Академия наук БССР
Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова

В.Н. Барыкин

СВЯЗЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СИММЕТРИЙ И УСЛОВИЙ ИЗМЕРЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Препринт № 4

Минск 1985

УДК 530.145;530.12

Предложена модель измерений в электродинамике, учитывающая их квантово-механические особенности. Установлена связь условий измерения и пространственно-временных симметрий через нормированное скалярное поле, входящее в материальные уравнения электродинамики.

...Самая возможность наблюдения предполагает наличие определенных физических условий, которые могут оказаться связанными с сущностью явления.

В.А. Фок

Введение

Исходным пунктом и центральным звеном предлагаемой работы являются новые точные пространственно-временные симметрии в электродинамике инерциально движущихся изотропных в системе покоя сред. Анализ показал, что указанные симметрии можно связать с условиями измерения в электродинамике. Обсуждение структуры и аспектов такой связи составляет содержание работы.

Отметим некоторые этапы поиска пространственно-временных симметрий в электродинамике движущихся сред. Г.А. Лоренц [I] нашел линейные пространственно-временные преобразования, названные позднее преобразованиями Лоренца, относительно которых инвариантны уравнения электродинамики Максвелла в вакууме. А.Пуанкаре [2] показал, что эти преобразования образуют группу. А.Эйнштейн [3] ввел представление об относительности одновременности, что привело к новым понятиям о пространстве и времени и позволило согласовать теорию с экспериментом. Г.Минковский [4] построил четырехмерную метрическую модель пространства-времени, в котором группа Лоренца сохраняет интервал. Используя закон преобразования электромагнитного поля в среде относительно преобразований Лоренца, он получил [5] ковариантные материальные уравнения для инерциально движущейся изотропной в системе покоя среды. Позднее рядом авторов была предложена аффинно-инвариантная форма уравнений электродинамики (необходимые ссылки см.в [6]) .Следующий этап связан с задачей исследования вклада материальных уравнений в структуру симметрийных свойств уравнений электродинамики,сформулированной в [7] . Если материальные уравнения известны,вопрос о нахождении группы симметрии решается либо методом Ли,либо на основе обобщения этого метода [8] ,позволяющего находить и негеометрические симметрии. Новые пространственно-временные симметрии могут найти применение при построении единой теории поля,а также в теории оптимальных взаимодействий [9] .

В данной работе новые пространственно-временные симметрии получены из обобщения материальных уравнений для покоящейся изотропной среды в случае их инерциального движения.Анализ показал, что они определены с точностью до скалярной функции,с помощью которой можно учесть квантово-механические условия измерения в электродинамике,а также найти их выражение в специальной теории относительности,где указанные условия завуалированы и формулируются неявно.

Представленный материал состоит из разделов.

Глава I:

- показано,что тензор Тамма-Мандельштама для инерциально движущейся изотропной в системе покоя среды определяется по материальным уравнениям в покоящейся среде с точностью до скалярной функции;
- введение четырехмерной метрики g_{ab} необходимо для записи дифференциальных и материальных уравнений электродинамики через одни и те же дифференциальные формы;
- существует простой алгоритм нахождения группы инвариантности полевых уравнений электродинамики через алгебру дифференциальных операторов,зависящих от четырехметрики;
- обьединение различных пространственно-временных симметрий в электродинамике инерциально движущихся изотропных в системе покоя сред описывается локальной группой Лоренца с матричнозначными параметрами.

Глава II:

- проанализированы условия измерения,построена на аксиоматической основе модель измерения в электродинамике движу -

щихся сред, центральным звеном которой является концепция отношения;

- введены понятия инерции и источника свободного электромагнитного поля;
- доказан операторный смысл пространственно-временных преобразований в электродинамике;
- установлены границы применимости принципа постоянства скорости света в электродинамике вакуума и дана его новая формулировка.

Глава Ш:

- рассмотрена галилеевски-инвариантная электродинамика вакуума;
- проанализированы структура и функции принципа относительности в электродинамике инерциально движущихся сред;
- дан пример конкретного использования концепции отношения в граничных задачах электродинамики.

ГЛАВА I

НОВЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СИММЕТРИИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

I. О неоднозначности тензора Тамма-Мандельштама в электродинамике инерциально движущихся изотропных в системе покоя сред

Тензор Тамма-Мандельштама $\varepsilon^{ikmn} = \Omega^{im}\Omega^{kn}$, с помощью которого записываются материальные уравнения лоренц-инвариантной электродинамики

$$H^{ik} = \varepsilon^{ikmn} F_{mn} \qquad (1)$$

для изотропных инерциально движущихся сред имеет вид

$$\Omega^{im} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[\eta^{im} + (\varepsilon\mu - 1)u^i u^m\right]. \qquad (2)$$

Входящие в Ω^{im} величины определены соотношениями $u^i = dx^i/d\eta$, $d\eta^2 = \eta_{im}dx^i dx^m$. Тензор η^{im} в галилеевских координатах

$$x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z,\ x^0 = ict$$

имеет вид $\eta^{im} = diag\,(1,1,1,1)$,а тензор η_{im} определен выражением $\eta^{im}\eta_{mj} = \delta^i_j$.Тензоры F_{mn} и H^{ik} таковы:

$$F_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{10} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{20} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{30} \\ F_{01} & F_{02} & F_{03} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

$$H^{ik} = H^{ik}(-\vec{H}, \vec{D}) \ . \qquad (4)$$

Если среда покоится,из уравнений (I) имеем

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \ , \ \vec{B} = \mu\vec{H} \ . \qquad (5)$$

Покажем,что по уравнениям в покоящейся среде (5) тензор Тамма-Мандельштама в инерциально движущейся среде определяется с точностью до скалярной функции.Постулируем существование тензора $\theta^{im} \neq \eta^{im}$ и рассмотрим случай алгебраической зависимости Ω^{im} от θ^{im} и четырехскоростей $u^i = dx^i/d\theta$, где $\theta_{ik}\theta^{kj} = \delta^j_i$, $d\theta^2 = \theta_{ik}dx^i dx^k$, ε , μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно.Имеем

$$\Omega^{im} = \alpha\left(\theta^{im} + \beta u^i u^m\right), \qquad (6)$$

где α , β - скалярные функции.Определим α , β , θ^{im} ,используя условия (6) и (I) .Условие $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ накладывает ограничения на Ω^{im} :

$$\Omega^{11}\Omega^{21} = A_1 \ , \ \Omega^{22}\Omega^{12} = B_1 \ , \ \Omega^{20}\Omega^{10} = C_1 \ , \ \Omega^{23}\Omega^{13} = D_1 \ ,$$
$$\Omega^{11}\Omega^{22} - \Omega^{21}\Omega^{12} = M \neq 0 \ , \ \Omega^{21}\Omega^{13} - \Omega^{23}\Omega^{11} = 0,$$
$$\Omega^{21}\Omega^{10} - \Omega^{20}\Omega^{11} = 0 \ , \ \Omega^{22}\Omega^{10} - \Omega^{20}\Omega^{12} = 0,$$
$$\Omega^{22}\Omega^{13} - \Omega^{23}\Omega^{12} = 0 \ , \ \Omega^{23}\Omega^{10} - \Omega^{20}\Omega^{13} = 0,$$

$$\Omega^{11}\Omega^{31} = A_2 \ , \ \Omega^{12}\Omega^{32} = B_2 \ , \ \Omega^{10}\Omega^{30} = C_2 \ , \ \Omega^{13}\Omega^{33} = D_2 \ ,$$

$$\Omega^{11}\Omega^{32}-\Omega^{12}\Omega^{31}=0 \quad , \quad \Omega^{11}\Omega^{22}-\Omega^{13}\Omega^{31}=M\neq 0 \ ,$$
$$\Omega^{11}\Omega^{30}-\Omega^{10}\Omega^{31}=0 \quad , \quad \Omega^{12}\Omega^{30}-\Omega^{10}\Omega^{32}=0 \ ,$$
$$\Omega^{12}\Omega^{33}-\Omega^{13}\Omega^{32}=0 \quad , \quad \Omega^{13}\Omega^{30}-\Omega^{10}\Omega^{33}=0 \ ,$$

$$\Omega^{21}\Omega^{31}=A_3 \ , \Omega^{22}\Omega^{32}=B_2 \ , \Omega^{20}\Omega^{30}=C_3 \ , \Omega^{23}\Omega^{33}=D_3 \ ,$$
$$\Omega^{21}\Omega^{32}-\Omega^{22}\Omega^{31}=0 \quad , \quad \Omega^{21}\Omega^{33}-\Omega^{23}\Omega^{31}=0 \ ,$$
$$\Omega^{21}\Omega^{30}-\Omega^{20}\Omega^{31}=0 \quad , \quad \Omega^{22}\Omega^{30}-\Omega^{20}\Omega^{32}=0 \ ,$$
$$\Omega^{22}\Omega^{33}-\Omega^{23}\Omega^{32}=M\neq 0 \quad , \quad \Omega^{23}\Omega^{30}-\Omega^{20}\Omega^{33}=0 \ .$$

Нетрудно доказать,что диагональные члены Ω^{ii} не могут обра - щаться в нуль.Учитывая это,имеем условия

$$\Omega^{11}\Omega^{22}=\Omega^{22}\Omega^{33}=\Omega^{11}\Omega^{33}=M\neq 0 \ .$$

Из них следует,что

$$\Omega^{11}=\Omega^{22}=\Omega^{33}=\sqrt{M} \ .$$

Используя связи других компонент тензора и условие $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$,получим

$$\Omega^{01}=\Omega^{02}=\Omega^{03}=0 \ , \ \Omega^{00}=R(x,y,z,t) \ .$$

Тензор θ^{ij} определится функциями

$$\theta^{11}=\theta^{22}=\theta^{33}=A(x,y,z,t)\,,\theta^{00}=B(x,y,z,t)\,,\ \theta^{ij}=0\,,\ i\neq j \ .$$

Следовательно, $\alpha = 1/\sqrt{\mu}A$.Поскольку $u^0 = \sqrt{B}$,из равенства $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ находим

$$\beta=(\varepsilon\mu A/B)-1 \ .$$

Обозначим

$$B(x,y,z,t)/A(x,y,z,t)=w \ .$$

Тензор Ω^{im} в явном виде запишется так:

$$\Omega^{im}=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[g^{im}+\left(\frac{\varepsilon\mu}{w}-1\right)u^iu^m\right], \qquad (7)$$

где $g^{im} = diag(1,1,1,w)$,а четырехскорости определены по dg , т.е. $dg^2 = g_{im}dx^i dx^m$. Заметим, что (7) не имеет особенностей при $w = 0$, так как $u^i \sim \sqrt{w}$.

