k$. Скалярная плотность веса + I равна $\sqrt{\bar{\Omega}}$. Взаимосвязь полей и индукций имеет вид

$$\tilde{H}^{ik} = \frac{\sqrt{\bar{\Omega}}}{2}\left(\bar{\Omega}^{im}\bar{\Omega}^{kn} - \bar{\Omega}^{in}\bar{\Omega}^{km}\right)F_{mn}.$$

В векторном виде им соответствуют уравнения Минковского

$$\vec{D} + \left[\frac{\vec{u}}{c}\times\vec{H}\right] = \varepsilon\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c}\times\vec{B}\right]\right), \quad \vec{B} - \left[\vec{E}\times\frac{\vec{u}}{c}\right] = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D}\times\frac{\vec{u}}{c}\right]\right).$$

Здесь $\vec{u}$ - скорость движения среды, скорость движения источника поля в уравнения не входит.

Электродинамика, учитывающая инерционные свойства поля

Сейчас известен только один такой вариант, задаваемый уравнениями, приведенными во введении. Для этого случая

$$\tilde{\Lambda} = \sqrt{\Omega} \ , \ Y_0 = \sqrt{w} .$$

Указанная система имеет общековариантный вид. Задана она в опорном многообразии $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^1$, что упрощает анализ расчетных и экспериментальных значений. В уравнениях содержится как скорость источника, так и скорость среды, а также отношение, задающее взаимосвязь поля со средой. Материальные уравнения выделяют подгруппу из группы диффеоморфизмов на основе требования форминвариантности материальных уравнений. Так, из условия **форминвариантности** при $w=0$ получаются уравнения, которые не меняют своего вида при преобразованиях группы Галилея; если же $w = 1$, то уравнения не меняются при преобразованиях группы Лоренца. Поскольку параметр w является физическим фактором теории, приходим к выводу, что группы Галилея и Лоренца физически дополняют друг друга. Они формируют материальные уравнения, меняющиеся в зависимости от физической ситуации, но не имеют отношения к структуре опорного многообразия, в качестве которого используем $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^1$. Конечно, можно описывать электромагнитные явления и в другом пространственно-временном многообразии, но в этом случае усложняется анализ расчетных и измеренных значений, равно как и вопрос об описании материальных соотношений в нем.

Электродинамика, использующая теорию калибровочных полей

Тензор четвертого ранга, связывающий поля и индукции, χ^{ikmn} можно задать также, исходя из теории калибровочных полей. Выберем, в частности, в качестве группы внутренней симметрии группу Пуанкаре. Для нее определены тетрадные компоненты h^{μ}_{k} и локальная аффинная связность A^{ij}_{μ} /23/. Стандартным образом задается напряженность поля. Тензор четвертого ранга $R^{i}_{j\mu\nu}$ выражается через аффинную связность

$$R^{i}_{j\mu\nu} = A^{i}_{j\mu,\nu} - A^{i}_{j\nu,\mu} - A^{i}_{k\mu} A^{k}_{j\nu} + A^{i}_{k\nu} A^{k}_{j\mu} .$$

Таким образом введенное поле можно рассматривать как внешнее для электромагнитного. Тогда и гравитационное поле и другие внешние поля включаются в электродинамику по единой методике.

4. Внешние и внутренние симметрии в электродинамике

Потребность в разделении симметрий физической системы или объекта на внешние и внутренние базируется в своей основе на представлении, что не существует объектов, не имеющих частей. По этой причине к координатам материальной точки (их принято называть внешними) присоединяются (в частности, ими могут быть углы Эйлера) внутренние координаты. Тогда волновая функция идеального жесткого ротатора зависит от пространственных x, y, z и угловых ϕ, φ, χ координат:

$$\Psi(x, y, z, \phi, \varphi, \chi).$$

Подобный прием использовался давно, математическую классификацию внутренних структур впервые провел Д. Финкельштейн /24/. Она базируется на рассмотрении однородных пространств группы симметрии системы. Позднее, начиная с работы Янга-Миллса /25/, внутренние симметрии стали систематически использоваться в физике в рамках теории калибровочных полей. Так, электродинамика свободного электромагнитного поля в вакууме без учета скорости движения источника представляет собой пример теории калибровочного поля с абелевой группой симметрии $U(1)$. В ней тензор напряженности выражается через калибровочные безмассовые векторные поля:

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i .$$

Вторая пара уравнений следует из вариационного принципа для

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{ik} F^{ik}$$

и имеет вид

$$\partial_k F^{ik} = 0 .$$

В рамках теории калибровочной инвариантности и концепции спонтанного нарушения симметрии удалось провести объединение электромагнитных и слабых взаимодействий для группы внутренней симметрии

$$G_{in} = SU(2) \times U(1) .$$

Истоки и результаты синтеза изложены в работах /26-28/.

Покажем, что группу внутренней симметрии в электродинамике можно найти, базируясь на приведенном общековариантном формализме. Дифференциальные уравнения сами по себе допускают очень широкую симметрию и не задают элементов метрики или связности, посредством которых можно было бы выделить подгруппы. Так, из условия форминвариантности метрики следует группа изометрий, из условия инвариантности связности - группа голономий. Поэтому при описании физических явлений в четырехмерном многообразии $\mathcal{U}_4$ из анализа дифференциальных уравнений невозможно без дополнительных предположений установить его структуру. Отождествим $\mathcal{U}_4$ с пространством Римана-Картана. В частности, используем плоское пространство аффинной связности, например $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^1$. В данном случае группа симметрии полной системы уравнений фиксирует лишь свободу выбора системы координат в опорном многообразии. В электродинамике движущихся сред ее задает группа произвольных диффеоморфизмов, являющаяся как бы внешней по отношению к исследуемому явлению. Обозначим ее G_{out}. Группа действует в многообразии $\mathcal{U}_4$, и поэтому определена пара

$$\mathcal{U}_4,\ Diff(4) = G_{out}.$$

Другая группа симметрии, зависящая от метрики и связности, следует из анализа материальных уравнений электродинамики. Согласно проведенному анализу, тензор, связывающий поля и индукции, является тензором кривизны риманова многообразия

$$\tilde{\chi}^{ikmn} = Y_0 \tilde{\Lambda} \check{R}^{ikmn}.$$

Поэтому допустима алгебраическая классификация χ^{ikmn} по методу, разработанному А.З.Петровым для $\check{R}^{ikmn}$ в теории гравитации /29/. На этой основе задается группа симметрии.

Рассмотрим частный случай модели пространства,"свободного от материи". Тогда тензор кривизны билинейным образом выражается через 4-метрику. Для него известна группа движений, в данном случае группа де-Ситтера $SO(4,1)$ /30/.

Отождествим группу движений риманова многообразия, ассоциированного с материальными уравнениями электродинамики G_{mat}, с группой внутренней симметрии G_{in}. В рассматриваемом случае

$$G_{mov} = G_{in} = SO(4,1).$$

Группой изотропии произвольной точки многообразия является группа Лоренца $SO(3,1)$. Пусть K будет ее подгруппой. Введем обозначения

$$G = SO(4,1)\ ,\ H = SO(3,1)\ ,\ K \subset H\ ,$$

$$F = SO(4,1)/SO(3,1)\ ,\ S = SO(3,1)/K\ .$$

Для многообразия $F = G/H$ алгебра Ли группы G представится суммой $\tilde{g} = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}^1$, где $\mathcal{L}^0$ - алгебра Ли группы H, для которой $H(x_0) = x_0$. Алгебра $\mathcal{L}^1 = R^n_{x_0}$ изоморфна касательному пространству к F в точке x_0. Поскольку в метрике Киллинга на алгебре Ли $\tilde{g}$ подпространства $\mathcal{L}^0$ и $\mathcal{L}^1$ ортогональны /31/ и

$$Sp(\mathrm{ad}\,A\ \mathrm{ad}\,B) = 0\ ,$$

то форма Киллинга имеет вид

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g^{(0)}_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g^{(1)}_{\gamma\delta} \end{pmatrix}.$$

Здесь α, β - индексы базиса в $\mathcal{L}^0$; γ, δ - индексы базиса в $\mathcal{L}^1$. Форму $g^{(1)}_{\gamma\delta}$ называют формой Киллинга симметричного пространства.

