АКАДЕМИЯ НАУК БССР
ИНСТИТУТ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА им. А.В.ЛЫКОВА

В.Н. Барыкин

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЕТА С ИНЕРЦИАЛЬНО ДВИЖУЩЕЙСЯ НЕРЕЗКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Препринт № 2

М и н с к I98I

УДК 530.12

Предложен алгоритм расчета взаимодействия света с инерциально движущейся границей конечной толщины в рамках формализма систем координат с отношением. Получено дисперсионное уравнение для свободных электромагнитных волн в изотропной среде с учетом отношения. Установлены соотношения между частотами, компонентами волновых векторов, амплитудами волн в покоящейся и движущейся средах для случая нормального разрыва скорости на границе.

Обычно граничные задачи электродинамики движущихся сред решают для случая, когда граница раздела представляет собой плоскую поверхность бесконечно малой толщины, т.е. размер переходного слоя от одной среды к другой много меньше всех длин волн, которые распространяются в данной системе. Соответствующая библиография по этому вопросу приведена в [I,2]

В случае, когда масштаб неоднородности, характеризующий изменение свойств среды, много больше длины волны, материальные уравнения могут быть получены методом разложения по малому параметру (отношение масштаба неоднородности волны к масштабу неоднородности среды). В материальные уравнения войдут не только параметры среды, но и их производные по координатам и времени [3,4].

Если переходный слой имеет конечную ширину, характер решения будет зависеть от внутренних параметров границы [5].

В данной работе предложен алгоритм расчета взаимодействия света с инерциально движущейся границей конечной толщины в рамках формализма систем координат с отношением. Получено дисперсионное уравнение для свободных волн в изотропной среде с учетом отношения. Установлены соотношения между частотами, компонентами волновых векторов, амплитудами волн в движущейся и покоящейся средах для случая нормального разрыва скорости границы.

§ I. Вывод пространственно-временных преобразований для инерциальных систем координат с отношением

Рассмотрим луч света, проходящий границу конечной толщины, полагая, что его параметры до границы известны. Тогда в системе координат, покоящейся относительно источника света, за время dt точка луча пройдет расстояние, проекции которого на оси координат равны dx^{α}. Взаимодействие с границей приведет к изменению параметров, и при измерении в движущейся системе координат мы получим зависимость смещений от глубины проникновения в границу.

Общая особенность перехода в движущуюся среду, которая не зависит от структуры границы, состоит в том, что среда становится вторичным источником света. Можно говорить о том, что взаимодействие с границей ведет к изменению инерционных свойств источника света. Полагаем, что инерциально движущейся границе соответствует постоянное значение потенциала сил инерции и взаимодействие с границей есть процесс прохождения лучом той области, в которой меняется потенциал.

Рассмотрим одномерный потенциал $\Phi(x)$, который меняется на отрезке $[a,b]$. Определим отношение как интегральную характеристику воздействия границы на параметры электромагнитного поля, независимую от конкретных особенностей взаимодействия.

Такую величину легко задать для одномерного потенциала. Введем $\varphi(x)=\dfrac{d\Phi}{dx}$ и определим

$$w=\frac{\int_x^a \varphi(t)\,dt}{\int_a^b \varphi(t)\,dt}=\begin{cases} 0 & x\leqslant a, \\ 0\div 1 & a<x<b, \\ 1 & x\geqslant b. \end{cases} \qquad (1)$$

Она задает вероятность перехода света в движущуюся среду и поэтому может быть определена и для многомерного случая. Ситуация выглядит теперь так: нужно установить взаимосвязь пространственно-временных переменных для "покоящейся" и "движущейся" систем координат с учетом w.

Пусть в системе координат $\mathcal{K}$ заданы смещения dx^{α} за время dt, а в системе координат $\mathcal{K}'$, инерциально движущейся со скоростью v при отношении w, смещения имеют проекции dx'^{α} за время dt'. Рассмотрим 4-мерное псевдоевклидово многообразие, метрика которого зависит от значения w, и установим взаимосвязь смещений, полагая, что она задается тензором второго ранга, оставляющим метрику инвариантной. Пусть

$$g_{\mu\nu} = \vec{l}_\mu \cdot \vec{l}_\nu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu = 1,2,3 \\ 0 & \mu \neq \nu \\ -\alpha & \mu = \nu = 0 . \end{cases} \tag{2}$$

Это означает, что трехмерная гиперповерхность R_3 евклидова, а репер $\vec{l}_0$ ортогонален ей и не нормирован на единицу. Преобразуем репер так, чтобы было сохранено условие (2). Вращением ортов в трехмерной плоскости орты $\vec{l}_2, \vec{l}_3$ могут быть совмещены с ортами $\vec{l}_{2'}, \vec{l}_{3'}$. При этом совпадут псевдоевклидовы плоскости $(\vec{l}_0 \vec{l}_1)$ и $(\vec{l}_{0'} \vec{l}_{1'})$[6]. Преобразование свелось к движению репера в псевдоевклидовой плоскости. Определим его вид, полагая, что начала реперов находятся в одной точке. Пусть

$$\begin{aligned} \vec{l}_{0'} &= A^0_{0'} \vec{l}_0 + A^1_{0'} \vec{l}_1 , \\ \vec{l}_{1'} &= A^0_{1'} \vec{l}_0 + A^1_{1'} \vec{l}_1 . \end{aligned} \tag{3}$$