Тензор Тамма-Мандельштама в электродинамике инерциально движущихся изотропных в системе покоя сред определяется по материальным уравнениям в покоящейся среде с точностью до скалярной функции w ,физический смысл которой необходимо выяснить.

Заметим, что принятие алгебраической зависимости тензора Ω^{im} от θ^{im}, u^i , u^m ведет к ограничению возможных вариантов выбора материальных уравнений и было обусловлено лишь соображениями простоты. Найдем тензор, обратный Ω^{im} ,т.е. потребуем, чтобы $\Omega_{im}\Omega^{mj} = \delta_i^j$. Ищем его в виде $\Omega_{in} = \sqrt{\mu}(\theta_{in} + f(\overset{*}{\varkappa})u_i u_n)$. Тогда

$$\Omega_{in} = \sqrt{\mu}\left(\theta_{in} - u_i u_n \overset{*}{\varkappa}/1 + \overset{*}{\varkappa}\right),$$

где $\overset{*}{\varkappa} = \frac{\varepsilon\mu}{w} - 1$. С целью обобщения удобно записать материальные уравнения через тензор четвертого ранга

$$\tau^{ikmn} = 0{,}5\left(\Omega^{im}\Omega^{kn} - \Omega^{in}\Omega^{km}\right). \qquad (8)$$

Симметрийные свойства тензора (8) таковы:

$$\tau^{ikmn} = -\tau^{iknm} = -\tau^{kimn}.$$

Связь полей и индукций имеет вид

$$F_{mn} = \tau_{mnik}H^{ik}, \qquad (9)$$

где τ_{mnik} - тензор кривизны пространства постоянной кривизны с метрическим тензором Ω_{im}. Естественно предположить, что в случае, когда наряду с метрикой Ω_{im} задана связность компонентами Γ^i_{km} ,материальные уравнения приобретут вид:

$$F_{mn} = (\tau_{mnik} + R_{mnik})H^{ik},$$

где

$$R_{mnik} = \Omega_{mp}R^p_{nik},$$

$$R^p_{nik} = \partial_k\Gamma^p_{ni} - \partial_i\Gamma^p_{nk} + \Gamma^p_{\tau k}\Gamma^\tau_{ni} - \Gamma^p_{\tau i}\Gamma^\tau_{nk}.$$

2. Электродинамика и дифференциальные формы

Рассмотрим в $R^3 \times T$ тензор F_{mn}. Поставим ему в соответствие дифференциальную 2-форму

$$\beta = \sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta ,$$

где

$$dx^1 = dx \ , dx^2 = dy \ , dx^3 = dz \ , dx^4 = icdt \ .$$

Вычислим внешнюю производную

$$d\beta = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x^1} + \frac{\partial B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial B_z}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x^1} - \frac{\partial E_x}{\partial x^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge cdt +$$

$$+ \left(\frac{\partial E_z}{\partial x^1} - \frac{\partial E_x}{\partial x^3} - \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}\right) dx^1 \wedge dx^3 \wedge cdt + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial E_y}{\partial x^3} + \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}\right) dx^2 \wedge dx^3 \wedge cdt .$$

Если потребовать, чтобы $d\beta = 0$, получим первую пару уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \ , \ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .$$

Они могут быть записаны также в виде $\partial_{[k} F_{mn]} = 0$, в чем легко убедиться подстановкой. Используем оператор Ходжа в трехмерном пространстве $\circledast$. Пусть

$$B = B_x dx^1 + B_y dx^2 + B_z dx^3 \quad , \ E = E_x dx^1 + E_y dx^2 + E_z dx^3 .$$

Тогда $\beta = E \wedge cdt + \circledast B$. Введем 2-форму $\delta = -H \wedge cdt + \circledast D$ и 3-форму $\Omega = \circledast J \wedge dt - \rho\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Потребуем, чтобы $d\delta + 4\pi\Omega = 0$. Получим вторую пару уравнений Максвелла

$$\partial_k H^{ik} = 4\pi I^i / c .$$

Следовательно, для вывода дифференциальных уравнений Максвелла для среды нет необходимости использовать четырехмерную метрику.

Рассмотрим материальные уравнения (I)′. В векторном виде они запишутся следующим образом [10] :

$$\vec{D} + \omega\left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{H}\right] = \epsilon\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right]\right) ,$$

$$\vec{B} + w\left[\vec{E}, \frac{\vec{u}}{c}\right] = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D}, \frac{\vec{u}}{c}\right]\right). \qquad (10)$$

Введем векторные поля

$$\vec{uH} = \left\{\left(\frac{u_y}{c}H_z - \frac{u_z}{c}H_y\right), \left(\frac{u_z}{c}H_x - \frac{u_x}{c}H_z\right), \left(\frac{u_x}{c}H_y - \frac{u_y}{c}H_x\right)\right\},$$

$$\vec{Du} = \left\{\left(D_y\frac{u_z}{c} - D_z\frac{u_y}{c}\right), \left(D_z\frac{u_x}{c} - D_x\frac{u_z}{c}\right), \left(D_x\frac{u_y}{c} - D_y\frac{u_x}{c}\right)\right\}.$$

Материальные уравнения в 2-формах имеют вид $\circledast\gamma = 0$, $\circledast\sigma = 0$. Полная система полевых уравнений выглядит таким образом:

$$d\beta = 0\ , \ d\delta + 4\pi\Omega = 0\ , \ \circledast\gamma = 0\ , \ \circledast\sigma = 0\ ,$$

где

$$\beta = E\wedge cdt + \circledast B\ , \quad \delta = -H\wedge cdt + \circledast D\ ,$$

$$\gamma = D + wuH - \varepsilon(E + uB)\ , \quad \sigma = B + wEu - \mu(H + Du).$$

Величины $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{u}$ представляют собой векторные поля на R^3, зависящие от времени. Символом uH обозначены 1-формы, получающиеся из вектора, компоненты которого определяются векторным произведением $\vec{u}$ и $\vec{H}$. Важно, что для записи полной системы уравнений поля также нет необходимости привлекать четырехметрику.

<u>Четырехметрика необходима для записи дифференциальных и материальных уравнений через одни и те же формы.</u>

Докажем это утверждение. Выразим 1-формы B, E через 2-форму β. Имеем

$$\beta = E_x dx^1\wedge cdt + E_y dx^2\wedge cdt + E_z dx^3\wedge cdt +$$
$$B_x dx^2\wedge dx^3 + B_y dx^3\wedge dx^1 + B_z dx^1\wedge dx^3.$$

Зададим четырехметрику Минковского и используем оператор Ходжа в четырехмерном пространстве $*$. Получим

$$* dx^1\wedge icdt = dx^2\wedge dx^3 \ldots\ dx^2\wedge dx^3 = -dx^1\wedge cdt\ .$$

Отсюда

$$*\beta = -i\circledast E - B\wedge cdt\ .$$

Умножим внешним образом формы β и $*\beta$ на cdt:

$$\beta\wedge cdt = B_x dx^2\wedge dx^3\wedge cdt + B_y dx^3\wedge dx^1\wedge cdt + B_z dx^1\wedge dx^2\wedge cdt\,,$$

$$*\beta\wedge cdt = -iE_x dx^2\wedge dx^3\wedge cdt - iE_y dx^3\wedge dx^1\wedge cdt - iE_z dx^1\wedge dx^2\wedge cdt\,.$$

Тогда

$$*(\beta\wedge cdt) = -B\,,\quad *(*\beta\wedge cdt) = iE\,,$$

так как

$$*\,dx^2\wedge dx^3\wedge icdt = idx^1\ \ldots$$

Имеем аналогично

$$*(\beta_1\wedge cdt) = -Bu\,,\quad *(*\beta_1\wedge cdt) = iEu\,.$$

Материальные уравнения (10) запишутся через формы $\delta,\beta,\delta_1,\beta_1$:

$$*\{[(\delta - w*\delta_1) - \varepsilon*\beta - \varepsilon\beta_1]\wedge cdt\} = 0\,,$$

$$*\{[(\beta + w*\beta_1) - \mu*\delta - \mu\delta_1]\wedge cdt\} = 0\,. \qquad (11)$$

Выражения (11) имеют вид алгебраических связей, построенных по формам β, δ и их обобщениям с помощью векторов, линейно зависящих от безразмерной скорости u/c. Алгебраические связи задаются следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
\delta \arrow[dr] & \beta \arrow[r] & \delta_1 \arrow[dr] & \beta_1 \\
*\delta \arrow[ur] & *\beta \arrow[r] & *\delta_1 \arrow[ur] & *\beta_1
\end{tikzcd}$$

коэффициенты которой, равно как и последующие члены, нужно находить из дополнительных условий.

3. Матричная запись уравнений Максвелла и их симметрийные свойства

Объединим компоненты электромагнитного поля в 16-рядный столбец

$$\Psi = \text{столбец}\,(E_x,E_y,E_z,B_x,B_y,B_z,D_x,D_y,D_z,H_x,H_y,H_z,A_x,A_y,A_z,\varphi)\,.$$

Зададим в координатах $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ дифференциальные операторы $p_a = -i\,\partial/\partial x^a$. Введем матрицы

$$\gamma^0 = i\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&\tilde{0} \\ 0&0&0&0&0&\tilde{0} \\ 0&0&0&0&I&\tilde{0} \\ 0&0&0&0&0&\tilde{0} \\ 0&0&-I&0&0&\tilde{0} \\ \tilde{0}^+&\tilde{0}^+&\tilde{0}^+&\tilde{0}^+&\tilde{0}^+&0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^a = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&\tilde{0} \\ 0&0&0&0&0&\tilde{0} \\ 0&0&0&0&0&\tilde{\lambda}_a \\ 0&0&0&0&-S_a&\tilde{0} \\ 0&0&0&S_a&0&\tilde{0} \\ \tilde{0}^+&\tilde{0}^+&\tilde{\lambda}_a^+&\tilde{0}^+&\tilde{0}^+&\tilde{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&\tilde{0} \\ 0&0&0&0&0&\tilde{0} \\ I&0&0&0&0&\tilde{0} \\ 0&-I&0&0&0&\tilde{0} \\ 0&0&0&0&0&\tilde{0} \\ \tilde{0}^+&\tilde{0}^+&\tilde{0}^+&\tilde{0}^+&\tilde{0}^+&\tilde{0} \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \tilde{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix},$$

0 – нулевая матрица 3×3 , $(0 \quad 0 \quad 0) = \tilde{0}^+$,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&-i \\ 0&i&0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0&0&i \\ 0&0&0 \\ -i&0&0 \end{pmatrix}, \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0&-i&0 \\ i&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы γ^a удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^a\gamma^b\gamma^c + \gamma^c\gamma^b\gamma^a = \delta^{ab}\gamma^c + \delta^{bc}\gamma^a .$$