Мы имеем сейчас необходимые элементы для построения модели расслоенного многообразия. Пусть

$$E_R = E_R(U_4, SO(4,1)/SO(3,1), SO(4,1)),$$

где U_4 - база, $F = SO(4,1)/SO(3,1)$ - типовой слой, $SO(4,1)$ - структурная группа.

К обобщениям приходим, усложняя структуру слоя. Пусть задан слой

$$FS\,(SO(4,1)/SO(3,1),\ SO(3,1)/K).$$

Тогда имеем

$$E_R = E_R(\mathcal{U}_4, FS, SO(4,1)).$$

Пространство $\mathcal{U}_4$ использовано везде как база расслоенного многообразия, а терминология соответствует введенной в работе /32/.

В принятом подходе слагаемые $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^1$ образуют разложение Картана

$$[L^0, L^0] \subset L^0, \quad [L^1, L^0] \subset L^1, \quad [L^1, L^1] \subset L^0.$$

Алгебра Ли $\tilde{g}$ в сумме $\tilde{g} = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}^1$ называется $\mathbb{Z}_2$ -градуированной, так как

$$[L^i, L^j] \subset L^{(i+j)(\mathrm{mod}\,2)}.$$

Известно, что метрика на $R^n_{x_0} = \mathcal{L}^1$ инвариантна относительно внутренних автоморфизмов

$$\xi \longmapsto g \xi g^{-1},$$

где $g \in H$, $\xi \in \mathcal{L}^1$.

Для скалярного произведения на $\mathcal{L}^1$ имеем условия

$$\langle \xi_T, \eta_T \rangle = \langle \xi, \eta \rangle,$$

$$\langle [A, \xi], \eta \rangle + \langle \xi, [A, \eta] \rangle = 0.$$

Отсюда видно, что электродинамика движущихся сред допускает наличие внешней и внутренней симметрии и задает необходимые элементы структуры расслоенных многообразий. Выделим различные пространства (внешнее и внутреннее), индуцированные двумя группами симметрии. Они имеют самостоятельное значение, различные функции и структуру. Определенный физический интерес представляет их синтез. Так, рассмотрим расслоенное многообразие, базой которого является ньютоновское пространство-время, а слоем - многообразие Минковского. Такой вариант с целью синтеза абсолютных и относительных свойств пространства и времени гипотетически предлагался ранее в /33/. Теперь он обоснован в рамках синтеза симметрий.

Рассмотрим расслоенное многообразие

$$E^R\{U_4, \mathrm{Diff}(4); F=G/H, G\},$$

в котором база U_4 является пространством Римана-Картана, G/H - однородное пространство, $G=SO(4,1)$, $H=SO(3,1)$. В этом случае

$$\dim U_4 = \dim F.$$

Выберем точку x_0 в базе и точку ξ_0 в слое. Проведем "склеивание" внешнего и внутреннего пространств, полагая $x_0 \equiv \xi_0$. Имеем изоморфизм пространств, касательных к базе и к слою:

$$T_{x_0} \sim F_{\xi_0}.$$

Реализуем взаимосвязь внутренних и внешних переменных - мост, задавая <u>группу спаривания</u> G_{sp} посредством преобразований

$$y^\alpha = y^\alpha(x^\kappa).$$

Рассмотрим "следы" четырехметрики $g_{\alpha\beta}(y, x_0)$, компонент связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(y, x_0)$ и тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}(y, x_0)$ области многообразия G/H в окрестности точки x_0 на базовое многообразие. Пусть

$$A^\alpha_\kappa = \partial y^\alpha / \partial x^\kappa, \quad A^\kappa_\alpha = \partial x^\kappa / \partial y^\alpha.$$

Тогда имеем

$$g_{ik} = A^{\alpha\beta}_{ik} \overset{*}{g}_{\alpha\beta}(x), \quad R_{ijkl} = A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{ijkl} \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

где

$$\overset{*}{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \big|_{y=y(x)}, \quad \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} \big|_{y=y(x)}.$$

Так выполнена размерностная редукция - проектирование внутреннего пространства на внешнее. Тензорное поле $\chi^{ikmn} = R^{ikmn}$ и скалярная плотность $\tilde{\lambda} = \sqrt{g}$ из внутреннего пространства переведены во внешнее, в частности в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^1$. Понятно, что они зависят от структуры группы спаривания.

Возможен и обратный вариант. Так, в работах /1,2,17,18/ тензорное поле χ^{ikmn} получено из физической модели, без обращения к указанной схеме проектирования.

5. К модели расслоенного пространства-времени

В работе /34/ рассмотрено расслоенное пространство-время, база и слой в котором являются 4-мерными многообразиями. В /4,33/ проанализированы математические аспекты и вопросы физической интерпретации такого подхода. Учтем, следуя идеологии Калуца-Клейна, изменения в этой схеме, вытекающие из представления о внешней и внутренней симметрии уравнений электродинамики.

Расслоенное пространство-время необходимо, с физической точки зрения, для согласования двух видов пространственно-временных характеристик : одних, выражающих состояние объекта или их совокупности, и других, описывающих движение объекта или их совокупности - событие. С математической точки зрения модель инициируется представлением о наличии двух различных симметрий для одних и тех же уравнений. Поскольку указанные величины независимы, важно рассмотреть реализацию их синтеза. Заметим, что поведение эталонов длины и времени столь же самостоятельно и равноправно с физической точки зрения, как и поведение событий, задающих смещения точки в условиях данного эксперимента, что проанализировано в /3/. Внешняя симметрия позволяет произвольным образом задать систему координат в многообразии Римана-Картана, и в частности в ньютоновском пространстве-времени. На языке дифференциальной геометрии G_{out} задает атлас в базе расслоения. Внутренняя симметрия позволяет учесть специфику связи двухтензорного электромагнитного поля с его окружением - физической средой. Она коррелирует с выбором базы, но имеет самостоятельное значение. Так, нормированное скалярное поле (отношение), с одной стороны, задает условия взаимосвязи поля со средой, неустранимое преобразованиями координат, с другой стороны, определяет группу внутренней симметрии системы . Группой изотропии для локальной канонической метрики событий является группа Лоренца, индуцирующая псевдоевклидову структуру пространства событий. В нашем случае им является пространство Минковского, постулируемое нами ранее как типовой слой. Такой вариант представляет интересные возможности для синтеза ньютоновских и эйнштейновских представлений о пространстве и времени.

На данном этапе анализа электромагнитных явлений стало очевидным, что общековариантная электродинамика движущихся сред естественным образом индуцирует структуру расслоенного пространства-времени. Базой его является многообразие Римана-Картана, слоем - однородное пространство G/H, образованное факторизацией группы внутренней симметрии по ее максимальной компактной подгруппе.

Структурной группой расслоения является группа движений риманова пространства, ассоциированного с материальными уравнениями электродинамики, калибровочной - произвольная ее подгруппа.

Сформулируем сейчас представление о физической иерархии расслоений. Соединим концепцию расслоенности пространства-времени с общими представлениями о структуре объектов. Будем использовать следуя /33/, координаты слоя как характеристики внутреннего движения физического объекта. Однократное расслоение, типовой слой в котором есть однородное пространство G/H, представляет собой материальную точку в виде структуры, состоящей из материальных точек более высокого уровня. Двухкратное расслоение описывает материальные точки более высокого уровня как протяженные объекты. В этом случае типовой слой есть самостоятельное расслоенное многообразие вида

$$F(G/H, H/K, \ldots).$$

Заметим, что в случае группы внутренней симметрии с конечным числом параметров приходим к конечному числу возможностей выбора типового слоя, что может быть использовано при классификации типов частиц. Очевидным образом получаем иерархию расслоений, которая может быть продолжена как в одну, так и в другую сторону, если за основу брать концепцию материальной точки.

Указанную иерархию можно замкнуть по динамическому признаку. Для этого выберем некоторый опорный уровень P_K. Пусть уровни P_{n-K} и P_{K+m}, которые являются некоторым внешним и внутренним уровнем иерархии, оказывают "одинаково слабое" влияние на динамику объекта, отнесенного к опорному уровню. Тогда возможно их отождествление, ведущее к замыканию иерархии.