Из условия ортогональности имеем

$$\frac{1}{\alpha} A^1_{0'} : A^0_{0'} = A^1_{1'} : A^0_{1'} = \beta . \tag{4}$$

Обозначим

$$A^0_{0'} = a , \quad A^1_{1'} = b .$$

Тогда

$$A^1_{0'} = a\alpha\beta , \quad A^0_{1'} = b\beta .$$

Соотношения (3) совместно с (2) дают условия, накладываемые на реперы:

$$\begin{aligned} a^2(-1 + \beta^2 \alpha) &= -1 , \\ b^2(1 - \beta^2 \alpha) &= 1 . \end{aligned}$$

Отсюда

$$b = a = \frac{1}{\pm(1-\beta^2\alpha)^{1/2}}.$$

Запишем взаимосвязь реперов в явном виде:

$$\vec{e}_{0'} = \frac{\vec{e}_0 + \beta\alpha\vec{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2\alpha}}, \quad \vec{e}_{2'} = \vec{e}_2, \ \vec{e}_{3'} = \vec{e}_3, \ \vec{e}_{1'} = \frac{\beta\vec{e}_0 + \vec{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2\alpha}}. \tag{5}$$

Используем (5) для связи ковариантных компонент вектора $d\vec{x}$ и учтем связь между ковариантными и контрвариантными компонентами через метрический тензор. Имеем для дифференциалов координат

$$dx^{0'} = \frac{dx^0 - \beta dx^1}{\sqrt{1-\beta^2\alpha}}, \quad dx^{2'} = dx^2, \ dx^{3'} = dx^3, \ dx^{1'} = \frac{dx^1 - \beta\alpha dx^0}{\sqrt{1-\beta^2\alpha}}. \tag{6}$$

Определим, чему равно β для случая, когда система координат $\mathcal{K}'$ движется вдоль оси $0x$ системы координат $\mathcal{K}$ со скоростью v. Для точки, покоящейся в $\mathcal{K}'$, имеем

$$dx - \beta c\alpha\, dt = 0.$$

Отсюда

$$\beta = \frac{v}{c}\frac{1}{\alpha}. \tag{7}$$

Подставим (7) в (6). Получим

$$dt' = \frac{dt - dx\frac{vw}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w}}, \quad dy' = dy, \ dz' = dz, \ dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w}}, \tag{8}$$

где

$$w = \frac{1}{\alpha}.$$

Такая взаимосвязь переменных известна как преобразования Игнатовского-Франка [7]. Из (8) следует, что параметр, входящий в преобразования, есть отношение. Очевидно также, что начальная стадия взаимодействия с границей описывается преобразованиями Галилея, а конечная – преобразованиями Лорентца.

§ 2. Материальные уравнения Минковского с отношением

Пусть w постоянно. Тогда взаимосвязь переменных для инерциальных систем координат с отношением имеет вид

$$x'^{\alpha} = a^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} + b^{\alpha}, \qquad (9)$$

где

$$a^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\frac{v}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma w & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} w\right)^{-1/2}.$$

Следуя Минковскому, установим взаимосвязь полей и индукций, требуя инвариантности уравнений Максвелла относительно (9) для изотропной среды, неподвижной в системе координат $\mathcal{K}'$. Пусть заданы уравнения Максвелла в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \qquad (10a)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\left(\rho u_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}\right),$$

$$(10б)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\rho u_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\left(\rho u_z + \frac{\partial \mathcal{D}_z}{\partial t}\right),$$

$\vec{E}, \vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей; $\vec{\mathcal{D}}, \vec{B}$ – индукции электрического и магнитного полей; ρ – плотность электрического заряда; $\vec{u}$ – скорость движения заряда в данной системе координат.

Согласно (9)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \gamma\frac{vw}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -v\gamma\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \tag{II}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x\frac{vw}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - u_x\frac{vw}{c^2}\right)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - u_x\frac{vw}{c^2}\right)}.$$

Используя (II), непосредственной проверкой убеждаемся в инвариантности уравнений Максвелла при следующих соотношениях между компонентами полей, индукциями и зарядами:

$$\mathcal{D}'_x = \mathcal{D}_x, \quad \mathcal{D}'_y = \gamma\left(\mathcal{D}_y - \frac{v}{c}wH_z\right), \quad \mathcal{D}'_z = \gamma\left(\mathcal{D}_z + \frac{v}{c}wH_y\right);$$

$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \gamma\left(H_y + \frac{v}{c}\mathcal{D}_z\right), \quad H'_z = \gamma\left(H_z - \frac{v}{c}\mathcal{D}_y\right);$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c}wE_z\right), \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c}wE_y\right); \tag{I2}$$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma\left(E_y - \frac{v}{c}B_z\right), \quad E'_z = \gamma\left(E_z + \frac{v}{c}B_y\right);$$

$$\rho' = \gamma\rho\left(1 - v\frac{wu_x}{c^2}\right).$$

Пусть диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в системе координат $\mathcal{K}'$, покоящейся относительно изотропной среды, известны и равны соответственно ε и μ. Тогда соотношение между полями и индукциями в $\mathcal{K}'$ имеет вид

$$\vec{\mathfrak{D}}' = \varepsilon \vec{E}', \qquad \vec{B}' = \mu \vec{H}'. \tag{13}$$

Подставляя (12) в (13), получим взаимосвязь для полей в движущейся системе координат с отношением

$$\begin{aligned} \vec{\mathfrak{D}} + \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{H}\right] w &= \varepsilon \left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right]\right), \\ \vec{B} + \left[\vec{E}, \frac{\vec{u}}{c}\right] w &= \mu \left(\vec{H} + \left[\vec{\mathfrak{D}}, \frac{\vec{u}}{c}\right]\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Таковы материальные уравнения Минковского для системы координат с отношением.