Дифференциальные уравнения Максвелла запишутся в виде

$$(\gamma^a p_a - \gamma)\Psi = 0 .$$

Уравнения (10) представим так:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon I & -\frac{\varepsilon}{c}S_a u^a & -I & \frac{w}{c}S_a u^a & 0 & 0 \\ \frac{w}{c}S_a u^a & I & -\mu I & -\frac{\mu}{c}S_a u^a & 0 & 0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \Psi = 0.$$

Запишем дифференциальные и материальные уравнения в виде единого матричного равенства

$$M\Psi = 0 .$$

$$\begin{pmatrix}
\varepsilon & 0 & 0 & 0 & -\beta_z & \beta_y & -1 & 0 & 0 & 0 & w\beta_z & -w\beta_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \varepsilon & 0 & \beta_z & 0 & -\beta_x & 0 & -1 & 0 & -w\beta_z & 0 & w\beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \varepsilon & -\beta_y & \beta_x & 0 & 0 & 0 & -1 & w\beta_y & -w\beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & w\beta_z & -w\beta_y & 1 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & -\beta_x & \beta_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-w\beta_z & 0 & w\beta_x & 0 & 1 & 0 & 0 & -\mu & 0 & \beta_z & 0 & -\beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\
w\beta_y & -w\beta_x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\mu & -\beta_y & \beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_t & 0 & 0 & \partial_x \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_t & 0 & \partial_y \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_t & \partial_z \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_z & \partial_y & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_z & 0 & -\partial_x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_x & \partial_y & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_t & 0 & 0 & 0 & \partial_z & -\partial_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_t & 0 & -\partial_z & 0 & \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_t & \partial_y & -\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \Psi = 0. \quad (12$$

где $\partial_t = \partial/\partial ct$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$. Исследование инвариантности системы уравнений (12) ,согласно [9] ,сводится к решению уравнений вида $[MQ] = 0$, где Q - оператор, определенный на множестве решений уравнений (12) . Для пространственно-временной симметрии общий линейный дифференциальный оператор имеет вид

$$Q = B(\vec{x},t) + C(\vec{x},t)\partial/\partial t + D^b(\vec{x},t)\,\partial/\partial x^b ,$$

где в нашем случае $B(\vec{x},t)$, $C(\vec{x},t)$, $D^b(\vec{x},t)$ - матрицы 16x16. Зная алгебру операторов,с помощью метода Кэмпбела-Хаусдорфа можно установить группу инвариантности системы уравнений.

Используем более простой метод,позволяющий найти группу инвариантности полной системы полевых уравнений электродинамики (12) для фиксированного параметра w .Он является развитием результатов работы [10] .В ней показано,что уравнения (12) для фиксированного w инвариантны относительно пространственно-временных преобразований,сохраняющих интервал с метрикой g_{ab} , используемой при четырехмерной записи материальных уравнений электродинамики.Примем этот результат за отправную точку анализа пространственно-временных симметрий. Покажем, что существуют дифференциальные операторы первого порядка, зависящие от g_{ab} и образующие алгебру. Определим

$$L_{ab}=g_{ac}x^{c}\partial/\partial x^{b}-g_{bc}x^{c}\partial/\partial x^{a}.$$

Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_{ab},L_{cd}]=-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac}+g_{ad}L_{bc}.$$

Непосредственная проверка доказывает выполнение тождеств Якоби

$$[L_i[L_jL_k]]+[L_j[L_kL_i]]+[L_k[L_iL_j]]=0,$$

откуда следует выражение для структурных констант алгебры. Базис алгебры образуют матрицы

$$M_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{01}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1/w\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_{02}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1/w\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad M_{03}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1/w\\0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad (13)$$

Обозначим базисные элементы группы Лоренца $I_s=M_s\,(w=1)$. Заметим, что произвольная алгебра, соответствующая фиксированному значению w, получается умножением I_s на матрицу

$$D(w)=\mathrm{diag}(1,1,1,1/w).$$

Определим инфинитезимальное преобразование

$$x'_{\mu}=\left(I+I_sD(w)\omega^{s}\right)^{\nu}_{\mu}x_{\nu}. \qquad (14)$$

Выражение (14) задает преобразование Лоренца с матричнозначными параметрами $D(w)\,\omega^{k}$. Обозначим индексы
$[12]=1,\ [13]=2,\ [23]=3,\ [10]=4,\ [20]=5,\ [30]=6.$
Структурные постоянные используем для нахождения метрики Киллинга согласно определению $g_{ls}=C^{i}_{lk}\cdot C^{k}_{si}$. Получим

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-4, \qquad g_{44}=g_{55}=g_{66}=-4/w.$$

К аналогичным результатам мы придем, если рассмотрим тензор

$$g_{ab,cd} = \mathrm{const}\,(g_{ad}g_{bc} - g_{ac}g_{bd}).$$

Заметим, что метрика Киллинга выражается через метрику g_{ab} аналогично тому, как связь полей и индукций выражается через метрику Ω_{ij}.

Покажем, что из (I4) следуют преобразования

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 w/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xvw/c^2}{\sqrt{1 - v^2 w/c^2}}. \qquad (15)$$

Относительно этих преобразований, как показано в [10], инвариантны уравнения (I2). Для $\omega^{[10]}$ имеем

$$x_1' = x_1 - \omega^{[10]} x_0 / w, \quad x_0' = x_0 + \omega^{[10]} x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3.$$

Пусть $\omega^{[10]} = \sqrt{w}\,\theta$, где θ - некоторый угол. Тогда

$$x_1' = x_1 \cos\theta + (x_0 \sin\theta)/\sqrt{w}, \quad x_0' = -x_1 \sqrt{w} \sin\theta + x_0 \cos\theta. \qquad (16)$$

Рассматривая (I6) как преобразования систем координат, движущихся относительно друг друга со скоростью v, получим

$$x_1 \cos\theta + (t/\sqrt{w})\, ic \sin\theta = 0.$$

Отсюда имеем

$$\mathrm{tg}\,\varphi = i\frac{v}{c}\sqrt{w}, \quad \mathrm{ch}\,\alpha = 1/\sqrt{1 - wv^2/c^2},$$

$$\mathrm{sh}\,\alpha = (\sqrt{w}\,v/c)/\sqrt{1 - wv^2/c^2}. \qquad (17)$$

Подставим (I7) в (I6). Утверждение доказано. Проведем "объединение" алгебр, соответствующих различным значениям w. Рассмотрим два инфинитезимальных преобразования (I4). Пусть

$$g_1 = I + I_s \Omega^s(1), \quad g_2 = I + I_s \Omega^s(2).$$

Закон композиции

$$g_3 = g_1 \cdot g_2 \simeq I + I_s (\Omega^s(1) + \Omega^s(2))$$

определяет локальную группу Лоренца с матричнозначными параметрами.

4. К вопросу о функции Грина в электродинамике

Получим функцию Грина для уравнений электродинамики, содержащих фиксированный параметр ϖ. Введем, как обычно, вместо полей $\vec{E}$, $\vec{B}$ векторный $\vec{A}$ и скалярный φ потенциалы. Используем уравнения электродинамики (12). Получим уравнения для потенциалов

$$\left\{\left(\Delta-\frac{\varpi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\varkappa\Gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\nabla\right)^2\right\}\vec{A}=-\frac{4\pi\mu}{c}\left\{\vec{j}+\frac{\varkappa\Gamma^2}{\varpi+\varkappa}\frac{\vec{u}}{c^2}\left(\varpi\vec{u}\vec{j}-c^2\rho\right)\right\},$$

$$\left\{\left(\Delta-\frac{\varpi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\varkappa\Gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\nabla\right)^2\right\}\varphi=-\frac{4\pi\mu}{c\varpi}\left\{c\rho+\frac{\varkappa\Gamma^2}{\varpi+\varkappa}\frac{1}{c}\left(\varpi\vec{u}\vec{j}-c^2\rho\right)\right\},$$

где $\varkappa=\varepsilon\mu-\varpi$, $\Gamma^2=\left(1-\beta^2\varpi\right)^{-1}$ (при $\varpi=0$ особенности нет).
Условие калибровки имеет вид

$$\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{\varpi}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\frac{\varkappa\Gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\nabla\right)\left(\vec{u}\vec{A}-c\varphi\right)=0.$$

Найдем функцию Грина уравнений (12) в движущейся среде, не обладающей дисперсией, в цилиндрической системе координат, полагая, что ось z направлена по скорости $\vec{u}$. Следуя [11], имеем

$$G_0(\vec{r},t)=8\pi^2\mu\int\frac{J_0(\kappa_\rho,\rho)\exp[i(\kappa_z z-\omega t)]\kappa_\rho d\kappa_\rho d\kappa_z d\omega}{\kappa_\rho^2+\dfrac{\varpi^2\beta^2-\varepsilon\mu}{1-\varpi\frac{u^2}{c^2}}\dfrac{\omega^2}{c^2}+2\dfrac{\varepsilon\mu-\varpi}{1-\varpi\frac{u^2}{c^2}}\beta\dfrac{\omega}{c}\kappa_z+\dfrac{1-\varepsilon\mu\beta^2}{1-\varpi\frac{u^2}{c^2}}\kappa_z^2},$$

где $J_0(\kappa_\rho,\rho)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.
Проведем интегрирование по κ_ρ, воспользовавшись известной формулой

$$\int_0^\infty J_0(\kappa_\rho,\rho)\kappa_\rho d\kappa_\rho/\kappa_\rho^2+a^2=K_0(a\rho),$$

где $K_0(a\rho)$ - функция Магдональьда. Имеем

$$G_0(\vec{r},t)=8\pi^2\mu\int K_0\left(\Gamma\rho\sqrt{\left(\varpi^2\beta^2-\varepsilon\mu\right)\frac{\omega^2}{c^2}+2\left(\varepsilon\mu-\varpi\right)\beta\frac{\omega}{c}\kappa_z+\left(1-\varepsilon\mu\beta^2\right)\kappa_z^2}\right)$$

$$\times\exp\left[i(\kappa_z z-\omega t)\right]d\kappa_z d\omega.$$

Введем новую переменную

$$\omega'=\omega-\frac{\varepsilon\mu-\varpi}{\varepsilon\mu-\varpi^2\beta^2}\beta c\kappa_z$$

и заменим функцию Магдональда функцией Ганкеля $H_0^{(1)}$,используя их взаимосвязь. Учтем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_z\xi} H_0^{(1)}\left(r\sqrt{\alpha^2-k_z^2}\right) dk_z = -2i\,\frac{\exp\left(i\alpha\sqrt{r^2+\xi^2}\right)}{\sqrt{r^2+\xi^2}}.$$