Поскольку поведение объектов, по крайней мере биологических, определяется не только их прошлым, но и стремлением к будущему, их динамика должна строиться с учетом вариантов замыкания, обусловленных "склеиванием" эквивалентных по влиянию конечных точек. Поэтому на каждом уровне можно выделить подпространства, отнесенные к прошлому, настоящему и будущему. В этом случае получаем иерархическую полосу. При "склеивании" точек для различных уровней приходим либо к цилиндру, либо к полосе Мебиуса. Вероятно, замкнутая топологическая полоса может быть использована для описания конечного числа типов физических объектов как конструкций в иерархии расслоенных многообразий.

Сформулируем проблему размерностного расширения теории. Потребность в ней вызвана необходимостью перехода от моделей физических явлений, заданных в многомерном пространстве-времени, к аналогам в расслоенном пространстве-времени. В настоящее время разработано несколько вариантов обратной задачи. Такое направление называется размерной редукцией. Суть его в переходе от теории, заданной в расслоенном многообразии к 4-мерной модели. С точки зрения дифференциальной геометрии задача сводится к построению некоторого сечения расслоенного многообразия. Алгоритмически оно обычно выполняется интегрированием уравнений по слоевым координатам /35/. Другая сторона проблемы расширения связана с физической интерпретацией калибровочных полей как "проявлений структуры физических объектов". В стандартном подходе известна локальная группа симметрии. Учет зависимости ее параметров от координат позволяет в рамках лагранжева подхода обеспечить переход к главному расслоенному многообразию, в котором калибровочные поля играют роль компонент связности. Типовой слой в нем образует группа симметрии, посредством которой извлекается информация об объекте. Было бы желательно иметь такую теорию, в которой внутренняя симметрия элементарных частиц учитывается аналогично внешней. Для этого нужна разработка математических аспектов проблемы, аналогично тому, как это сделано в методе размерной редукции, когда переход от главного расслоенного многообразия к четырехмерному сведен к вопросам теории индуцированных представлений /36,37/.

Используем для размерностного расширения принцип относительности в расслоенном многообразии, аналогичный использованному в работе /33/: <u>законы, по которым изменяется состояние физических систем, инварианты относительно преобразований, сохраняющих структуру пространственно-временного многообразия.</u>

Ситуация выглядит следующим образом: необходимо перейти от тензоров и дифференциальных операторов в 4-мерном многообразии к соответствующим величинам в расслоенном, учитывая его структуру и другие возможные особенности задачи.

Приведем один пример того, как это можно сделать. Рассмотрим однократное расслоение, каждая точка которого параметризована координатами $\{x^{\kappa}\}$ базы и координатами $\{y^{\alpha}\}$ слоя, при условии, что они имеют размерность четыре. Допустимые преобразования координат:

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^{\kappa}), \quad y^{\alpha'} = y^{\alpha'}(y^{\alpha}, x^{i}).$$

В каждой точке (x, y) расслоенного многообразия имеем два векторных пространства – касательное и кокасательное с базисами:

$$T_{n+n}(x,y) = \left\{X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, Y_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right\}, \quad T^*_{n+n}(x,y) = \left\{dx^i, dy^\alpha\right\}.$$

Для матрицы преобразований координат

$$A = \begin{vmatrix} x^{i'}_{i} & 0 \\ y^{\alpha'}_{i} & y^{\alpha'}_{\alpha} \end{vmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{vmatrix} x^{i}_{i'} & 0 \\ y^{\alpha}_{i'} & y^{\alpha}_{\alpha'} \end{vmatrix}.$$

Слоевой репер при этом остается инвариантным, а базовый получает добавку

$$\vec{e}_{\alpha'} = y^{\alpha}_{\alpha'} \vec{e}_{\alpha}, \quad \vec{e}_{i'} = x^{i}_{i'} \vec{e}_{i} + y^{\alpha}_{i'} \vec{e}_{\alpha}.$$

Для кореперов ситуация является обратной.

Выбор инвариантного репера

$$\vec{E}_i = \vec{e}_i - \Gamma^{\alpha}_{i} \vec{e}_{\alpha},$$

являющегося тензором относительно преобразования координат, индуцирует преобразование объекта линейной связности $\Gamma^{\alpha}_{i}(x,y)$ по закону

$$\Gamma^{\alpha'}_{i'} = x^{i}_{i'}\left(-y^{\alpha'}_{i} + y^{\alpha'}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{i}\right).$$

Инвариантный корепер запишется поэтому так:

$$\theta^{\alpha} = dy^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa} dx^{\kappa}, \quad dx^{\kappa}.$$

Произвольное векторное поле представится в виде суммы горизонтального и вертикального, т.е. инвариантных базового и слоевого векторных полей. Аналогично представятся тензоры. Для построения системы уравнений используем процедуру инвариантного дифференцирования на основе работы /38/.

Следуя условию, что инвариантный дифференциал горизонтального поля есть горизонтальный вектор, для линейной связности получим

$$D\xi^i = d\xi^i + \xi^k (\Gamma^i_{kp} dx^p + C^i_{k\alpha}\theta^\alpha).$$

Условие горизонтальности означает, что

$$D\xi^{i'} = x^{i'}_i D\xi^i .$$

Отсюда имеем законы преобразования компонент связности

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = x^{i'}_i (x^i_{j'k'} + x^j_{j'} x^k_{k'} \Gamma^i_{jk}),$$

$$C^{i'}_{j'\alpha'} = x^{i'}_i x^j_{j'} y^\alpha_{\alpha'} C^i_{j\alpha} .$$

Следуя условию, что инвариантный дифференциал вертикального поля есть вертикальный вектор, для линейной связности получим

$$D\xi^\alpha = d\xi^\alpha + \xi^\beta (\Gamma^\alpha_{\beta k} dx^k + C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\gamma).$$

Условие вертикальности означает, что

$$D\xi^{\alpha'} = y^{\alpha'}_\alpha D\xi^\alpha .$$

Отсюда имеем законы преобразования компонент связности

$$C^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = y^{\alpha'}_\alpha (y^\alpha_{\beta'\gamma'} + y^\beta_{\beta'} y^\gamma_{\gamma'} C^\alpha_{\beta\gamma}),$$

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'k'} = y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_{\beta'k'} + y^{\alpha'}_\alpha y^\beta_{\beta'} x^k_{k'} \Gamma^\alpha_{\beta k} +$$

$$+ y^{\alpha'}_\alpha y^\alpha_{\beta'\gamma'} x^k_{k'} (y^{\gamma'}_k - y^{\gamma'}_\gamma \Gamma^\gamma_k).$$

Инвариантный дифференциал выражается через пару ковариантных производных. Для векторных полей

$$D\xi^i = dx^k \nabla_k \xi^i + \theta^\alpha \nabla_\alpha \xi^i ,$$

$$D\xi^\alpha = dx^k \nabla_k \xi^\alpha + \theta^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha .$$

Здесь величины

$$\nabla_k \xi^i = \Gamma^i_{pk} \xi^p + \overset{\Gamma}{\partial}_k \xi^i , \quad \nabla_\alpha \xi^i = C^i_{p\alpha} \xi^p + \overset{\Gamma}{\partial}_\alpha \xi^i ,$$

$$\nabla_k \xi^\alpha = \Gamma^\alpha_{\beta k} \xi^\beta + \overset{\Gamma}{\partial}_k \xi^\alpha , \quad \nabla_\beta \xi^\alpha = C^\alpha_{\gamma\beta} \xi^\gamma + \overset{\Gamma}{\partial}_\beta \xi^\alpha$$

являются тензорами. Графовые производные определены выражениями

$$\overset{\Gamma}{\partial}_i = \partial_i - \Gamma^\alpha_i \partial_\alpha , \quad \overset{\Gamma}{\partial}_\alpha = \partial_\alpha .$$

Инвариантный дифференциал тензоров более высокого ранга выразится через дифференциальные формы

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k + C^i_{j\alpha} \theta^\alpha ,$$

$$\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta k} dx^k + C^\alpha_{\beta\gamma} \theta^\gamma .$$

Будем описывать электромагнитное поле ковариантными и контрвариантными тензорами второго ранга H^2 и F_2. Пусть их горизонтальные и вертикальные компоненты равны соответственно $(H^{ik}, H^{\alpha\beta})$, $(F_{im}, F_{\alpha\beta})$. Примем предположение, что законы в вертикальной и горизонтальной части расслоенного многообразия аналогичны четырехмерным. Тогда получим систему

$$\nabla_k \tilde{H}^{ik}(x,y) = \tilde{s}^i(x,y), \quad \nabla_{[l} F_{mn]}(x,y) = 0, \quad \tilde{H}^{ik} = Y_0 \tilde{\Lambda} \chi^{ikmn} F_{mn} ,$$

$$\nabla_\beta \tilde{H}^{\alpha\beta}(x,y) = \tilde{s}^\alpha(x,y), \quad \nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]}(x,y) = 0, \quad \tilde{H}^{\alpha\beta} = Y_1 \tilde{\Lambda}_1 \chi^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} .$$

Для того чтобы извлечь из нее физические следствия, нужен ряд дополнительных предположений о структуре расслоенного многообразия.