§ 3. Постановка задачи взаимодействия поля с границей конечной толщины

Представим границу конечной толщины как набор плоских и резких границ, каждая из которых расположена на расстоянии $\varepsilon \ll h$ (h – толщина границы) друг от друга и перемещается со скоростью $\vec{v}$. Зададим значение отношения на каждой из них, полагая, что граница, расположенная дальше от поверхности, характеризуется значением $w_{i+1} = w_i + \delta$, где w_i – отношение на предыдущей границе, $\delta \ll 1$ – величина изменения отношения. Началу границы соответствует тогда $w = 0$, а окончанию – $w = 1$. Поля $\vec{E}$, $\vec{H}$ и индукции $\vec{\mathfrak{D}}$, $\vec{B}$ в каждой из изотропных сред описываем уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathfrak{D}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \qquad \operatorname{div} \vec{\mathfrak{D}} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

ρ и j - плотности сторонних токов и зарядов. Используем также материальные уравнения Минковского для значения отношения, приданного границе.

Граничные условия рассматриваем следующим образом [8]: по одну сторону границы задаются значения полей в первой среде до взаимодействия с границей, по другую сторону границы - во второй среде. Они имеют вид

$$\left[\vec{n}, \vec{E}_{II}-\vec{E}_{I}\right]=\frac{v_n}{c}\left(\vec{B}_{II}-\vec{B}_{I}\right),$$
$$\left[\vec{n}, \vec{H}_{II}-\vec{H}_{I}\right]=-\frac{v_n}{c}\left(\vec{D}_{II}-\vec{D}_{I}\right), \tag{16}$$

где индексами I и II обозначены значения полей и индукций по обе стороны от границы раздела, $\vec{n}$ - нормаль к поверхности раздела, v_n - нормальная составляющая скорости перемещения границы раздела.

Если среды по обе стороны от границы однородны, имеют диэлектрические и магнитные проницаемости $\varepsilon_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ и движутся с постоянными скоростями $\vec{u}_{1,2}$, то соотношение между полями и индукциями в каждой среде (i = 1,2) для плоских монохроматических волн вида $\exp\{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)\}$ определяются уравнениями Максвелла-Минковского в отсутствие зарядов и токов:

$$\vec{D}=-\left[\frac{c\vec{k}}{\omega}, \vec{H}\right], \qquad \vec{B}=\left[\frac{c\vec{k}}{\omega}, \vec{E}\right],$$
$$(\vec{k}, \vec{B})=0, \qquad (\vec{k}, \vec{D})=0, \tag{17}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_i\vec{E}+\frac{\overset{*}{\varkappa}_i \Omega_i^2}{\mu_i}\left\{w\beta_i^2\vec{E}-w\vec{\beta}_i(\vec{\beta}_i,\vec{E})+[\vec{\beta}_i \vec{B}]\right\},$$
$$\vec{H}=\frac{1}{\mu_i}\vec{B}+\frac{\overset{*}{\varkappa}_i \Omega_i^2}{\mu_i}\left\{-\beta_i^2\vec{B}+\vec{\beta}_i(\vec{\beta}_i,\vec{B})+[\vec{\beta}_i,\vec{E}]\right\}. \tag{18}$$

где

$$\overset{*}{\varkappa} = \varepsilon_i \mu_i - w \qquad \Omega_i^2 = \left(1 - w\beta_i^2\right)^{-1} \qquad \vec{\beta}_i = \frac{\vec{u}_i}{c}$$

В эти соотношения и граничные условия не входит тангенциальная компонента v_t скорости перемещения границы раздела. Поэтому граничные условия (I6) относятся к случаю нормального разрыва скорости, а для тангенциального разрыва скоростей, когда $v_n = 0$, граничные условия принимают вид

$$[\vec{n}, \vec{E}_{II} - \vec{E}_{I}] = 0, \qquad [\vec{n}, \vec{H}_{II} - \vec{H}_{I}] = 0,$$

$$(\vec{n}, \vec{B}_{II}) = (\vec{n}, \vec{B}_{I}), \qquad (\vec{n}, \vec{\mathfrak{D}}_{II}) = (\vec{n}, \vec{\mathfrak{D}}_{I})$$

В справедливости уравнений (I8) можно убедиться непосредственно из преобразования соотношений (I4).