Проинтегрируем $G_0(\vec{r},t)$ по k_z :

$$G_0(\vec{r},t)=8\pi^3\mu\left[\rho^2\frac{\varepsilon\mu(1-w\beta^2)}{\varepsilon\mu-\beta^2w^2}+\left(z-\frac{\varepsilon\mu-w}{\varepsilon\mu-\beta^2w^2}ut\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\exp\left\{-i\omega'\left[t-\frac{(\varepsilon\mu-\beta^2w^2)c^{-1}}{(1-w\beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\rho^2\frac{\varepsilon\mu(1-w\beta^2)}{\varepsilon\mu-\beta^2w^2}+\left(z-\frac{\varepsilon\mu-w}{\varepsilon\mu-\beta^2w^2}ut\right)^2}\right]\right\};$$

а затем по ω' . Окончательное выражение для функции Грина имеет вид

$$G_0(\vec{r},t)=16\pi^4\mu\left(r^2+\xi^2\right)^{-1/2}\delta\left(t-\frac{1}{c}\frac{\varepsilon\mu-\beta^2w^2}{(1-w\beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{r^2+\xi^2}\right). \qquad (18)$$

Проанализируем (18). При $\beta=0$ имеем функцию Грина для покоящейся среды без дисперсии

$$G_0(\vec{r},t)\big|_{u=0}=16\pi^4\mu/R\;\delta\left(t-R\sqrt{\varepsilon\mu}/c\right),$$

где $R=\sqrt{\rho^2+z^2}$ - расстояние от источника до точки наблюдения. Функция Грина отлична от нуля на поверхности, уравнением которой в каждый фиксированный момент времени является

$$t=\frac{1}{c}\frac{\varepsilon\mu-\beta^2w^2}{(1-w\beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\rho^2\frac{\varepsilon\mu(1-w\beta^2)}{\varepsilon\mu-\beta^2w^2}+\left(z-\frac{\varepsilon\mu-w}{\varepsilon\mu-\beta^2w^2}ut\right)^2}.$$

Это эллипсоид вращения, ось симметрии которого совпадает со скоростью движения среды. Положение центра определится соотношением

$$z_0=\frac{ut(\varepsilon\mu-w)}{\varepsilon\mu-\beta^2w^2}.$$

Следовательно, центр поверхности, на которой функция Грина отлична от нуля, перемещается со скоростью

$$u_0=u\,(\varepsilon\mu-w)\,/\,(\varepsilon\mu-\beta^2w^2). \qquad (19)$$

Полуоси эллипса равны

$$a=ct\sqrt{\frac{1-w\beta^2}{\varepsilon\mu-\beta^2w^2}},\quad b=ct\,\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\,(1-w\beta^2)}{\varepsilon\mu-\beta^2w^2}. \qquad (20)$$

5. Двухтензорность как общее свойство электромагнитного поля

Электромагнитное поле в среде традиционно рассматривается как двухтензорное. Поля $\vec{E}$, $\vec{B}$ объединены в тензор F_{mn}, поля $\vec{H}$, $\vec{D}$ - в тензор H^{ik}. Их связь между собой задается тензором четвертого ранга, имеющим для изотропной инерциально движущейся среды вид

$$H^{ik}=\tau^{ikmn}F_{mn}\ , \tag{21}$$

где

$$\tau^{ikmn}=\Omega^{im}\Omega^{kn}\ ,\quad \Omega^{im}=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[\eta^{im}+(\varepsilon\mu-1)u^i u^m\right],$$

$$\eta^{im}=\mathrm{diag}(1,1,1,1)\ ,\quad u^k=dx^k/d\eta\ .$$

В вакууме взаимосвязь полей и индукций, установленная для покоящихся источников

$$\vec{H}=\vec{B}\ ;\ \vec{D}=\vec{E} \tag{22}$$

считается справедливой в общем случае. Условие (22) будет выполнено при связи полей и индукций через тензор Минковского

$$H^{ik}=\eta^{im}\eta^{kn}F_{mn}\ . \tag{23}$$

Согласно (23), электромагнитное поле в вакууме в многообразии Минковского является однотензорным. Покажем, что и в вакууме электромагнитное поле следует рассматривать как двухтензорное.

Заметим, что соотношения (23) являются частным случаем (21), так как при $\varepsilon\mu=1$ "выпадают" входящие во взаимосвязь полей и индукций конвективные члены. Общая взаимосвязь типа (21), которая при $\vec{u}=0$ дает уравнения (22), определена с точностью до скалярной функции w и в вакууме имеет вид

$$\hat{\Omega}^{im}=\theta^{im}+\left(\frac{1}{w}-1\right)u^i u^m\ , \tag{24}$$

где $\theta^{im}=\mathrm{diag}(1,1,1,w)$ определяет локальную четырехметрику общего вида, как будет показано в следующем разделе. Выражение (24) не имеет особенностей при $w=0$, так как $u^k\sim\sqrt{w}$. Использование (24) расширяет симметрийные свойства уравнений электродинамики вакуума и в частном случае $w=0$ дает электродинамику, ковариантную относительно группы Галилея. Приведенные соображения обосновывают с формальной точки зрения возможность описания электромагнитного поля в вакууме как двухтензорного.

Покажем,что представление о двухтензорности электромагнитного поля в вакууме не вступает в противоречие с теорией поляризации и намагниченности среды. В электродинамике сплошных сред

$$\vec{D}=\vec{E}+\vec{P}\ ,\quad \vec{H}=\vec{B}-\vec{M}\ , \tag{25}$$

где $\vec{M}$, $\vec{P}$ - векторы намагничения и поляризации среды. Подставим (25) в уравнения Максвелла для среды:

$$\operatorname{div}\vec{D}=\rho_0\ ,\quad \operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\frac{1}{c}\vec{j}_0\ , \tag{26}$$

$$\operatorname{div}\vec{B}=0\ ,\quad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ . \tag{27}$$

Получим из (26)

$$\operatorname{div}\vec{E}+\operatorname{div}\vec{P}=\rho_0\ ,$$

$$\operatorname{rot}\vec{B}-\operatorname{rot}\vec{M}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\frac{1}{c}\vec{j}_0\ .$$

Введем плотности индуцированного заряда и тока

$$\operatorname{div}\vec{P}=\rho\ ,\quad \vec{j}=-\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}-c\operatorname{rot}\vec{M}\ .$$

Получим систему уравнений вакуумного вида

$$\operatorname{div}\vec{E}=\rho_0-\rho\ ,\quad \operatorname{rot}\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}(\vec{j}_0-\vec{j})\ ,$$

$$\operatorname{div}\vec{B}=0\ ,\quad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

и систему для наведенных зарядов и токов

$$\operatorname{div}\vec{P}=\rho\ ,\quad \operatorname{rot}\vec{M}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}-\frac{1}{c}\vec{j}\ , \tag{28}$$

которую можно записать так:

$$\partial_k P^{ik}=s^i\ .$$

Поскольку вакуум,по определению,не содержит вещества,принято считать,что $\vec{P}=0$, $\vec{M}=0$. Однако указанное условие не является строгим. С одной стороны,уравнения (28) имеют смысл в отсутствие индуцированных зарядов и токов и потому отсутствие вещества не означает,что разделение полей и индукций типа (25) в вакууме лишено смысла. С другой стороны,упускается из виду то обстоятельство,что поляризация и намагниченность проявляются через дополнительное к

$\vec{E}$, $\vec{B}$ воздействие поля на заряд или ток. Однако такое дополнительное воздействие может быть обусловлено не только индуцированным зарядом, но и другими причинами, в частности движением источника поля - его инерцией. Именно так обстоит дело при использовании (24) :

$$H^{ik} = \left(\theta^{im}\theta^{kn} + \varkappa\theta^{im}u^k u^n + \varkappa\theta^{kn}u^i u^m\right)F_{mn} . \qquad (29)$$

Соотношения (29) обобщают выражения (25). Действительно, при $\vec{u}=0$ из (29) следуют (22), а при $\vec{u} \neq 0$ имеем соотношения (25), в которых $\vec{P}$ и $\vec{M}$ зависят от скорости и параметра w. В частности, для $\vec{u} \neq 0$, $w = 0$ имеем

$$\vec{D} = \vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right] , \quad \vec{B} = \vec{H} + \left[\vec{D}, \frac{\vec{u}}{c}\right] .$$

"Поляризация" и "намагниченность" $\vec{P} = \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right]$, $\vec{M} = \left[\vec{D}, \frac{\vec{u}}{c}\right]$ имеют физический смысл, отличный от общепринятого в электродинамике сплошных сред и характеризуют конвективное воздействие на заряд со стороны источника поля.

Двухтензорность электромагнитного поля в среде и в вакууме выглядит естественной в лагранжевом формализме. Опишем поле обобщенными координатами α_k, к = 0,1,2,3 и β_k, к = 0,1,2,3 , полагая, что

$$F_{mn} = \partial_m\alpha_n - \partial_n\alpha_m , \quad H_{mn} = \partial_m\beta_n - \partial_n\beta_m .$$

Введем тензор $H^{ik} = \varepsilon^{ikmn}F_{mn}$, где ε^{ikmn} - полностью антисимметричный тензор четвертого ранга. Из лагранжиана

$$L = -\frac{1}{4} F_{ik} H^{ik}$$

получим известные уравнения поля

$$\partial_{[k}F_{mn]} = 0 , \quad \partial_k H^{ik} = 0 .$$

Материальные уравнения, с точки зрения лагранжева формализма, представляют собой дополнительные условия, накладываемые на обобщенные скорости

$$\partial_m\alpha_n , \quad \partial_m\beta_n$$

и потому не противоречат представлению о двухтензорности электромагнитного поля.