6. Аналог поля Голдстоуча в электродинамике сред

Используем терминологию и концепцию спонтанного нарушения глобальной симметрии, заключающуюся в том, что необходимо различать симметрию уравнений динамики поля и его основного или вакуумного состояния. Наиболее просто это обнаруживается на следующем примере. Пусть задан лагранжиан скалярной теории комплексного поля

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi).$$

Пусть решением уравнений поля, отвечающим наинизшей энергии, соответствует минимальное значение потенциала V и решение

$$\phi_0 = \mathrm{const} \neq 0.$$

Выполним в лагранжиане и в решении фазовый сдвиг. При этом обнаружится явная неинвариантность ненулевого решения, так как

$$\phi_0' = U\phi_0 = \exp(-i\alpha)\phi_0.$$

Лагранжиан поля, а поэтому и динамические уравнения не изменятся.

Стремление согласовать симметрии позволило Голдстоуну /39/ так дополнить потенциал теории, что, наряду с массовым полем, которое было вначале, появляется еще безмассовая бесспиновая частица. Посредством унитарной калибровки она может быть устранена и поэтому часто рассматривается как фиктивная, своего рода расчетный прием, позволяющий учесть возможность бесконечного вырождения основного состояния. Замечено, что, если наинизшее состояние ненулевое, это может соответствовать наличию массы у безмассового объекта /40/.

Концепцию голдстоуновского поля как гравитона впервые выдвинул Иваненко Д.Д. /41/, полагая, что его индуцирует нарушение лоренцевской симметрии из-за искривления пространства-времени. Эта идея возрождена в 70-е годы в связи с использованием нелинейных представлений групп как наиболее подходящего аппарата для описания спонтанного нарушения симметрии /42-44/. Позднее было показано /45/, что метрическое гравитационное поле образуют нелинейные представления группы $GL(4,R)$. В ряде работ, в частности в /46/, гравитационное поле трактовалось как голдстоуновское на основе изоморфизма пространства псевдоримановых билинейных форм в R^4 и некоторого фактор-пространства $GL(4,R)/H$. С позицией геометрической формулировки гравитации как калибровочной теории и подробным анализом полей Голстоуна и Хиггса можно познакомиться по работам /47,48/. В них установлены следующие важные факты. Во-первых, калибровочная теория на группе $GL(4,R)$ оказывается достаточно широкой и допускает, в частности, возможность других, отличных от метрики Минковского, метрик. Во-вторых, доказано, что необходимым и достаточным условием существования глобального расслоения является редукция структурной группы $GL(4,R)$ касательного расслоения $T(E)$ к группе Лоренца $H=SO(3,1)$. В-третьих, обосновано инвариантное разбиение четырех величин на пространственные и временные, базирующееся на выделении в группе Лоренца компактной подгруппы $SO(3)$.

Обратимся теперь к той ситуации, которую имеем в электродинамике движущегося разреженного газа /2/. Оставим пока без внимания зависимость <u>отношения</u> от координат и времени. Тогда приходим к стандартной ситуации спонтанного нарушения глобальной симметрии. Действительно, дифференциальные уравнения не содержат отношения, по этой причине оно не может войти в лагранжиан теории. Решения же полной системы уравнений существенно зависят от w, в том числе меняется и их симметрия. Поскольку величина w может принимать непрерывный ряд значений, состояние системы следует считать бесконечно вырожденным. С другой стороны, задавая поведение электромагнитного поля в разреженном газе без учета w, описываем состояния с показателем преломления, который практически остается постоянным. Учет w как новой физической характеристики позволяет "снять вырождение" и, по существу добиться того, что достигается в квантовой теории поля введением бозона Голдстоуна. Понятно, что различным фиксированным значениям отношения соответствуют различные метрики, изоморфные метрике Минковского. Так проявляет себя аналог унитарной калибровки. Отношение "включает" взаимодействие поля со средой, и потому физически оно проявляется подобно некоторому потенциалу квантовой теории.

Принципиально **н о в ы м** является здесь установление связи отношения - аналога поля Голдстоуна в электродинамике сред - с показателем преломления $w = 1 - \exp[-P_0(n-1)]$.

7. Аналог поля Хиггса в электродинамике сред

Физические поля, которые обычно связывают с именем Хиггса/49/, реализуют спонтанное нарушение локальной симметрии. Они предназначены прежде всего для согласования локальной симметрии уравнений поля и их основных состояний, однако нашли большое применение в физике потому, что с их помощью оказалось возможным простыми средствами "вводить" в теорию частицы, обладающие массой. Именно этот механизм "рождения массы" в сочетании с теорией перенормировок и методами групп позволил теоретически обосновать и подтвердить экспериментально синтез теории электромагнитных и слабых взаимодействий в рамках калибровочного подхода /50-52/. Другим физическим примером осуществления хиггсовского механизма является сверхпроводимость. В этом случае лагранжиан теории инвариантен относительно локальных фазовых сдвигов поля электрона, но основное состояние неинвариантно относительно их из-за конденсации куперовских пар электронов. Поэтому "фотон приобретает массу внутри сверхпроводника" /53/. Не вдаваясь в детали аппарата и анализа тонкостей, остановим внимание только на одном элементе схемы Хиггса: он ведет к замене частных производных в лагранжиане теории на обобщенные, ковариантные и в определенном смысле может поэтому рассматриваться как альтернативный стандартной теории калибровочных полей способ минимального учета взаимодействия исследуемого поля с некоторым внешним. Обращаясь к использованному ранее лагранжиану, в случае спонтанного нарушения локальной симметрии получим

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F^{ik} F_{ik} + D^{\mu}\phi^{*} D_{\mu}\phi - V(\phi^{*}\phi),$$

$$D^{\mu}\phi = (\partial^{\mu} + ie A^{\mu})\phi,$$

$$V(\phi^{*}\phi) = \lambda(\phi^{*}\phi - \phi_0)^2, \quad \phi_0 \neq 0.$$

Известно, что хиггсовский механизм сохраняет перенормировку теории и позволяет получить частицы с ненулевой массой и единичным спином. Компонента спина 0 исключается калибровочным условием $\partial_{\kappa} A^{\kappa} = 0$.

Обратимся теперь к электродинамике сред с учетом отношения. Анализ, выполненный в /2/, показал, что изменение W , рассматриваемое для электромагнитного поля как внешний фактор, может учитываться в теории посредством удлинения производных, так что

$$\left(\partial_k + \frac{\partial w}{\partial x^k}\right)\tilde{H}^{ik} = \tilde{S}^i .$$

В материальных уравнениях электродинамики таких слагаемых нет, и поэтому они в некотором смысле отличаются от дифференциальных. Используя только это обстоятельство, попытаемся интерпретировать векторное поле $\partial w/\partial x^k$ как поле, аналогичное хиггсовскому.

Обратимся к работе В.Дречслера /54/. В ней представлена калибровочная теория на редуктивном расслоенном многообразии, базой которого является пространство Римана-Картана, структурной группой - $SO(4,1)$. Выберем в качестве слоя многообразие $F = E^R(V_4', S)$. Тогда

$$E = E\left(U_4, F = E^R(V_4', S), G = SO(4,1)\right).$$

Здесь использованы обозначения $S = H/K$, $V_4' = G/H$. Пусть K является подгруппой $H = SO(3,1)$, содержащейся в $G = SO(4,1)$.