Используем теперь условие инвариантности следующих величин

$$I_\omega = (\omega - \vec{k}\vec{v}) = inv, \qquad I_t = k_t = inv. \qquad \text{(I9)}$$

Эти инварианты справедливы при любом соотношении между ω и $\vec{k}$, т.е. для электромагнитных волн любого типа. Их неизменность имеет простое физическое обоснование. Действительно, для покоящихся сред на границе выполняется хорошо известное условие совпадения частот и тангенциальных компонент волновых векторов падающих, отраженных и преломленных волн [9]. Если, следуя [8], с помощью пространственно-временных переменных, связывающих покоящуюся и движущуюся системы координат, перейти в систему покоя границы раздела, то вне зависимости от величины w получим

$$\omega' = \gamma_v I_\omega, \qquad k_t = I_t. \qquad (20)$$

Поскольку при $w = const$ величина $\gamma_v = (1 - \frac{v^2}{c^2} w)^{-\frac{1}{2}}$ одинакова для всех волн, то ясно, что соотношения (I9) справедливы на границе. Величины I_ω и I_t обычно называют кинематическими инвариантами. Для решения задач кинематики отражения и преломления волн на движущейся границе раздела, кроме кинематических инвариантов, достаточно знать дисперсионное уравнение для волн в каждой из движущихся сред. Вывод этого уравнения будет дан ниже.

Если необходимо определить и амплитуды отраженных и преломленных волн, то следует использовать уравнения (I7) и (I8) для плоских монохроматических волн в равномерно движущейся изотропной среде.

§ 4. Вывод дисперсионного уравнения

Пусть, как обычно [I0], из полей и индукций составлены два тензора:

$$\mathcal{F}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_y & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\mathcal{H}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -i\mathfrak{D}_x \\ -H_z & 0 & H_x & -i\mathfrak{D}_y \\ H_y & -H_x & 0 & -i\mathfrak{D}_z \\ i\mathfrak{D}_x & i\mathfrak{D}_y & i\mathfrak{D}_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Компонентами тензора являются составляющие электрического поля и магнитной индукции, а компонентами тензора $\mathcal{H}_{ik}$ - составляющие магнитного поля и электрической индукции.

С помощью введенных тензоров уравнения Максвелла записываются в виде

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0, \qquad (21)$$

$$\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} J_i , \qquad (22)$$

J_i $(J_x, J_y, J_z, ic\rho)$ – четырехмерный вектор тока, а ырехмерные координаты выберем в следующем виде:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_0 = ict.$$

Как всегда, по повторяющимся индексам проводится суммирование. Введем две четырехскорости

$$u_{1,2,3} = \gamma \frac{u_{x,y,z}}{c}, \qquad u_0 = i\gamma,$$

$$v_{1,2,3} = w\, u_{1,2,3}, \qquad v_0 = u_0.$$

Тогда материальные уравнения Минковского принимают вид

$$H_{ik} v_k = \varepsilon F_{ik} u_k, \qquad (23а)$$

$$F_{ik} v_l + F_{kl} v_i + F_{li} v_k = \mu \left(H_{ik} u_l + H_{kl} u_i + H_{li} u_k \right). \qquad (23б)$$

Для тока имеем

$$S_i = \frac{\sigma}{c} F_{ik} u_k .$$

Поскольку

$$u_l v_l = -1, \qquad v_l v_l = -(1+m),$$

где

$$m = w \frac{u^2}{c^2} \gamma^2 (1-w),$$

то из (23б) имеем

$$\mathcal{H}_{ik}=\frac{1}{\mu}\left[(m+1)\mathcal{F}_{ik}+\varepsilon\mu\mathcal{F}_{k\ell}u_\ell u_i+\varepsilon\mu\mathcal{F}_{\ell i}u_\ell u_k-\mathcal{F}_{k\ell}v_i v_\ell-\mathcal{F}_{\ell i}v_k v_\ell\right]. \tag{24}$$

Выберем потенциалы так:

$$\mathcal{F}_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

В этом случае уравнения (21) удовлетворяются тождественно, а из (22) с учетом (24) получим

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{ik}}{\partial x_k}-\frac{\varepsilon\mu\, u_k u_\ell-v_k v_\ell}{m+1}\frac{\partial \mathcal{F}_{i\ell}}{\partial x_k}-\frac{\partial \mathcal{F}_{k4}}{\partial x_k}\frac{v_i u_4(1-w)}{m+1}=I_i, \tag{25}$$

где

$$I_i=\frac{4\pi}{c}\frac{1}{m+1}\left[\mu\left(j_i+\frac{1}{\varepsilon}u_i j_\ell v_\ell\right)-\frac{w}{\varepsilon}v_i j_\ell v_\ell\right].$$

После преобразований имеем следующее уравнение для потенциалов:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k}-\rho_{k\ell}\frac{\partial A_\ell}{\partial x_k}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}-\rho_{k\ell}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)A_i-$$

$$-\frac{v_i(1-w)u_4}{m+1}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}A_0-\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_0}A_k\right)=I_i,$$

где

$$\rho_{k\ell}=\frac{\varepsilon\mu u_k u_\ell-v_k v_\ell}{m+1}.$$

Наложим на потенциалы условие калибровки

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k}-\rho_{k\ell}\frac{\partial A_\ell}{\partial x_k}=0.$$