6. Канонический вид локальной четырехметрики

В качестве локального касательного будем рассматривать пространство V_4, в котором задан симметрический билинейный функционал. По известной теореме Лагранжа для любого квадратичного функционала Q на V_4 существует такой базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_0$ (он называется Q -ортогональным), что

$$Q(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Этот базис не может быть ортонормированным, так как возможен вектор $\vec{x} \neq 0$, для которого $Q = 0$. В Q - ортогональном базисе матрица имеет нормальный вид

$$Q_н(\vec{x}) = \lambda_1 (x^1)^2 + \lambda_2 (x^2)^2 + \lambda_3 (x^3)^2 + \lambda_0 (x^0)^2. \qquad (30)$$

Переход от произвольной формы к нормальной осуществляется невырожденной матрицей преобразований координат, причем

$$Q_н = C^T Q C, \qquad (31)$$

где C^T - транспонированная матрица. Условие (31) означает, что формы Q и $Q_н$ эквивалентны. Упрощение нормального вида (30) назовем канонизацией, а соответствующий вид формы каноническим. В случае, когда форма задана над полем комплексных чисел, формально возможна канонизация

$$y^1 = \sqrt{\lambda_1}\, x^1, \; \ldots, \; y^0 = \sqrt{\lambda_0}\, x^0. \qquad (32)$$

В частном случае четырехмерного псевдоевклидова пространства сигнатуры (3,1) из (30) и (32) следует вид локальной четырехметрики

$$g_{ik} = diag(1, 1, 1, -1). \qquad (33)$$

Покажем, что канонический вид локальной метрики зависит от способа канонизации. Пусть нормальная метрика является невырожденной и имеет вид

$$g_{ik} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_0). \qquad (34)$$

Ее определитель равен $\delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_0$. Для реперов базиса имеем

$$(\vec{e}_1 \vec{e}_1) = \lambda_1, \; (\vec{e}_2 \vec{e}_2) = \lambda_2, \; (\vec{e}_3 \vec{e}_3) = \lambda_3, \; (\vec{e}_0 \vec{e}_0) = \lambda_0.$$

Проведем преобразование реперов, называемое в аналитической геометрии элементарным преобразованием второго рода

$$(a_1, a_2, \dots a_n) \Rightarrow (\kappa a_1, \tfrac{1}{\kappa} a_2, \dots a_n). \qquad (35)$$

При таком преобразовании не меняется элемент объема в V_4, равно как и определитель матрицы (34). Ортонормируем репер $\vec{e}_1$

$$\left(\frac{\vec{e}_1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{\lambda_1}}\right) = 1, \ (\vec{e}_2 \vec{e}_2) = \lambda_2, \ (\vec{e}_3 \vec{e}_3) = \lambda_3, \ (\vec{e}_0{}' \vec{e}_0{}') = \lambda_0 \lambda_1.$$

Аналогично изменим реперы $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Матрица (34) приобретет вид

$$\hat{g}_{ij} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, \delta). \qquad (36)$$

Следовательно, <u>при канонизации нормального вида билинейного функционала в V_4 элементарными преобразованиями второго рода вид локальной четырехметрики определяется с точностью до константы.</u>

Конкретное значение δ может быть определено из дополнительных соображений. *Укажем возможный путь такого определения.* Рассмотрим преобразование ортогональных реперов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_0$, полагая, что

$$(\vec{e}_1 \vec{e}_1) = 1, \ (\vec{e}_0 \vec{e}_0) = -\alpha, \ (\vec{e}_0, \vec{e}_1) = 0 \qquad (37)$$

и требуя, чтобы (37) были справедливы и для преобразованных реперов. Тогда

$$\vec{e}_{0'} = A^0_{0'} \vec{e}_0 + A^1_{0'} \vec{e}_1, \ \vec{e}_{1'} = A^0_{1'} \vec{e}_0 + A^1_{1'} \vec{e}_1.$$

Из условия ортогональности имеем

$$A^1_{0'} : A^0_{0'} = A^0_{1'} : A^1_{1'} = \beta.$$

Следовательно

$$A^1_{0'} = \alpha\beta, \ A^0_{0'} = a, \ A^0_{1'} = \frac{b}{\alpha}\beta, \ A^1_{1'} = b.$$

Используя условия нормировки, получим

$$\vec{e}_{0'} = \frac{\vec{e}_0 + \beta \vec{e}_1}{\pm\sqrt{1 - \beta^2/\alpha}}, \ e_{1'} = \frac{\beta/\alpha \, \vec{e}_0 + \vec{e}_1}{\pm\sqrt{1 - \beta^2/\alpha}}. \qquad (38)$$

Из (38) следует преобразование координат [illegible], используемое в работе.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ПОЛЯ

В электродинамике движущихся сред явный учет условий измерения обычно не проводится. Это обусловлено, во-первых, формализмом классического описания поля, во-вторых, совпадением экспериментальных данных с результатами лоренц-инвариантной теории без учета условий измерения.

Указанную ситуацию нельзя признать удовлетворительной. В настоящее время имеется потребность развития теории измерений в электродинамике движущихся сред. Укажем по меньшей мере два источника такого развития. Первый источник - квантово-механическая теория измерения. Действительно, классическое поле можно рассматривать как усредненное по области пространства-времени квантово-механическое поле, а потому анализ результатов экспериментов нельзя отрывать от явного учета особенностей квантово-механического измерения. Второй источник - представление об относительности одновременности. Действительно, совпадение расчета с экспериментальными данными измерений в электродинамике движущихся сред стало возможным лишь после перехода к лоренц-инвариантной теории, основу которой составляет представление об относительности одновременности. В связи с этим возникают вопросы, не является ли принятие гипотезы об относительности одновременности способом неявного учета основных особенностей измерения в электродинамике; если это так, то каким образом учесть эти условия явно и в чем они заключаются.

В последние годы появились работы , в которых различие параметров электромагнитного поля , измеренных различными наблюдателями , объясняется взаимодействием поля с движущимися телами , в частности с измерительными приборами. Их особенностью является возможность нетривиального обобщения специальной теории относительности (СТО) ,что само по себе важно. Пространственно-временным преобразованиям координат придается динамический смысл : различие величин , наблюдаемых в различных системах отсчета , рассматривается не как кинематический эффект , обусловленный пространственно-временной структурой физического мира, а как следствие взаимодействия, которое можно выразить пространственно-временными преобразованиями [I2]. Наиболее полно эта интерпретация (без расчета) применительно к оптическим явлениям изложена в работе [I3]. Свет рассматривается как совокупность квантово-механических объектов - фотонов, акт измерения - как взаимодействие их с классическим измерительным прибором. Такое взаимодействие ведет к изменению параметров света, обусловленному процедурой измерения. Некоторые аспекты близкого подхода изложены в [I4].

В развитие таких работ построим модель измерений в электродинамике, учитывающую особенности квантово-механического измерения. Сформулируем следующую задачу: привести в соответствие теорию относительности, устанавливающую связь измеренных величин в различных системах отсчета, с теми особенностями измерения, которые известны из квантовой теории.

I. Об условиях измерения в электродинамике движущихся сред

Используем общепринятую терминологию:

Условие - обстоятельство, от наличия или изменения которого зависит наличие или изменение чего-то другого, называемого в таком случае обусловленным.

Наблюдение - относительно длительное, целенаправленное и планомерное восприятие предметов и явлений окружающей действительности.

Измерение - операция, посредством которой устанавливается численное соотношение между измеряемой величиной и заранее выбранной единицей измерения, масштабом, эталоном.

Введем определения:

Система отсчета - макроскопический объект, содержащий структурные элементы, которые обеспечивают измерение исследуемых величин.

Событие - совокупность параметров явления, присоединенных к точке или области пространства-времени.

Акт наблюдения - взаимодействие исследуемого явления с системой отсчета, необходимое и достаточное для измерения.

Переход события в систему отсчета - процесс изменения параметров события, реализующийся вследствие взаимодействия явления с сис-

темой отсчета .
Путь перехода события - траектория точечного события , проходящая через систему отсчета .

Выделим особенности классического измерения , следуя [15]. Они основаны на некоторых абстракциях . "Во-первых , такой абстракцией является абсолютизация физических процессов , т.е.допущение , что они происходят "сами по себе" и не возмущаются актом наблюдения , а значит не требуют дальнейших указаний о способах наблюдений" .

Назовем указанное положение постулатом I классической теории измерений . Сформулируем его следствия .

Следствие Iа). Закон , описывающий физическое явление , не меняется при измерении и потому не зависит от характеристик систем отсчета , в частности скорости .

Следствие Iб). Возможно измерение параметров одного и того же явления несколькими наблюдателями в одной и той же области пространства-времени .

Следствие Iв). Измеренные значения параметров явления характеризуют его полностью в пределах допустимой точности измерений.

"Второй абстракцией является допущение возможности исчерпывающе всестороннего описания действия данного прибора или данной системы" [15] .Назовем это положение постулатом II классической теории измерения . Квантовая механика вносит изменения в классическую теорию измерения, сущность которых , согласно опытным данным , состоит в частичном отказе от обоих постулатов классической теории измерений.

Нарушается следствие Iа). "Между измерениями и физическими состояниями существуют два рода соотношений : во-первых , измерение определяет состояние , в котором система находится <u>после</u> его проведения , а , во-вторых , при его помощи исследуется состояние, существовавшее <u>до</u> измерения . В области классической механики ($\hbar = 0$) это различие теряет смысл,так как состояния до и после измерения [illegible] считать [illegible] . В волновой механике дело обстоит [illegible] , так как [illegible] измерение всегда несет за собой [illegible] изменения в состоянии системы " [1] .

Сформулируем аксиому I квантовой теории измерения : измерение оказывает воздействие на параметры исследуемого физического явления .

Нарушается следствие Iб). Действительно , если каждое наблюдение влияет на параметры явления , то измерения должны проводиться таким образом , чтобы исключить их взаимное влияние и учесть воздействие приборов на явление . Повторим этот вывод , сделанный в [10] в виде леммы I : в квантовой теории невозможно измерение параметров явления двумя различными наблюдателями в одной и той же точке пространства и в один и тот же момент времени. Следовательно , имеет место аксиома П квантовой теории измерения : для сравнения результатов измерений , выполненных различными наблюдателями , необходим специальный алгоритм .

Нарушается следствие Iв). Обусловлено это двумя обстоятельствами . Каждой физической величине в квантовой механике ставится в соответствие оператор , собственные значения которого образуют спектр возможных значений величины . Величина задается той или иной вероятностью в противовес однозначности классического подхода . С другой стороны , согласно соотношению неопределенности Гейзенберга , величины , соответствующие некоммутирующим операторам , не могут быть одновременно измеренными . Отсюда следует аксиома Ш квантовой теории измерения : значения параметров явления для физических величин , описываемых некоммутирующими операторами , не могут быть одновременно определены точно .

Нарушается постулат П классической теории измерения . Обусловлено это тем , что в общем случае редукция волнового пакета , имеющая место при измерении , не описывается уравнением типа Шредингера и потому имеет место нарушение классического принципа . причинности [17] .

Сделаем дополнительное допущение , обеспечивающее согласование классических и квантовых представлений об описании электромагнитного поля . Заметим , что в электродинамике , согласно [18], необходимо "учитывать существенную ограниченность представлений классической теории,согласно которым электромагнитное поле описывается значением его компонентов в каждой пространственно-временной точке , причем поле это может быть промерено посредством точечных зарядов в смысле электронной теории . Эти представления являются идеализацией , имеющей в квантовой теории лишь ограниченную применимость . Указанное обстоятельство находит себе рациональное выражение как раз в аппарате квантовой электродинамики , где полевые величины представляются уже не функциями точки в собственном смысле слова , а функциями пространственно-временных областей ; эти функции области формально соответствуют усредненным по указанным областям значениям идеализированных рассматриваемых как функции точки полевых величин " .