Поскольку $\dim U_4 = \dim V_4'$, отождествим касательное пространство к подпространству V_4' в точке $\xi = \xi^0$ с локальным касательным пространством T_x многообразия U_4 в точке x посредством изоморфизма, что возможно /55/. Точка ξ^0, которая является началом в V_4', пусть будет точкой контакта между базовым пространством и слоем в $x \in U_4$. Для целей теории представлений введем скалярную функцию

$$\Phi(x; \xi, \tilde{y}).$$

(здесь x - координаты базового пространства, $\xi \in V_4'$, $\tilde{y} \in S$). Ее следует рассматривать как сечение используемого нами расслоенного многообразия.

Для задания связности удобно перейти к главному расслоению

$$P\left(U_4, F = G = SO(4,1)\right).$$

Известно, что группа де-Ситтера десятипараметрическая, поэтому связность задается набором десяти I-форм:

$$\omega^R_{ab} = -\omega^R_{ba} = \Gamma^R_{\mu ab}\, dx^\mu .$$

Величины $\Gamma^R_{\mu ab}$ задают 40 калибровочных потенциалов, называемых коэффициентами вращения Ситтера, а dx^μ - кобазис в T^*_x.

Используем матрицы представления алгебры Ли группы Ситтера. Они задаются антисимметричными матрицами размерности 5x5 и имеют коммутационные соотношения

$$i\left[R_{ab}, R_{cd}\right] = \eta_{ac}R_{bd} + \eta_{bd}R_{ac} - \eta_{ad}R_{bc} - \eta_{bc}R_{ad}.$$

Здесь метрический тензор 5-мерного пространства задан выражением

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1,-1).$$

Элементы матриц имеют вид

$$(R_{ab})^c_d = -i(\eta_{ad}\delta^c_b - \eta_{bd}\delta^c_a).$$

Получим

$$\omega^R = -\frac{i}{2}\omega^R_{ab}R^{ab} = \begin{pmatrix} \hat{\omega}^R & \hat{\theta} \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{\omega}^R$ - лоренцевские матрицы размерности 4x4 с матричными элементами $(\omega^R)^i_k$, θ - вектор-столбец I-форм, θ^T - соответствующий ему транспонированный. Такое представление матрицы приводит к редуктивному разложению алгебры Ли группы де-Ситтера

$$\tilde{g} = m \oplus \eta,$$

где m - алгебра, соответствующая подгруппе Лоренца, η -алгебра бустов Ситтера. Указанное разложение позволяет параметризовать любой элемент алгебры в виде

$$A = A(b,\Lambda) = A(b)A(\Lambda).$$

Величины Λ задают вращения в группе Лоренца, b - бусты. Поэтому калибровочные поля преобразуются по закону

$$\omega'^R = A\omega^R A^{-1} - A\,dA^{-1}$$

с использованием зависимости $A = A(b(x), \Lambda(x))$.

При изменении сечения скалярные поля трансформируются так:

$$\Phi'(x;\xi,\tilde{y}) = \Phi(x;A^{-1}\xi, \tilde{h}^{-1}(\Lambda(b',b))\tilde{y}).$$

При определении ковариантной производной для $\Phi(x;\xi,\tilde{y})$ найдем $SO(4,1)$ - Ли-алгеброзначную I-форму, действующую на $\Phi(x;\xi,\tilde{y})$.

Она имеет вид

$$\Gamma^{R} = dx^{\mu}\Gamma^{R}_{\mu} = dx^{\mu}\left(\frac{1}{2}\Gamma^{R}_{\mu ik}\widetilde{M}^{ik} + \Gamma^{R}_{\mu 5 i}\widetilde{M}^{5i}\right).$$

Для входящих сюда слагаемых получены следующие выражения /54/:

$$\widetilde{M}_{ab} = \widetilde{L}_{ab} + \widetilde{S}_{ab}, \quad \widetilde{S}_{5i} = [1/(1+\widetilde{Y})]\, b^{k}\widetilde{S}_{ki},$$

$$\widetilde{S}_{ik} = -(\widetilde{R}_{ik})^{n}_{m}\widetilde{y}^{m}\frac{\partial}{\partial\widetilde{y}^{n}}, \quad \widetilde{L}_{ab} = i\left(\xi_{a}\frac{\partial}{\partial\xi^{b}} - \xi_{b}\frac{\partial}{\partial\xi^{a}}\right).$$

Ковариантная производная определится так:

$$D_{\mu}\Phi(x;\xi,\widetilde{y}) = (\partial_{\mu} + i\Gamma^{R}_{\mu})\,\Phi(x;\xi,\widetilde{y}).$$

В редуктивном пространстве связность может быть разложена на слагаемые, относящиеся только к подмногообразию по H и к многообразию по G/H. Тогда

$$\Gamma^{R} = \overset{(H)}{\Gamma}{}^{R} + \overset{(G/H)}{\Gamma}{}^{R}.$$

Если отдельно рассмотреть вращения по параметру $\hat{\omega}^{i}_{5}$, то

$$U_{g(t)} = \exp(i\hat{\omega}^{i}_{5}\hat{L}_{5i}).$$

Тогда имеем

$$\overset{(G/H)}{\Gamma}{}^{R} = (\theta^{i} + \hat{\nabla}\hat{\omega}^{5i})\, iR\frac{\partial}{\partial\xi^{i}}\Big|^{\xi=\xi^{0}}.$$

В случае спонтанного нарушения симметрии вкладом $\overset{(G/H)}{\Gamma}{}^{R}$ в динамику следует пренебречь. Если это так, то

$$\theta^{i} = \hat{\nabla}\hat{\omega}^{i}_{5} = d\hat{\omega}^{i}_{5} + \omega^{ki}_{\ \ k}\hat{\omega}^{k}_{5}, \quad d = dx^{\mu}\partial_{\mu}.$$

Так установлена связь компонент связности расслоенного многообразия, индуцированного структурой уравнений электродинамики, с набором параметров, характеризующих буст Ситтера. На этом пути можно провести необходимое обобщение теории полей Хиггса. Поскольку в рассматриваемом случае другие аналогичные параметры нам неизвестны, будем считать, что градиент отношения является необходимым аналогом поля Хиггса в электродинамике сред. Иное направление исследования, связанное с размерностной редукцией калибровочных теорий, изложено в работах /56 - 59/.

Каждая точка $\xi \in U_4'$ может быть получена из $\overset{0}{\xi}$ посредством буста Ситтера согласно связи $\xi = A(b)\overset{0}{\xi}$ с компонентами

$$\xi^a = [A(b)]^a_b \overset{0}{\xi}{}^b .$$

Взаимосвязь $\hat{\omega}^i_5$ и b

$$[A(b)]^a_b = [\exp(i\hat{\omega}^j_5 R_{5j})]^a_b = \begin{bmatrix} \delta^i_k + \dfrac{b^i b_k}{1+\bar{\gamma}} , & -b^i \\ & \\ -b_k , & \bar{\gamma} \end{bmatrix}$$

содержит величины

$$\bar{\gamma} = |b^5| = \sqrt{1 + b^i b_j}, \; \varepsilon = \operatorname{sign} b^5, \; b^i = \hat{\omega}^i_5 \frac{\sinh Q}{Q}, \; Q = (\hat{\omega}^j_5 \omega_{5j})^{1/2}.$$

Рассмотрим, следуя работе /2/, зависимость массы тяготения фотона от отношения w и массы инерции $m_{ин}$

$$m_т = w m_{ин} = w \hbar \omega_0 / c^2 .$$

Изменение w ведет, аналогично механизму рождения массы Швингера /40/, к поляризации фотонов, превращению их в гравитационный диполь. Регулятором динамики такого процесса, как и должно быть, являются поля Хиггса. Трансформация массы обусловлена изменением инерции свободного электромагнитного поля, кинематическая характеристика которого выражена через скорости источника и среды:

$$\vec{u} = (1-w)\vec{u}_{ист} + w\vec{u}_{ср} .$$

По-видимому, аналоги полей Хиггса, обнаруженные в электродинамике сред, образуют механизм учета изменения инерции поля , если установить эквивалентность $\partial w / \partial x^k$ и $\hat{\omega}_{5k}$. Это означает, что аналоги полей Хиггса связаны с параметрами бустов Ситтера. Последние само - стоятельны и задают новые степени свободы физической системы. Анализ показал, что они связаны с инерционными свойствами поля. Про - должение исследований в этом направлении актуально для теории поля. Вероятно, на этом направлении удастся уточнить механизм поляризационного образования массы тяготения.