Тогда для потенциалов получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k} - \rho_{k\ell}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)A_i + \frac{v_i(1-w)u_0}{m+1}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}A_0 - \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_0}A_k\right) = I_i .$$

Ищем его решение в виде (27)

$$A_i = A_{i0}\exp\left\{ i(k_1 x + k_2 y + k_3 z) - \omega t\right\}.$$

Вычислим вторые производные, подставим их в (27) и пренебрежем членами

$$\frac{v_i(1-w)u_0}{m+1}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}A_0 - \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_0}A_k\right)$$

для упрощения выкладок (позднее будет показано, что они дают добавки второго порядка малости). Получим для плоских монохроматических волн следующее дисперсионное уравнение:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\Omega^2}{m+1}\left[\varepsilon\mu\left(\frac{\vec{u}\vec{k}}{c} - \frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{w\vec{u}\vec{k}}{c} - \frac{\omega}{c}\right)^2\right] = 0. \qquad (28)$$

Приближенное дисперсионное уравнение для волн в такой форме обладает тем преимуществом, что полученные на его основе соотношения между полями легко сравнить с известными результатами для резких границ, когда величина отношения в расчет не принимается.

Точное уравнение для потенциалов получим, введя тензор четвертого ранга

$$\varepsilon_{ikst},$$

равный

$$\varepsilon_{ikst} = \overset{*}{\mu}{}^{-1}\left(\delta_{is} - \Lambda\varepsilon\mu u_i u_s + \Lambda v_i v_s\right)\left(\delta_{kt} - \Lambda\varepsilon\mu u_k u_t + \Lambda v_k v_t\right),$$

$$\Lambda = (m+1)^{-1}. \qquad \overset{*}{\mu} = \mu\Lambda.$$

Тогда

$$\mathcal{H}_{ik} = \epsilon_{ikst} \mathcal{F}_{st},$$

и после преобразований

$$\left(\delta_{is} - \Lambda\varepsilon\mu u_i u_s + \Lambda v_i v_s\right)\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \Lambda\varepsilon\mu\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 + \Lambda\left(v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right]A_s - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k} - \Lambda\varepsilon\mu u_k u_t \frac{\partial A_t}{\partial x_k} + v_k v_t \Lambda \frac{\partial A_t}{\partial x_k}\right)\right\} = \frac{4\pi}{c}\overset{*}{\mu} j_i.$$

Используя условие калибровки (26), имеем уравнение для потенциалов

$$\left(\delta_{is} - P_{is}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - P_{kk}\right)A_s = I_i .$$

Преобразуем его, используя то обстоятельство, что можно одну из компонент потенциала в соответствии с калибровочными условиями выбрать произвольной. Положим $A_0 = 0$ и ограничимся случаем свободных электромагнитных полей $I_i = 0$. Трехмерный потенциал будет описываться уравнением

$$\left\{\left(\Delta - \frac{w}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{\varepsilon\mu - w}{1 - \frac{u^2}{c^2}w}\left[(\vec{u},\nabla) + \frac{\partial}{\partial t}\right]^2\right\}\vec{A} = 0, \qquad (29)$$

а калибровочные условия запишутся в виде

$$\operatorname{div}\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu - w}{1 - \frac{u^2}{c^2}w}\left[(\vec{u},\nabla) + \frac{\partial}{\partial t}\right]^2(\vec{u}\vec{A}) = 0. \qquad (30)$$

Для плоских монохроматических волн из (29) получим дисперсионное уравнение

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}w + \frac{\varepsilon\mu - w}{1 - \frac{u^2}{c^2}w}\left(\vec{k}\vec{u} - \omega\right)^2 = 0. \qquad (31)$$

Убедимся в его правильности прямым расчетом. Пусть нам задано дисперсионное уравнение для покоящейся изотропной среды

$$\vec{K}^2 - \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

Для заданного постоянного w перепишем его так:

$$\vec{K}^2 - w\frac{\omega^2}{c^2} - (\varepsilon\mu - w)\frac{\omega^2}{c^2} = 0. \qquad (32)$$

Поскольку взаимосвязь переменных для покоящейся и движущейся систем координат с отношением задается преобразованиями (9), а для частот выполняется (20), то, учитывая инвариантность выражения

$$\vec{K}^2 - w\frac{\omega^2}{c^2} = inv,$$

имеем из (32) в точности уравнение (31).

Сравним выражения (28) и (31). Проводя преобразования (31), убеждаемся в том, что добавка δ к (28) такова:

$$\delta = \Omega^2\left[w(1-w)\left(1 - \frac{c^2 K_z^2}{\omega^2}\right)\right]\frac{u^2}{c^2}.$$

Для малых значений скоростей движения $\frac{u}{c} \ll 1$ указанное выражение дает добавку второго порядка малости.