Примем аксиому М I: электромагнитное поле характеризуется совокупностью событий (в смысле данного ранее определения) , параметры которых задаются усредненными по пространственно-временной области значениями микровеличин .

Примем аксиому М II : при взаимодействии микрополей с системой отсчета выполняются аксиомы квантово-механического измерения.

С учетом сделанных замечаний имеем следующую модель физического процесса взаимодействия классического электромагнитного поля , характеризуемого точечным событием , с системой отсчета :

1 . Имеется начальное , до взаимодействия с системой отсчета ,событие ;

2 .В момент времени t_0 в точке x_0 начинается взаимодействие ;

3 .Взаимодействие имеет конечную длительность и интервал длины ;

4 .Устанавливается новое состояние - конечное событие .

Для нахождения уравнений электродинамики , в которых явно учитываются внешние условия , в частности влияние систем отсчета на параметры поля , проведем анализ инерции свободного электромагнитного поля .

2.К вопросу об инерции свободного электромагнитного поля

В механике инерция как свойство материальных тел имеет две стороны : кинематическую - когда внешние силы отсутствуют или взаимно уравновешены , центр тяжести тела сохраняет неизменным состояние своего движения по отношению к любой инерциальной системе отсчета ; динамическую - если на тело действует неуравновешенная система сил , то изменение состояния его движения происходит не мгновенно , а постепенно .При одной и той же силе изменение состояния тем меньше , чем больше масса тела .

Выделим специфическую черту инерции - общность механического движения совокупности тел или частей системы. Тогда изменение инерции, в узком смысле слова, есть изменение скорости инерциального движения системы.

Распространим представление об инерции на свободное электромагнитное поле. Введем определения. Первичный источник свободного электромагнитного поля - специальное излучающее устройство. Вторичный источник свободного электромагнитного поля - выделенный участок физической среды, с которым взаимодействует поле.

Назовем скорость движения источника кинематической характеристикой инерции свободного электромагнитного поля.

Найдем динамическую характеристику инерции для электромагнитного поля. Повторим рассуждения А.Эйнштейна, которые привели его к установлению связи между энергией и массой. Рассмотрим замкнутый цилиндр, внутри которого содержится первичный источник свободного электромагнитного поля. Пусть источник излучает энергию E_0, половина которой поглощается стенкой S_1 цилиндра, а вторая половина - стенкой S_2. Из симметрии задачи излучение не приведет к движению цилиндра. Расчет по лоренц-инвариантной теории [19] дает различие энергий, выделившихся на детекторах. Примем точку зрения, что это различие обусловлено инерцией электромагнитного поля. Согласно [19], имеем приближенное выражение

$$\Delta E \simeq 0{,}5\, E_0 v^2/c^2 . \qquad (39)$$

Дополнительная энергия, которую получит цилиндр вследствие движения источника, приблизительно равна кинетической энергии материального объекта, имеющего массу

$$m = E_0/c^2 \qquad (40)$$

и движущегося со скоростью v. Будем считать величину m динамической характеристикой инерции. Нетрудно видеть, что величина $I = (mc, m\vec{v})$ образует четырехвектор инерции. Сформулируем закон инерции для свободного электромагнитного поля: кинематические и динамические характеристики инерции поля остаются неизменными до тех пор, пока их не изменят внешние условия.

3. Операторный смысл пространственно-временных преобразований в электродинамике

Используем введенный в разделе I главы I метрический тензор

$$g_{ab} = diag(1,1,1,1/w).$$

Определим четырехскорости

$$u^{k} = \frac{dx^{k}}{dg} = (\sqrt{w}/ic)\gamma^{(w)}(dx^{k}/dt)\ ,\ \gamma^{(w)} = 1\Big/\sqrt{1 - wv^2/c^2}\ .$$

Опишем взаимодействие поля с током ковариантным выражением

$$V^{(w)} \sim s^{k}A_{k}\ ,$$

где $s^{k} = \rho_0 u^{k}$ -четырехток , A_k -четырехпотенциал . Поскольку $u^{k} \sim \sqrt{w}$, то и $V^{(w)} \sim \sqrt{w}$. Введем релятивистский потенциал взаимодействия $V^{(r)}$, используя четырехметрику Минковского . Получим взаимосвязь

$$V^{(w)} = \sqrt{w}\,\frac{\gamma^{(w)}}{\gamma}\,V^{(r)}\ ,$$

где $\gamma = 1\Big/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Следовательно , параметр $\sqrt{w}$ характеризует, аналогично [20] , локальное включение релятивистского взаимодействия . Случаю w =0 соответствует отсутствие взаимодействия , случаю w =I - полное включение . Назовем величину w отношением. Примем основную гипотезу : параметр w , входящий в материальные уравнения электродинамики (I2), характеризует включение релятивистского взаимодействия точечного события с его окружением : средой , системой отсчета , другими полями .

Определим область применимости уравнений электродинамики ,содержащих w .Из физических соображений ясно , что при распространении поля в вакууме w =0 , с другой стороны , как показал эксперимент , в среде w =I . Следовательно ,предлагаемые уравнения могут найти применение в граничных задачах электродинамики , причем переходу поля из вакуума в среду соответствует изменение w от 0 до I , а обратному переходу - изменение w от I до 0 .Аналогичное изменение w может иметь место при взаимодействии поля с системой отсчета : w =0 соответствует отсутствие взаимодействия системы отсчета с полем , w =I соответствует релятивистскому взаимодействию .

Рассмотрим некоторые следствия принятой гипотезы. Заметим, что отношение события к системе отсчета, в силу аксиом МI, МII представимо через нормированную сумму микроотношений. Если все микрособытия не взаимодействовали с системой отсчета $w_i = 0$, то $w = 0$, если $w_i = I$, то $w = I$ и переход события в систему отсчета завершен. Поскольку параметры события устанавливаются усреднением микровеличин, характеризующих поле в заданной пространственно-временной области фиксированной системы отсчета, а каждое микрособытие подчиняется аксиомам квантовой теории измерения, общая картина извлечения информации о параметрах поля представляется довольно сложной. Интегральная особенность измерения фиксируется леммой I, что важно для сравнения результатов измерений. Удобно присоединить изменения характеристик события в точке "расширенного" многообразия $\mathfrak{M} = R^3 \times T \times W$ согласно следующему инвариантному определению

$$\Delta \xi^\alpha = \Gamma^\alpha_{\beta k} \xi^\beta dx^k + C^\alpha_{\beta k} \xi^\beta dx^k + d\xi^\alpha, \tag{4I}$$

где ξ^β - физические величины векторного типа, dx^k - дифференциалы координат, $\Gamma^\alpha_{\beta k}$ - компоненты связности, $C^\alpha_{\beta k}$ - тензор. В частном случае, когда $\Gamma^\alpha_{\beta k} = 0$, $C^\alpha_{\beta k} = 0$ из (4I) имеем дифференциалы физических величин $d\xi^\alpha$, отнесенные к различным точкам "расширенного" многообразия. В частности, можно рассмотреть пространственно-временное смещение события относительно точки А в интервале времени от t_1 до $t_1 + \Delta t_1$ при изменении отношения от w_1 до $w_1 + \Delta w_1$. Обозначим его $\{dx^\alpha\}_{t_1, A, w_1}$. Нахождение каждого набора значений физической величины (4I) назовем отсчетом. В зависимости от возможностей измерительной аппаратуры и методики измерений наблюдатели получат разные значения параметров поля.

Рассмотрим две системы отсчета, инерциально движущиеся относительно друг друга. Пусть событие последовательно проходит каждую из них. Для характеристики влияния системы отсчета на параметры явления зададим в каждой точке на пути события отношение. Сначала явление подвергается воздействию со стороны первой системы отсчета и первый наблюдатель получит совокупность параметров, различных в разных точках пути перехода события в систему отсчета. Например, пространственно-временное смещение события относительно точки А в момент времени t_1 при значении отношения w_1 будет задано дифференциалами $\{dx^{\alpha}\}_{t_1,A,w_1}$.На втором этапе аналогичным образом происходит измерение во второй системе отсчета . Второй наблюдатель охарактеризует смещение события в точке В в момент времени t_2 при значении отношения w_2 дифференциалами $\{dx^{\beta'}\}_{t_2,B,w_2}$. Взаимосвязь дифференциалов координат

$$\{dx^{\beta'}\}_{t_2,B,w_2} = \hat{A}^{\beta'}_{\alpha} \{dx^{\alpha}\}_{t_1,A,w_1} \qquad (42)$$

определится матрицей $\hat{A}$, для нахождения которой нужны дополнительные соображения . Заметим , что концепция отношения позволяет раскрыть требование одинаковости условий измерения при учете инерции поля : <u>одинаковость условий измерения в электродинамике инерциально движущихся изотропных в системе покоя сред , учитывающей инерцию источников поля , состоит в равенстве отношений события к системам отсчета наблюдателей</u> $w_1 = w_2$.

Обратимся к анализу экспериментов по определению скорости распространения события в электродинамике инерциально движущихся сред . Следуя (42) , для сравнения результатов измерений , выполненных одним и вторым наблюдателями , необходимо найти матрицу $\hat{A}$.Найдем ее , используя вспомогательную конструкцию

$$\rho^{AB}_{\kappa n} = diag\,(1,1,1,\,1/w_1\cdot w_2)\,, \qquad (43)$$

полученную матричным произведением метрик

$$\rho^{A}_{\kappa n} = diag\,(1,1,1,1/w_1) \quad \text{и} \quad \rho^{B}_{\kappa n} = diag\,(1,1,1,1/w_2).$$

Потребуем инвариантности локального интервала , построенного по метрике (43) .Рассмотрим две декартовых системы координат , присоединенных к системам отсчета наблюдателей , движущихся относительно друг друга со скоростью v .Получим , согласно [10] , двухпараметрические преобразования

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1 - v^2 w_1 w_2/c^2}}, \; dy' = dy, \; dz' = dz, \; dt' = \frac{dt - \frac{dx\,v}{c^2} w_1 w_2}{\sqrt{1 - v^2 w_1 w_2/c^2}} \,. \qquad (44)$$

Заметим , что введение (43) и требование ковариантности интервала удовлетворяет аксиоме II квантовой теории измерения . Проведем анализ (44) .Сравним смещения события , отсчитанные в одной , а затем во второй системах отсчета на конечных стадиях перехода события в них , т.е. тогда $w_1 = w_2 = 1$. Получим преобразования Лоренца . Согласно концепции отношения , преобразования Лоренца задают связь смещений точечного события на конечных стадиях перехода события в системы отсчета , причем отношение на промежуточных стадиях в расчет не берется . Покажем , что учет различия w позволяет прояснить сущность подхода к сравнению измеренных значений скорости события в СТО и согласовать принцип постоянства скорости света в вакууме с преобразованиями Галилея. Действительно , согласно СТО , покоящийся и движущийся наблюдатели в состоянии одновременно и в одной и той же точке пространства измерить скорость света . В вакууме , согласно принципу постоянства скорости света , будут получены одинаковые значения скорости . В реальной ситуации акты измерения разделены в пространстве и во времени . Как первый , так и второй наблюдатели влияют на параметры поля , в том числе и на скорость его распространения . Специальная теория относительности абстрагируется от реального процесса измерения и решает задачу сравнения его результатов без учета воздействия системы отсчета на параметры явления . Понятно, что такой подход логически допустим и значительно упрощает задачу . Для получения результатов , совпадающих с экспериментом , достаточно было ввести представление об относительности одновременности .