6. Краткие сведения о неассоциативных алгебрах

Линейная конечномерная алгебра, в которой не выполняется закон ассоциативности умножения, называется неассоциативной. Ее анализ имеет самостоятельное математическое значение, так как часто она задает касательные пространства к лупам и квазигруппам, являющимся обобщением понятия группы. Так, группа - это лупа, в которой выполняется ассоциативность умножения элементов. В монографиях В.Д.Белоусова /60/ и М.А. Акивиса /61/ можно найти изложение широкого спектра вопросов.

В настоящее время выяснены многие аспекты как математических конструкций, так и возможных физических приложений теории неассоциативных алгебр. Наиболее детальный анализ применений в физике изложен в /62,63/. Отметим некоторые его направления. Так,в /64/ постулировано, что множество симметрий пространства Галилея-Ньютона образует лупу, которая является продолжением группы Галилея в смысле Эйленберга-Маклейна /65/. Намбу предложил обобщение классической механики, в которой появляется возможность использования неассоциативных алгебр, отличных от алгебр Ли /66/.Алгебра Мальцева как шестимерная алгебра цвета с группой автоморфизмов $SU(3)$ использована в /67/.Была выдвинута гипотеза о роли ассоциативности в концепции фундаментальной длины /68/, а также о том, что неассоциативности соответствует ненаблюдаемость /69/. Имеются также работы в квантовой теории поля и ядерной физике. Однако сейчас пока нельзя сказать, что неассоциативные алгебры, теория квазигрупп и луп стали настольным рабочим аппаратом теоретиков.

Значительное количество математических работ отражено в обзорах и монографиях.В настоящее время в этой области получено много серьезных результатов. Не будем ни в коей мере проводить их анализ. Выделим только несколько результатов, которые будут частично использоваться в дальнейшем тексте. Прежде всего отметим, что наиболее хорошо изучены лупы с незначительным нарушением ассоциативности, в частности л у п а М у ф а н г, подробный анализ которой с выводом обобщенных структурных уравнений для группы Ли дан в /70/.Аналитическая группа Муфанг является аффинным симметрическим пространством, группа которого порождается левыми и правыми сдвигами лупы /71/, более того, в окрестности точки аффинной связности всегда можно естественным образом ввести операцию умножения, по отношению к которой эта окрестность становится геодезической лупой /72/. Известно, что в окрестности единицы произвольной лупы можно задать тройную систему - W -алгебру /73/. Представляют интерес разнообразные связи : касательное пространство к лупе Муфанг есть неассоциативная алгебра Мальцева.

Самостоятельное значение имеет неассоциативная алгебра в теории пространств, названных П.К. Рашевским редуктивными. На таком пространстве задана инвариантная связность с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения. Множество их описал К.Номидзу /73/. Позднее было установлено, что тройные системы Ли являются касательными алгебрами редуктивных однородных пространств /75/. Они обобщают соотношения, известные для алгебр Ли, и потому представляют физический интерес, так как расширяют возможности анализа ситуаций. Д.В. Сабининым доказана эквивалентность категории однородных пространства и луп /76/.

Нам понадобится в дальнейшем общая тройная система Ли. Это касательная алгебра редуктивного однородного пространства T_ℓ , в котором определены две операции : билинейная (x,y) и трилинейная $[x,y,z]$. При этом выполняются соотношения

$$(x,y) = -(y,x),$$

$$[x,y,z] = -[y,x,z],$$

$$[x,y,z] + [y,z,x] + [z,x,y] +$$

$$+((x,y),z) + ((y,z),x) + ((z,x),y) = 0,$$

$$[(x,y),z,w] + [(y,z),x,w] + [(z,x),y,w] = 0,$$

$$[x,y(z,w)] = ([x,y,z],w) + (z,[x,y,z]).$$

Если

$$[x,y,z] = (x,(y,z)) - (y,(x,z)) + ((x,y),z),$$

то получаем алгебру Мальцева.

9. О некоторых приложениях теории неассоциативных алгебр

Выделение внутренней и внешней симметрии уравнений электродинамики позволило нам связать риманово пространство постоянной кривизны со специальными материальными уравнениями, задающими соотношение между полями и индукциями. В этом случае индуцируется расслоенное многообразие, слой в котором представляет собой однородное пространство, например G/H или $E^R(G/H, H/K, \dots)$. В обоих случаях группа движений многообразия переводит одну его точку в некоторую другую. Очевидно, что среди всех возможных движений найдется и такое, которое описывает поведение электромагнитного поля для определенных начальных и граничных условий. Понятно, что изменение параметров при движении по лучу будет регулироваться некоторой инвариантной связностью. Из физических соображений следует, что некоторые движения поля описываются на основе группы изометрий данного многообразия. Из дифференциальной геометрии известно, что изометрические движения могут быть получены посредством геодезического отражения относительно середины отрезка, соединяющего начальную и конечную точку пути. С другой стороны, как показано М.А. Акивисом /77/, в пространстве аффинной связности, которым мы ограничимся, преобразование геодезической симметрии задается лупой преобразований. Три связности, которыми исчерпываются, как доказано Э. Картаном /78/, способы параллельного переноса вектора в групповом многообразии, имеют одну систему геодезических. Элемент a группы связан с элементами u, v, w однопараметрическим семейством /77/

$$wa^{-1} = (va^{-1})^{\alpha}(ua^{-1})(va^{-1})^{1-\alpha}.$$

Трем способам переноса соответствуют значения параметров

$$\alpha = 0,\ 1,\ 1/2.$$

Тензоры кривизны и кручения связности выразятся через структурные постоянные группы движений $SO(4,1)$ равенствами

$$R^{i}_{jk} = \frac{1}{2}(1-2\alpha)C^{i}_{jk},$$

$$R^i_{jkl} = \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\, c^i_{jm}\, c^m_{lk}\,.$$

Параметр α , равный нулю и единице,задает связность, полученную движением в виде правого и левого сдвига на группе: параметр, равный I/2,фиксирует лупу. Так устанавливается связь изометрических движений на группе де-Ситтера и геодезической лупы преобразований.

Запишем ассоциатор для рассматриваемого случая. Согласно /77/,

$$(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\,[\xi,[\zeta,\eta]]\,.$$

Отсюда следует вывод: поведение электромагнитного поля, соответствующее изометрическому движению в римановом пространстве постоянной кривизны, описывается неассоциативной алгеброй и связностью с ненулевой кривизной.

Воспользуемся теперь условием, что алгебра группы де-Ситтера допускает редуктивное разложение. Представим ее в виде прямой суммы некоторой алгебры и билинейной формы

$$K = H \otimes B(H,H)\,.$$

Пусть

$$X = x + \sum_t P(a_i, b_i)\,,\quad Y = y + \sum_t P(u_i, v_i)\,,$$

где

$$x, y, a_i, b_i, u_i, v_i \in H\,.$$

Определим умножение в K следующими равенствами /79/:

$$[x,y] = (x,y) + \frac{1}{6}h(x,y)\,,$$

$$[h(x;y),z] = -[z,h(x;y)] = \frac{1}{6}[x,y,z]\,,$$

$$[h(x;g),h(z;w)] = \frac{1}{6}h([x,y,u];v) + \frac{1}{6}h(u;[x,y,v])\,.$$

Тогда имеем

$$[X,Y] = [x + \sum_t P(a_i,b_i),\; y + \sum_t P(u_i,v_i)]\,.$$

Так реализуется тройная система Ли в виде подпространства алгебры Ли , так как

$$[X,Y]=-[Y,X],$$

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0.$$

Приходим к выводу, что класс физических решений выходит за рамки алгебры Ли, потому что в электродинамике движущихся сред содержатся касательные алгебры редуктивных однородных пространств, образующих слой в расслоенном пространстве-времени, а следовательно, и тройные системы Ли.