§ 5. Преобразование частот и волновых векторов при переходе света из покоящейся среды в движущуюся

Пусть плоскость границы раздела совпадает с плоскостью (x,y). Пусть из первой среды с диэлектрической проницаемостью ε_1 и магнитной проницаемостью μ_1, перемещающейся вдоль оси z со скоростью u_1, на границу раздела падает плоская монохроматическая волна с частотой ω_0 и с волновым вектором $\vec{K}_0$. Электрический вектор этой волны имеет вид

$$\vec{E}_0(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp\{i(K_{0x}x + K_{0z}z - \omega_0 t)\}.$$

Плоскость падения этой волны совпадает с плоскостью (x,z). При взаимодействии с границей раздела двух сред, движущейся вдоль оси z со скоростью $v_n = u_n$, в первой среде перед границей возникает отраженная волна

$$\vec{E}_1(\vec{r},t)=\vec{E}_1 \exp\left\{i\left(k_{1x}x+k_{1z}z-\omega_1 t\right)\right\},$$

а за границей раздела в среде с проницаемостями ε_2 и μ_2, движущейся вдоль оси z со скоростью u_2, появится преломленная волна

$$\vec{E}_2(\vec{r},t)=\vec{E}_2 \exp\left\{i\left(k_{2x}x+k_{2z}z-\omega_2 t\right)\right\}.$$

Частоты всех волн различны, в остальном отражение происходит так же, как и на покоящейся границе раздела: падающая волна трансформируется в одну преломленную и одну отраженную, а волновые векторы всех трех волн лежат в плоскости падения (x,z). Кинематику отражения и преломления волн рассчитаем с помощью уравнения (28) и кинематических инвариантов (19). Имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{c^2\vec{k}_j^2}{\omega_j^2}=1+\frac{\Omega_j^2}{m_j+1}\left[\varepsilon_j\mu_j\left(1-\beta_j\frac{ck_{jz}}{\omega_j}\right)^2-\left(1-w_j\beta_j\frac{ck_{jz}}{\omega_j}\right)^2\right],$$

$$\omega_j-ck_{jz}\beta_z=\omega_0-u_z k_{0z}=I_\omega, \qquad (33)$$

$$k_{jx}=k_{0x}=I_x,$$

где

$$\vec{k}_j^2=k_{jx}^2+k_{jz}^2, \quad \vec{\beta}_j=\frac{u_j}{c}\vec{e}_z, \quad \beta_z=\frac{u_z}{c}, \quad \beta_j=\frac{u_j}{c},$$

а индексы $j=1$ и $j=2$ относятся к параметрам сред и волн соответственно в первой и во второй средах. Так как

$$\frac{c\kappa_{jz}}{\omega_j} = \frac{1}{\beta_z} - \frac{I\omega}{\omega_j \beta_z}, \tag{34}$$

то

$$c^2\left(\kappa_{jx}^2 + \kappa_{jz}^2\right) = \omega_j^2 + \omega_j^2 \Omega_j^2 \frac{\varkappa_j + 1}{m_j + 1}\left(1 - 2\beta_j \frac{c\kappa_{jz}}{\omega_j} + \beta_j^2 \frac{c^2\kappa_{jz}^2}{\omega_j^2}\right) -$$
$$- \omega_j^2 \frac{\Omega_j^2}{m_j + 1}\left(1 - 2w_j\beta_j \frac{c\kappa_{jz}}{\omega_j} + w_j^2\beta_j^2 \frac{c^2\kappa_{jz}^2}{\omega_j^2}\right), \tag{35}$$

где

$$\varkappa_j = \varepsilon_j \mu_j - 1.$$

Решая (35) с учетом (34), получим

$$\omega_j = \frac{I\omega\Omega_j^2}{D_j}\left[1 + P_j \pm \beta_z \sqrt{(1 + \Pi_j) - D_j\left(cI_x/\Omega I\omega\right)^2}\right],$$

$$c\kappa_{jz} = \frac{I\omega\Omega_j^2}{D_j}\left[R_j \pm \sqrt{(1 + \Pi_j) - D_j\left(cI_x/\Omega I\omega\right)^2}\right], \tag{36}$$

где

$$P_j = \frac{\Omega_j^2}{m_j + 1}\left[(\varkappa_j + 1)\beta_j(\beta_z - \beta_j) - w_j\beta_j(\beta_z - w_j\beta_j)\right],$$

$$D_j = 1 - \Omega^2 \frac{\Omega_j^2}{m_j + 1}\left[(\varkappa_j + 1)(\beta_z - \beta_j)^2 - (\beta_z - w_j\beta_j)^2\right],$$

$$\Pi_j = \frac{\varkappa_j+1}{m_j+1} - \frac{1-w_j^2\beta_j^2}{m_j+1}\Omega_j^2 + \beta_j^2(1-w_j)\frac{\varkappa_j+1}{(m_j+1)^2}\Omega_j^4,$$

$$R_j = \beta_z + \Omega_j^2\frac{1}{m_j+1}\left\{(\varkappa_j+1)(\beta_z-\beta_j)-\beta_z(\beta_z-\beta_j w_j)\right\},$$

$$\Omega_j^{-2} = 1-\beta_j^2 w_j, \qquad \Omega^2 = 1-\beta_z^2.$$

Эти формулы справедливы для квазипоперечных волн с любой поляризацией, совместимой с уравнениями Максвелла. В случае, когда $W = 1$, они переходят в известные соотношения [I].