В рамках концепции отношения ситуация выглядит иначе .В соответствии с предложенным выше алгоритмом сравнения результатов измерений в электродинамике преобразования Лоренца являются частным случаем (44).Им соответствует определенная схема измерений.

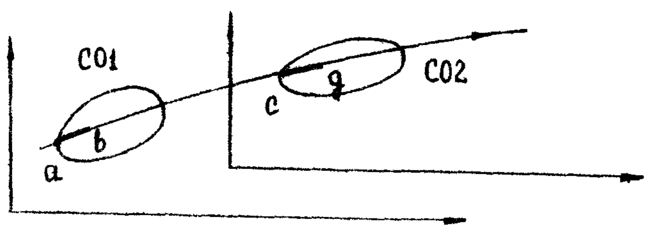

Рис.I. Прохождение точечного события через системы отсчета

Пусть событие последовательно проходит сначала первую систему отсчета - СОI , а затем вторую - СО2 . На отрезках [a,b] и [c,g] ,соответствующих областям систем отсчета , в пределах которых происходит изменение инерции свободного электромагнитного поля , меняется отношение события к системам отсчета . Найдем смещения события в точках b и a ,соответствующих предельным значениям отношения $W_1 = W_2 = 1$. Они соответствуют конечным стадиям перехода события в системы отсчета . С учетом проведенных рассуждений дадим новую формулировку принципа постоянства скорости света (ППСС) в вакууме : значения скорости света в вакууме , измеренные различными инерциальными наблюдателями на конечной стадии перехода события в соответствующую систему отсчета , равны между собой .

В новой формулировке ППСС относится лишь к заключительной стадии перехода события в систему отсчета . Взаимосвязь параметров для других ситуаций не укладывается в рамки преобразований Лоренца . Действительно , пусть измерение параметров события проведено первым наблюдателем на конечной стадии перехода в СО1 , а вторым наблюдателем - на начальной стадии перехода в СО2 . Им соответствуют отношения $W_1 = 1$, $W_2 = 0$.Согласно предложенному алгоритму сравнения результатов измерения (44), измеренные значения связаны преобразованиями Галилея . Этот результат согласуется с интуитивным представлением о характере распространения электромагнитного поля в вакууме . С другой стороны , поскольку преобразования Галилея и Лоренца описывают разные экспериментальные ситуации , можно говорить , что преобразования Галилея не противоречат ППСС .Используя алгоритм сравнения результатов измерения параметров электромагнитного поля с учетом его инерции , сформулируем следствие М1 : пространственно-временные преобразования в электродинамике имеют операторный смысл .

Связь (42) имеет операторный смысл , а матрица $\hat{A}$ во многом аналогична S -матрице квантовой механики [20] .Расшифруем этот тезис . В формализме S -матрицы взаимодействие поля со сложной динамической системой описывается посредством трансформации начальной волновой функции $\Psi(1)$ в конечную по правилу

$$\Psi(2) = \hat{S}_{1,2}\Psi(1) ,$$

где $\hat{S}_{1,2}$ - матрица , выбираемая из дополнительных соображений . Естественно , что расчет изменения параметров поля при таком подходе существенно упрощается .В специальной теории относительности аналогично используется матрица $\hat{A}$.

4. Явный учет условий измерения в электродинамике движущихся сред

В соответствии с результатами предыдущего раздела локальное взаимодействие поля с окружением (средой , другим полем , системой отсчета) характеризуется , помимо известных величин , нормированным скалярным полем - отношением . Влияние отношения на параметры поля , из физических соображений , проявляется через изменение инерции поля . Проведем качественный анализ возможных ситуаций .

Заметим , что в крайнем случае отсутствия взаимодействия , когда $W = 0$, инерция поля измениться не может и сохраняет фиксированное значение для любого инерциального наблюдателя .

При переходе электромагнитного поля из вакуума в среду происходит , во-первых, изменение отношения W от 0 до 1 , во-вторых, меняются как кинематические , так и динамические характеристики инерции поля . Поле "забывает" скорость своего первоначального источника , вторичный же источник имеет скорость , равную скорости движения среды . Дополнительно происходит изменение частоты поля в системе отсчета , покоящейся относительно вторичного источника, что находит выражение в эффекте Допплера .

Переход поля из среды в вакуум сопровождается изменением отношения W от I до 0 . Изменения характеристик инерции поля при этом не происходит .

Если поле переходит из среды с одной скоростью в среду с другой скоростью , в таком процессе отношение равно 1 и не меняется. Однако параметры инерции поля претерпевают изменение , которое детально описывается лоренц-инвариантной теорией .

<u>Математический учет различия локальных условий</u> в электродинамике движущихся сред будем проводить на основе двухтензорных уравнений Максвелла (в вакууме и в среде), дополненных материальными уравнениями типа (I) с тензором (7) . Запишем их :

$$\partial_{[k}F_{mn]} = 0 \ , \quad \partial_k H^{ik} = \frac{4\pi}{c} I^i \ ,$$

$$H^{ik} = \Omega^{im} \Omega^{kn} F_{mn} \ ,$$

$$\Omega^{im}=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[g^{im}+\left(\frac{\varepsilon\mu}{w}-1\right)u^i u^m\right],\ g^{im}=diag(1,1,1,w). \quad (45)$$

Примечание I . Расчет параметров электромагнитного поля определен , если задан закон изменения отношения $w(x,y,z,t)$. В настоящее время уравнения для w неизвестны , поэтому анализ системы (45) ограничивается случаем фиксированных значений w .Интерес для исследования в первую очередь представляет галилеевски-инвариантная электродинамика .Ее анализ будет проведен в главе Ш.

Примечание 2 . Произвольная система отсчета является ,по отношению к полю , некоторым внешним условием . Если она не взаимодействует с полем , то $w = 0$, если в результате взаимодействия имеем установившиеся параметры поля , то $w = 1$. Взаимодействие с системой отсчета в общем случае меняет характеристики инерции поля : например , скорость источника становится равной скорости движения системы отсчета . Поэтому учет воздействия системы отсчета на параметры электромагнитного поля может быть выполнен посредством "переопределения"характеристик инерции поля в уравнениях (45) .

Резюмируем сущность алгоритма явного учета условий измерения.

Электромагнитное поле в среде и в вакууме рассматривается как двухтензорное.

Введена новая безразмерная характеристика локального взаимодействия поля с окружением - нормированное скалярное поле w , интерпретируемое как фактор включения релятивистского взаимодействия , названное отношением.

В качестве физического фактора , чувствительного к изменению отношения , используется инерция свободного электромагнитного поля , имеющая кинематические и динамические характеристики.

Локальное взаимодействие поля с окружением учитывается посредством материальных уравнений для движущейся среды.

Система отсчета представляется в виде внешнего условия , накладываемого на поле . Учет воздействия системы отсчета на параметры поля сводится к "переопределению" характеристик инерции поля в уравнениях электродинамики .

ГЛАВА III

ПРИМЕНЕНИЕ СВЯЗИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СИММЕТРИЙ И УСЛОВИЙ ИЗМЕРЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

I. Галилеевски-инвариантная электродинамика вакуума

Задача построения варианта электродинамики вакуума, решения уравнений которой зависели бы от скорости движения источника, была сформулирована А.Эйнштейном в 1952 году. С логической точки зрения она обусловлена следующим обстоятельством: с одной стороны, поскольку электромагнитное поле представляет собой самостоятельную сущность, δ - образное возмущение от источника, движущегося в вакууме со скоростью $\vec{u}$, должно представлять собой сферу радиуса ct с центром в той точке, в которой к моменту времени t расположен источник; с другой стороны, согласно лоренц-инвариантной электродинамике вакуума, которая согласуется с многочисленными экспериментальными данными, δ -образное возмущение представляет собой сферу с центром в той точке, в которой находился источник в начале излучения. Было бы желательно привести в соответствие представление о независимом существовании электромагнитного поля в вакууме с результатами лоренц-инвариантной электродинамики. Для этого необходимо решить указанную выше задачу.

Используем уравнения галилеевски-инвариантной электродинамики изотропной инерциально движущейся среды, следующие из (45), когда $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $w = 0$ и скорость движения среды заменена скоростью движения источника. Получим систему уравнений

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla\vec{B} = 0, \quad \nabla\vec{D} = 0, \quad \nabla\times\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

$$\vec{D} = \vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right], \quad \vec{B} = \vec{H} - \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{D}\right].$$

Введем обычным образом векторный $\vec{A}$ и скалярный φ потенциалы. Уравнения для них имеют вид

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\nabla\right)^2\right]\vec{A} = 0,$$

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\nabla\right)^2\right]\varphi = 0 .$$

Дополнительно должно выполняться условие калибровки

$$\nabla\vec{A} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\nabla\right)\left(\vec{u}\vec{A} - c\varphi\right) = 0 .$$

Опишем δ -образное возмущение , распространяющееся в вакууме согласно полученным уравнениям . Оно задается функцией Грина (I8) при значениях параметров , равных $w = 0$, $\varepsilon = I$, $\mu = I$:

$$G_0(\vec{r},t) = 16\pi^4\left(\rho^2 + \overset{*}{z}{}^2\right)^{-1/2}\delta\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{\rho^2 + \overset{*}{z}{}^2}\right), \qquad (46)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\overset{*}{z}{}^2 = (z - ut)^2$.