Рассмотрим простой пример, показывающий связь неассоциативности алгебр с проблемой сравнения значений физических величин, измеренных различными наблюдателями. Используем пространственно-временные преобразования, оставляющие форминвариантной систему полевых уравнений электродинамики при фиксированном значении отношения $w/2$:

$$x'=\frac{x-vt}{(1-v^2w/c^2)^{1/2}},\ y'=y,\ z'=z,\ t'=\frac{t-xvw/c^2}{(1-v^2w/c^2)^{1/2}}.$$

Здесь v - скорость движения системы координат. Обычное умножение преобразований с различными значениями w выводит нас за пределы указанной реализации. Однако, если это необходимо по физическим соображениям, реализацию можно сохранить, изменив умножение элементов. Примем правило, согласно которому для двух перемножаемых элементов сначала производится замена

$$(w_i+w_j)/2\Rightarrow w_{ij},$$

а затем стандартное умножение. Приходим при этом к такому произведению преобразований, когда не имеет места ассоциативность

$$x'''\circ(x''\circ x')\neq(x'''\circ x'')\circ x'.$$

Общий вывод: выделение в электродинамике внешней и внутренней симметрии и использование моделей расслоенных многообразий со слоем - однородным редуктивным пространством - расширяет приложения геометрии.

10. К теории калибровочных полей в среде

Современная теория калибровочных полей построена аналогично электродинамике вакуума: величины определяются однотензорным полем, отсутствуют материальные уравнения для среды и комплексы, содержащие скорость источника. Формально обобщим эту теорию, используя анализ, выполненный в электродинамике сред. Введем пару

$$\left(F^{a}_{mn}, \tilde{H}^{ik}_{a} \right),$$

которую назовем спектральной компонентой калибровочного поля. Используем ковариантные производные

$$\nabla_k B = \partial_k + [A_k, B].$$

По аналогии с электродинамикой используем систему уравнений

$$\nabla_{[k} F^{a}_{mn]} = 0, \quad \nabla_k \tilde{H}^{ik}_{a} = \tilde{j}^{i}_{a},$$

$$\tilde{H}^{ik}_{b} = \delta_{ba} Y_0 \tilde{\Lambda} \chi^{ikmn} F^{a}_{mn}.$$

В случае, когда принята указанная связь полей и индукций, имеем спектральную аналогию с уравнениями Максвелла. В более общей ситуации компоненты полей свяжем законом

$$\tilde{H}^{ik}_{b} = \varkappa^{a}_{bc} \tilde{\chi}^{ikmn}_{a} F^{c}_{mn}.$$

Необходимо отметить:

- как для указанного случая, так и для электродинамики сред было бы желательно найти обобщение вариационного формализма Лагранжа, из которого естественно следовали бы как дифференциальные уравнения, так и взаимосвязи между полями и индукциями;
- по-видимому, физические поля тензорно дополняют друг друга; так, ковариантный тензор сосуществует в паре с контрвариантным;
- представляет интерес задача распространения калибровочных полей в среде с дисперсией;
- было бы интересно выяснить аналоги отношения, используемого в электродинамике, применительно к теории калибровочных полей, а также проанализировать вопросы измечения инерции.

Заключение

В данной работе, при незначительном описании расчетных методов и алгоритмов, установлена связь феноменологической электродинамики движущихся сред с современными физическими и математическими моделями. Это позволяет использовать их методы для решения задач распространения излучения в сложных средах. Определены основные направления дальнейшего анализа:

- уточнение соотношения внутренних и внешних симметрий в электродинамике, проведение алгебраической классификации внутренних симметрий и индуцируемых ими калибровочных полей;
- доведение до уровня приложений моделей расслоенного пространства-времени и метода размерностного расширения, выяснение их топологических аспектов;
- поиск точных решений системы нелинейных уравнений электродинамики, разработка численных методов и программ для различных начальных и граничных условий;
- применение теории луп, тройных систем Ли, неассоциативных алгебр для нахождения и классификации решений в задачах распространения излучения в сложных средах.

Выполнение намеченной работы может оказаться полезным не только в электродинамике. Поэтому необходимо систематическое применение в электродинамике сред методов дифференциальной геометрии и теории представлений, использование средств и методов дифференциальной топологии, теории луп и квазигрупп, формирование методологической и аксиоматической основы для конструктивного решения возникающих проблем.

Здесь нужны согласованные коллективные усилия как физиков, так и математиков, равно как и продуманная программа дальнейших работ.

Л и т е р а т у р а

1. Барыкин В.Н. Особенности распространения излучения в разреженных газовых потоках // Проблемы тепло- и массообмена.- Минск,1986. - С.67-68. -(Сб.науч.тр./ ИТМО АН БССР) .
2. Барыкин В.Н. К электродинамике движущегося разреженного газа. - Минск,1988. -56 с. -(Препринт / ИТМО АН БССР, № 16).
3. Барыкин В.Н. Связь пространственно-временных симметрий и условий измерения в электродинамике. - Минск,1985. -(Препринт / ИТМО АН БССР , № 4) .
4. Барыкин В.Н. Некоторые аспекты электродинамики движущихся сред. - Минск,1987. - 35 с. -(Препринт / ИТМО АН БССР, № 21).
5. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков.-М.:Наука,1965.-456 с.
6. Схоутен Я.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. - М.: Наука, 1956. - 320 с.
7. Post E.J. Formal Structure of Electromagnetics. - Amsterdam: Holland , 1962. - 204 p.
8. Weyl H. Raum , Zeit , Materie. - N.Y.: Springer,1921. - 320 S.
9. Kottler F. Maxwellische Gleihungen und Metric // Sitzungsberichte AK Wien 2 a. - 1922. - Bd.131. - S.119 - 146.
10. Cartan A// Annales de l'Ecole Normale Superiere.-1924 , N 1,2.
11. Danzig D. The fundamental equations of electrodynamics , independent of metrical geometry // Proceedings Cambridge Philosophycal Society. - 1934. - V. 30. - P.421 - 427.
12. Дешам Ж.А. Электродинамика и дифференциальные формы // ТИИЭР. - 1981. - Т.69, № 6. - С.5 - 28 .
13. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. - М.: Наука,1985. - 280 с.
14. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла.- Киев: Наукова думка, 1985 . - 300 с.
15. Котельников Г.А. Группа Галилея в исследовании симметрийных свойств уравнений Максвелла // Теоретико-групповые методы в физике. - М.: Наука , 1986. - Т.2. - С.466 - 494.
16. Levy-Leblond J.M. Nonrelativistic Particles and Wave Equations // Comm. Math. Phys. - 1967. - V.6. - P.286 - 311.
17. Барыкин В.Н. К вопросу о галилеевски инвариантной формулировке электродинамики // ВесцI АН БССР. Сер.фIз.-мат.навук. - 1982.

-№ 2. - С.110 - 114.
18. Барыкин В.Н. К электродинамике инерциально движущихся сред. - Минск, 1982. - 56 с. - (Препринт / ИТМО АН БССР. № 1).
19. Фущич В.И., Цифра И.М. Конформно-инвариантные нелинейные уравнения для электромагнитного поля // Теоретико-групповые методы в физике. - М.: Наука, 1986. - Т.2. - С. 501 - 505.
20. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. - М.: Изд-во иностр.лит., 1947. - 280 с.
21. Паули В. Теория относительности. -М.: Наука, 1983. - 336 с.
22. Post E.J. The constitutive map and some of its ramification // Annals of Physics. - 1972. - V.71. - P.497 - 518.
23. Kibble T.W.B. Lorentz Invariance and Gravitational Field//Journal of Mathematical Physics. - 1961.-V.2,N.2.- P.212 - 221.
24. Finkelstein D. Internal Structure of Spinning Particle // Physical Review. - 1955. - V.100, N.3. - P.924 - 931.
25. Yang C.N., Mills R.L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance // Phys.Rev.-1954.-V.96,N.1.-P.191 - 195.
26. Вайнберг С. Идейные основы единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий// УФН. -1980. - Т.132,вып.2. -С.201-217.
27. Глешоу Ш. На пути к объединенной теории - нити в гобелене // УФН. - 1980. - Т.132, вып. 2.- С.219 - 228.
28. Салам А. Калибровочное объединение фундаментальных сил // УФН. - 1980. - Т.132, вып.2. - С.229 - 253.
29. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. - М.: Физматгиз, 1961. - 464 с.
30. Вайнберг С. Гравитация и космология. - М.: Мир, 1975. - 696 с.
31. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. - М.: Наука, 1979. - 760 с.
32. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. -М.: Наука. - Т.1. - 344 с.
33. Барыкин В.Н. К электродинамике в расслоенном пространстве-времени. - Минск, 1986. - 44 с. - (Препринт / ИТМО АН БССР, № 2).
34. Барыкин В.Н. К электродинамике движущихся сред // Проблемы механики магнитных жидкостей. - Минск, 1981. - С.131 - 140. - (Сб. науч. тр. / ИТМО АН БССР).
35. Forgacs P., Manton N.S. Space-time symmetries in Gauge Theories // Comm. Math. Phys. - 1980.- V.72, N.1. - P. 15 - 34.
36. Гарут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения.