§ 6. Преобразование амплитуд волн при переходе света из покоящейся среды в движущуюся с учетом отношения

Для нахождения амплитуд отраженной и преломленной волн распишем с помощью уравнений Максвелла (I7) и материальных уравнений (I8) граничные условия (I6). Это удобно сделать для двух различных поляризаций падающих волн. В первом случае электрический вектор падающей волны перпендикулярен плоскости падения (E-поляризация), во втором случае магнитный вектор всех волн перпендикулярен плоскости падения (H –поляризация). Поскольку падающую волну с произвольной поляризацией электрического вектора всегда можно представить в виде суперпозиции волн с электрическими векторами, перпендикулярными плоскости падения и лежащими в этой плоскости, то решение задачи в указанных случаях позволяет вычислить амплитуды трансформированных волн при произвольной поляризации.

Случай E -поляризации

Пусть электрический вектор направлен вдоль оси y , т.е. перпендикулярен плоскости падения (x, z) . Тогда

$$\vec{E} = E\vec{e}_y, \qquad \vec{H} = H_x\vec{e}_x + H_z\vec{e}_z, \qquad \vec{D} = D_y\vec{e}_y,$$

$$\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_z\vec{e}_z, \quad [\vec{n},\vec{E}] = -E\vec{e}_x, \quad [\vec{n},\vec{H}] = H_x\vec{e}_y,$$

$$D_x = D_z = H_y = B_y = 0.$$

Из (I7), (I8) имеем

$$H_{jx} = \frac{\Omega_j^2}{\mu_j}\left\{\varepsilon_j\mu_j\beta_j\left(\beta_j\frac{ck_{jz}}{\omega_j} - 1\right) + \left(w_j\beta_j - \frac{ck_{jz}}{\omega_j}\right)\right\}E_j,$$

$$H_{jz} = \frac{ck_{jx}}{\mu_j\omega_j}E_j,$$

$$B_{jx} = -\frac{ck_{jz}}{\omega_j}E_j, \qquad B_{jz} = \frac{ck_{jx}}{\omega_j}E_j,$$

$$D_{jy} = \frac{\Omega_j^2}{\mu_j}\left\{\varepsilon_j\mu_j\left(1 - \beta_j\frac{ck_{jz}}{\omega_j}\right) + \beta_j w_j\left(\frac{ck_{jz}}{\omega_j} - \beta_j w_j\right)\right\}E_j,$$

где единичный вектор $\vec{n}$ нормали к поверхности раздела направлен вдоль оси z из первой среды во вторую, а $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ – единичные векторы соответствующих осей. Граничные условия (I6) означают непрерывность компонент двух векторов

$$\vec{Q} = [\vec{n},\vec{E}] - \beta_n\vec{B},$$

$$\vec{J} = [\vec{n},\vec{H}] + \beta_n\vec{D}.$$

В данном случае имеем

$$Q_{jx} = -(\omega_j - u_z k_{jz})\frac{E_j}{\omega_j} = -I_\omega\frac{E_j}{\omega_j},$$

$$Q_{jz} = -u_z k_{jx} \frac{E_j}{\omega_j} = -u_z I_x \frac{E_j}{\omega_j},$$

$$J_{jy} = -\frac{1}{\mu_j}\left\{(ck_{jz} - \beta_z \omega_j) - \varkappa_j \Omega_j^2 (\beta_z - \beta_j)(\omega_j - \beta_j c k_{jz}) + \right.$$

$$\left. + \beta_j \Omega_j^2 (1 - w_j)(\omega_j - \beta_j c k_{jz})\right\} \frac{E_j}{\omega_j}.$$

В силу инвариантности I_ω и I_x непрерывность вектора $\vec{Q}$ сводится к непрерывности величины $A_j = E_j/\omega_j$. Граничные условия для вектора $\vec{J}$ означают, что на границе раздела остаются непрерывными величины $J_{jy} = -a_j A_j$ для полных полей по обе стороны от границы раздела. Здесь

$$a_j = \frac{1}{\mu_j}\left\{(ck_{jz} - \beta_z \omega_j) - \varkappa_j \Omega_j^2 (\beta_z - \beta_j)(\omega_j - \beta_j c k_{jz}) + \right.$$

$$\left. + \beta_j \Omega_j^2 (1 - w_j)(\omega_j - \beta_j c k_{jz})\right\}.$$

Для определения амплитуд имеем следующую систему уравнений:

$$A_1^{(+)} + A_1^{(-)} = A_2^{(+)},$$

$$a_1^{(+)} A_1^{(+)} + a_1^{(-)} A_1^{(-)} = a_2^{(+)} A_2^{(+)}. \qquad (37)$$

Значки (+) и (-) означают направление волны по отношению к вектору нормали. Решая (37), получим

$$E_1 = -\frac{\omega_1}{\omega_0}\frac{a_2^{(+)} - a_1^{(+)}}{a_2^{(+)} - a_1^{(-)}} E_0 , \quad E_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}\frac{a_1^{(+)} - a_1^{(-)}}{a_2^{(+)} - a_1^{(-)}} E_0 . \tag{38}$$

Для случая H -поляризации граничные условия сводятся к системе (37), в которой происходит замена величин $\mathcal{A}_j$ на H_j/ω_j, а в соотношениях для a_j – соответственно ε_j на μ_j и μ_j на ε_j.