Легко видеть , что поверхность , на которой функция Грина отлична от нуля , представляет собой сферу радиуса ct . Центр сферы определится выражением $z_0 = ut$. Следовательно , выводы из предложенной системы уравнений электродинамики согласуются с интуитивным представлением о характере его движения в вакууме в отсутствие взаимодействия . Фазовая $\vec{v}_\varphi$ и групповая $\vec{v}_g$ скорости света в вакууме зависят от скорости движения источника по правилу

$$\vec{v}_\varphi = (c\vec{k}/k)(1 - \vec{s}\vec{u}/c) , \quad \vec{v}_g = c\frac{\vec{k}}{k} + \vec{u} . \qquad (47)$$

По электродинамике вакуума Лоренца фазовая и групповая скорости не зависят от скорости движения источника , т.е.

$$\vec{v}_\varphi = \vec{v}_g = c\vec{k}/k ,$$

что находит отражение в эйнштейновском принципе постоянства скорости света в вакууме . Покажем , что из галилеевски-инвариантной электродинамики вакуума , при учете условий измерения , следует независимость скорости света в вакууме от скорости движения источника . Действительно , в большинстве опытов по измерению скорости света в вакууме фактически измеряется скорость относительно вторичного источника , который покоится в системе отсчета . Поэтому в соответствии с формулами (47) имеет место независимость скорости света в вакууме от скорости движения источника . Чтобы обнаружить зависимость , нужны опыты , в которых измерительное устройство не оказывает влияния на инерцию электромагнитного поля . Отметим , что в физической литературе имеются ссылки на эксперименты , в которых подтверждена зависимость (47).

2. Две стороны принципа относительности в электродинамике

В принципе относительности для механических движений , предложенном Галилеем [21] , речь шла о сравнении двух различных экспериментальных ситуаций :

наблюдатель , покоящийся в физической лаборатории , огражденной от внешних воздействий , исследует механическую систему и находит описывающий ее закон ;

тот же наблюдатель вместе с исследуемой механической системой движется инерциально и определяет закон поведения системы .

Согласно наблюдениям Галилея,механические законы не зависят от скорости инерциального движения системы как целого , что составляет содержание принципа относительности Галилея (ПОГ). Причина одинаковости протекания механических опытов выражена следующим образом : "...причина согласованности всех этих явлений заключается в том , что движение корабля обще всем находящимся на нем предметам , так же , как и воздуху ".В предложенной терминологии исследуемая система и наблюдатель имеют в двух указанных ситуациях одинаковые кинематические характеристики инерции . Галилей не утверждает абсолютной необнаружимости инерциального движения механическими опытами , так как он обнаружил , что физические явления протекают по-разному , если в опытах участвуют системы с различной инерцией . Изменение инерции проявляет себя как дополнительная сила , действующая на систему . Вопрос о соотношении покоящегося и инерциально движущегося эталонов в подходе Галилея не рассматривался . Многочисленные опыты доказали справедливость ПОГ не только в механике , но и в электродинамике инерциально движущихся сред . С физической точки зрения ПОГ фиксирует независимость поведения электродинамической системы от характеристик ее движения как целого .

Другая сторона принципа относительности выявлена А.Эйнштейном .Пусть одна экспериментальная ситуация анализируется различными инерциальными наблюдателями . Согласно Эйнштейну , физические явления не зависят от инерциального движения измерительных устройств , что составляет содержание проведенного им "расширения" принципа относительности Галилея . Сформулируем указанное требование как принцип относительности Эйнштейна (ПОЭ). С физической точки зрения ПОЭ фиксирует независимость закона , описывающего физическую систему , от инерции наблюдателя .

Оба принципа относительности находят математическое выражение в тензорной зависимости материальных уравнений электродинамики от четырехскоростей , описывающих источники поля .

При анализе распространения электромагнитного поля в вакууме представляют интерес следующие ситуации : инерциально движущиеся электродинамические системы исследуются наблюдателями , покоящимися относительно их ;одна электродинамическая система исследуется различными инерциальными наблюдателями.Первая ситуация соот - ветствует условиям ПОГ , вторая - ПОЭ .В современной электродинамике отсутствует их четкое разграничение . Возможен и более сложный случай , когда имеет место суперпозиция ПОГ и ПОЭ . Например, событие последовательно проходит через одну , а затем через другую физическую лабораторию , в каждой из которых проводится измерение его параметров .Использование уравнений электродинамики , явно учитывающих условия измерения , позволяет провести расчет любой из указанных выше ситуаций .

3. Применение концепции отношения в граничных задачах

Согласно проведенному анализу , различным локальным условиям распространения электромагнитного поля соответствуют различные значения нормированного скалярного поля w : в вакууме $w = 0$, в среде $w = 1$. Представляет интерес задача об изменении параметров поля , связанном с изменением отношения w ,которое имеет место при переходе из вакуума в среду , движении в ней и переходе из среды в вакуум . Реализуем следующий мысленный эксперимент.

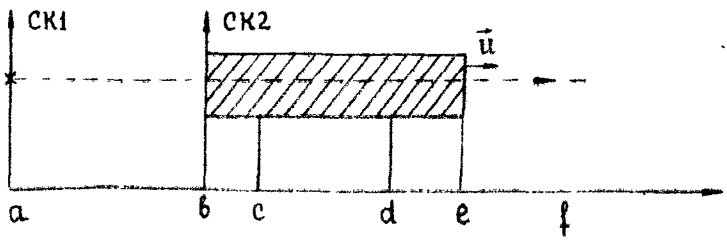

Рис.2. Схема распространения поля

Пусть источник, находящийся в вакууме и покоящийся в системе координат СКI, излучает поле, распространяющееся по указанной схеме. Пусть система координат СК2 покоится относительно инерциально движущейся со скоростью $\vec{u}$ среды с показателем преломления n. Рассмотрим значения скорости поля на различных участках схемы в СКI и СК2, используя концепцию отношения. Воспользуемся выражениями, полученными в [IC]. Для групповой скорости

$$\vec{v}_g = \frac{c}{n}\frac{\vec{k}}{k} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right)\vec{u}$$

имеем следующие результаты.

Участок	Значение отношения	СКI	СК2
$[ab]$	0	c	$c-u$
$[cd]$	I	$\frac{c}{n}+u\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\frac{c}{n}$
$[ef]$	0	$c+u$	c

На участках $[bc]$ и $[de]$ происходит изменение скорости, обусловленное тремя факторами: w, n, u. Указанные результаты согласуются с представлениями о характере распространения электромагнитного поля в вакууме и в среде и не могут быть получены в лоренц-инвариантной электродинамике. Аналогично анализируются изменения частоты и волнового вектора.

Заключение

Проведенный анализ показал, что уравнения электродинамики движущихся сред допускают несколько состояний свободного поля, зависящих от условий локального взаимодействия его с окружением. Их различие определяется новым безразмерным параметром w – фактором включения релятивистского взаимодействия. Согласно основной гипотезе, в вакууме $w = 0$, в среде $w = I$. Каждому фиксированному значению w соответствует группа пространственно-временных преобразований и уравнения электродинамики, локально ковариантные относительно указанных групп. Условия локального взаимо -

действия точечного события с окружением определяют условия измерения, безотносительные к выбору системы отсчета. Рассмотрение систем отсчета как физических тел, являющихся по отношению к полю внешними условиями, позволяет описывать их влияние на поле тем же параметром w, меняющимся в диапазоне от 0 до I. Влияние системы отсчета на параметры поля сводится к изменению его характеристик инерции. В частности, при $w = 0$ скорость движения источника равна первоначальной, при $w = I$ – скорости движения наблюдателя. Преимуществом развиваемого подхода в электродинамике движущихся сред является явный учет инерции поля, а также наличие уравнений, содержащих условия измерения. То обстоятельство, что условия измерения оказались связанными с пространственно-временными симметриями в электродинамике, представляется интересным для анализа. Вопросы, рассмотренные в работе, не решают проблему измерений во всей полноте, однако с достаточной ясностью указывают направление дальнейшего исследования.

Литература

I. Лоренц Г.А. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света. - Старые и новые проблемы физики. - М.: Наука, 1970, с. 28 - 55.
2. Пуанкаре А. О динамике электрона. - Избр. тр. - М.: Наука, 1974, т. 3, с. 433 - 515.
3. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел. - Собр. науч. тр. - М.: Наука, 1965, с. 7 - 35.
4. Минковский Г. Пространство и время. - Принцип относительности / Под. ред. В.К. Фредерикса, Д.Д. Иваненко. - М.: ОНТИ, 1935, с. 127 - 145.
5. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. Современное состояние электродинамики движущихся сред (безграничные среды). - Эйнштейновский сб., 1974. - М.: Наука, 1976, с. 179 - 275.
6. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. - М.: Наука, 1965. - 456 с.
7. Post E.J. The constitutive map and some of its ramification. - Ann. of Phys., 1972, v. 71, p. 497-518.
8. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. - Киев: Наукова думка, 1983.

9. Ткалич В.С. Теоретические основы оптимальных взаимодействий. – Киев: Наукова думка, 1974.
10. Барыкин В.Н. К электродинамике инерциально движущихся сред. – Минск, 1982. – 56 с. – (Препринт / ИТМО АН БССР, № 1).
11. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. Поля источников излучения в движущихся средах. – Эйнштейновский сб. – М.: Наука, 1983, с. 173.
12. Яноши Л. Дальнейшие соображения о физической интерпретации преобразований Лоренца. – УФН, 1957, 62, № 1, с. 119 – 181.
13. Schlegel R. An Interaction Interpretation of Special Relativity. Part I. – Found. Phys., 1973, v. 3, N 2, p. 169-184.
14. Фейнберг Е.Л. Можно ли рассматривать релятивистское изменение масштабов длины и времени как результат действия сил. – Эйнштейновский сб., 1975 - 76. – М.: Наука, 1968, с. 43 – 77.
15. Фок В.А. Квантовая физика и философские проблемы. – Вопросы философии, 1971, № 3, с. 46 – 49.
16. Ландау Л.Д., Пайрлс Р. Распространение принципа неопределенности на релятивистскую квантовую теорию. – Собр. соч.. – М.: Наука, 1969, т. 1, с. 56 – 70.
17. Нейман Д. Математические основы квантовой механики. – М.: Наука, 1964. – 367 с.
18. Бор Н. К вопросу об измеримости электромагнитного поля. – Избр. науч. тр. – М.: Наука, 1971, т. II.
19. Эйнштейн А. Собр. науч. тр. – М.: Наука, 1956, т. I.
20. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей.– М.: Наука, 1976 .– 480 с.
21. Галилей Г. Собр. соч. – М.: Наука, 1970.

С о д е р ж а н и е

В.Н. Барыкин

СВЯЗЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СИММЕТРИЙ И УСЛОВИЙ ИЗМЕРЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Препринт № 4

Редактор В.И. Царькова. Худ. редактор С.И. Сауляк.
Техн. редактор В.Д. Перепелкина. Корректор Е.А. Грищук.

Подписано в печать 27.02.85. АТ 17545.
Формат 60x84 1/16. Бумага типогр. № 2. Печать офсетная.
Усл.печ. л. 2,5. Усл.кр.-отт. 2,5. Уч.-изд. л. 2,4.
Тираж 200 экз. Заказ 89.
Бесплатно.

Редакционно-издательский отдел Института
тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова.

Отпечатано на ротапринте Института тепло- и массообмена
им. А.В. Лыкова АН БССР, Минск, П. Бровки, 15.