- М.: Мир , 1980. - Т.I , 2.
37. Мэнский М.Б. Группа путей. Измерения, поля, частицы. - М.: Наука , 1983. - 319 с.
38. Близникас В.И. К теории кривизны пространства опорных элементов // Лит. мат. сб. - 1965. - Т.5,№ I. - С. 9 -22.
39. Goldstone J. Field Theories With"Superconductor" Solutions//Nuovo Cimento. - 1961. - V.19 , N.1. - P.154 - 164.
40. Schwinger J. Gauge invariance and Mass // Phys. Rev. - 1962. - V.128 , N.5. - P.2425 - 2429.
41. Ivanenco D. Physics, Logic and History. - N.Y.,1970. - 105 p.
42. Coleman S., Wess J., Zumino B. Structure of Phenomenological Lagrangians // Phys. Rev.- 1969.- V.177.-P.2239 - 2250.
43. Carlitz R., Kislinger M. Pegge Amplitude Arising from SU(6) Vortices // Phys. Rev. - 1970. - D2. - P.336 - 342.
44. Isham C., Salam A., Strathdee J. Nonlinear Realization of Space-time Symmetry. Scalar and Tensor Gravity // Ann. of Phys. - 1971. - V.62. - P.98 - 108.
45. Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В. О спинорах в теории тяготения // ЖЭТФ. - 1965. - Т.48. - С.1625 - 1635.
46. Ne'eman Y., Sijacki D. Unified affine Gauge Theory Finite and Infinite GL(4,R) Spinor Field for Gravity and Streng Interaction // Ann.of Phys. - 1979. - V.120. - P.292 - 298.
47. Иваненко Д.Д., Сарданашвили Г. Принципы относительности и эквивалентности в калибровочной теории гравитации // Изв.вузов. Физика. - 1981.- № 6. - С.79 - 82.
48. Trautman A. The geometry of gauge fields // Czech. J.Phys. - 1979.- V.B29. - P.107 - 116.
49. Englert F., Brout R. Broken symmetry and the mass of gauge vector meson // Phys.Rev.Lett.-1964. -V.13,N.2. - P.321 - 323.
50. Weinberg S. Effect of a Neutral Intermediate Boson in semileptonic Processes // Phys.Rev. - 1972.- V.5. - P.1412 - 1417.
51. Glashow S.L.. Harvard Univ. Thesis. - 1958. - 75 p.
52. Salam A. On a Gauge Theory of Elementary Interactions. - 1961. - V. 19, N.1. - P.165 - 170.
53. Хуанг К. Кварки, лептоны и калибровочные поля. - М.: Мир, 1985.
54. Drechsler W. Linearly and nonlinearly transforming fields on homogeneous spaces of the (4,1)-de-Sitter group // J. Math.Phys. - 1985. -V.26, N.1. - P.41 - 53.

55. Kobayashi S. Isometric imbedding of compact symmetric spaces // Tôhoku Math.J. - 1968. - V.20. - P.21 - 25.
56. Волобуев И.П. Лагранжианы для вращательно-симметричных калибровочных полей в пространстве произвольной размерности // ТМФ. - 1982. - Т.50, № 2. - С.240 - 250.
57. Волобуев И.П., Рудольф Г. Геометрический подход к размерной редукции симметричных калибровочных полей // ТМФ . - 1985. - Т. 62, № 3. - С. 388-398.
58. Волобуев И.П., Кубышин Ю.А. Потенциалы Хиггса как наследие высших размерностей пространства-времени // ТМФ. - 1986. - Т.68, № 2. - С.225 - 235.
59. Волобуев И.П., Кубышин Ю.А., Моурео Ж.М. Симметрические пространства и модели Хиггса в методе размерной редукции // ТМФ. - 1989. - Т.78 , № 1. - С.58 - 68.
60. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. - М.: Наука,1967.
61. Акивис М.А. Введение в теорию 3-тканей. - Калинин: Калининский ун-т, 1985. - 250 с.
62. Лыхмус Я., Соргсепп Л. Неассоциативные алгебры в физике.-Тарту, 1985. - (Препринт Ф-24 // АН ЭССР).
63. Лыхмус Я., Соргсепп Л. Неассоциативные алгебры в физике.-Тарту, 1985. - 40 с. - (Препринт Ф-25 // АН ЭССР).
64. Whiston G.S. Associative and non-associative automorphisms of Newtonian Space-Time // Int.J.Theor.Phys. - V.6. - P.78 - 89.
65. Eilenberg S., Maclane S. Algebraic cohomology groups and loops // Duke Math.J. - 1947. - V.14,N.2. - P.435 - 463.
66. Nambu Y. Generalized Hamiltonian Dynamics // Phys. Rev. - 1973. - D7. - P.2405 - 2412.
67. Gunaydin M. Scola Norn. Sup. Pisa.-Preprint 5/75. - 1975.
68. Jordan P. Uber das Verhaltnis der Theorie der Elementarlange zur Quantentheorie // Comm. Math. Phys.- 1968. - V. 9. - P.279-289.
69. Birkhoff G., Neumann J. // Ann.of Math.- 1936.- V.37. - P. 823.
70. Паал Э.Н. Введение в Муфанг-симметрию. -Тарту, 1987. - 60 с. - (Препринт Ф-42 // АН ЭССР).
71. Сабинин Л.В. О геометрии луп // Мат.заметки. - 197. . - Т.1 ,№ 5.
72. Kikkawa M. On local loops in affine manifolds // J. Sci. Hiroshima Univ. - 1964. - V.28. - P.199 - 207.
73. Акивис М.А. О локальных алгебрах // Сиб.мат.журн.-1976.-Т. 17.

№ 2. – С. 5-II.
74. Nomizy K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer.J. Math. - 1954. - V.76, N 1. - P.33 - 65.
75. Sagle A. On algebras of totally geodesic spaces (Lie triple system) // Journal of the Sci. Hiroshimie Univ. Ser.A.-1958. - V.21, N 3. - P.107 - 113.
76. Сабинин Л.В. К эквивалентности категории луп и однородных пространств // Докл. АН СССР. - I972. - Т.205, № 3. -С.533 - 536.
77. Акивис М.А. О геодезических лупах и локальных тройных системах пространства аффинной связности // Сиб. мат. журн. - I978. - Т.I9, № 2. - С. 243-254.
78. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства.-М.: Изд-во иностр. лит. - I949.
79. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. - М.: Наука. - I98I. - Т.2. - 344 с.

Виктор Николаевич Барыкин

К НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СРЕД

Препринт № 16

Редактор Т.Г. Михалева. Худ. редактор С.И. Сауляк.
Техн.редактор В.Д. Перепелкина. Корректор В.И. Царькова.

Подписано в печать 20.06.89. АТ 08844.
Формат 60x84 1/16. Бумага типогр. № 2. Офсетная печать.
Усл.печ.л. 2,7. Усл. кр.-отт. 2,8. Уч.-изд.л. 3,0.
Тираж 200 экз. Заказ 228. Бесплатно.

Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова АН БССР.
220728, Минск, ГСП, П. Бровки, 15

Отпечатано на ротапринте Института тепло- и массообмена им. А.В.Лыкова АН БССР. 220728, Минск, ГСП, П.Бровки, 15