Случай H -поляризации

Пусть электрический вектор падающей волны лежит в плоскости падения (x, z). Из уравнений Максвелла и материальных соотношений Минковского следует

$$\vec{H} = H_y \vec{e}_y , \quad \vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_z \vec{e}_z , \quad \vec{K} = K_x \vec{e}_x + K_z \vec{e}_z ,$$

$$\vec{B} = B_y \vec{e}_y , \quad \vec{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_x \vec{e}_x + \mathcal{D}_z \vec{e}_z ,$$

$$\mathcal{D}_y = 0 , \quad B_x = H_x = B_z = H_z = 0 .$$

Задачу отражения и преломления удобно решать относительно неизвестных компонент магнитных полей вновь появившихся волн. Для этого все величины полей и индукций $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{\mathcal{D}}$, а также векторы $\vec{Q}$ и $\vec{J}$ нужно выразить через компоненту H_y магнитного поля, перпендикулярную плоскости (x, z).

Из уравнения

$$\vec{\mathcal{D}} = -\left[\frac{c\vec{K}}{\omega} , \vec{H} \right]$$

имеем

$$\mathcal{D}_x = \frac{c}{\omega} K_z H_y , \qquad \mathcal{D}_z = -\frac{c}{\omega} K_x H_y . \tag{39}$$

Из (39) вытекает, что $\vec{k}\vec{\mathfrak{D}} = 0$. Поскольку

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\mathfrak{D}} + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{w-\mu\varepsilon}{1-\beta^2 w}\left\{\beta^2\vec{\mathfrak{D}} - \vec{\beta}(\vec{\mathfrak{D}}\vec{\beta}) + [\vec{\beta}\vec{H}]\right\} \tag{40}$$

и

$$\vec{B} = \mu\vec{H} - \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{w-\mu\varepsilon}{1-\beta^2 w}\left\{w\beta^2\vec{H} + [\vec{\mathfrak{D}}\vec{\beta}] - w\vec{\beta}(\vec{H}\vec{\beta})\right\}, \tag{41}$$

то для составляющих полей имеем

$$B_y = \frac{\Omega^2}{\varepsilon}\left[\mu\varepsilon\left(1-\beta\frac{ck_z}{\omega}\right) + \beta w\left(\frac{ck_z}{\omega} - \beta w\right)\right]H_y,$$

$$E_x = \frac{\Omega^2}{\varepsilon}\left[-\varepsilon\mu\beta\left(\beta\frac{ck_z}{\omega} - 1\right) + \frac{ck_z}{\omega} - \beta w\right]H_y,$$

$$E_z = \frac{1}{\varepsilon}\mathfrak{D}_z.$$

Для векторов $\vec{Q}$ и $\vec{J}$ получим

$$J_x = -I_\omega\frac{H_y}{\omega_j},$$

$$J_z = -u_z I_x\frac{H_y}{\omega_j},$$

$$Q_y = \frac{1}{\varepsilon}\frac{H_y}{\omega}\left\{(ck_{jz} - \beta_z\omega_j) - \varkappa_j\Omega_j^2(\beta_z - \beta_j)(\omega_j - \beta_j ck_{jz}) + \right.$$
$$\left. + \beta_j\Omega_j^2(1-w)(\omega_j - \beta_j ck_{jz})\right\}. \tag{42}$$

Сравнивая величины векторов $\vec{Q}$ и $\vec{J}$ при $\vec{E}$ - поляризации и H - поляризации, получим, что

$$H_1 = -\frac{\omega_1}{\omega_0}\,\frac{b_2^{(+)} - b_1^{(+)}}{b_2^{(+)} - b_1^{(-)}}\,H_0, \qquad H_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}\,\frac{b_1^{(+)} - b_1^{(-)}}{b_2^{(+)} - b_1^{(-)}}\,H_0\,.$$

где

$$b_j = \frac{1}{\varepsilon_j}\Big\{\left(ck_{jz} - \beta_z\omega_j\right) - \varkappa_j\Omega_j^2\left(\beta_z - \beta_j\right)\left(\omega_j - \beta_j ck_{jz}\right) +$$

$$+ \beta_j\Omega_j^2\left(1 - w\right)\left(\omega_j - \beta_j ck_{jz}\right)\Big\}.$$

Итак, получены основные соотношения для частот, волновых векторов, амплитуд волн с учетом отношения. Для сравнения с экспериментом нужны дополнительные данные о распределении отношения по границе.

§ 7 . Увлечение света движущейся границей

Уравнение (29) определяет распространение свободных электромагнитных волн в движущейся среде при их взаимодействии с границей. Решим его. Будем искать вектор-потенциал $\vec{A}$ в виде плоской волны.

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right\}.$$

Подставим это выражение в (29). Получим

$$\left\{-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}w + \frac{\varepsilon\mu - w}{1 - \frac{u^2}{c^2}w}\left(\vec{k}\vec{u} - \omega\right)^2\right\}\vec{A}_0 \exp\left\{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)\right\} = 0 \quad (43)$$

Из соотношения (43) видно, что амплитуда $\vec{A}_0$ волны отлична от нуля только для тех волн, для которых

$$-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}w+\frac{\varepsilon\mu-w}{1-\frac{u^2}{c^2}w}\left(\vec{k}\vec{u}-\omega\right)^2=0.$$

В данное уравнение, связывающее волновой вектор $\vec{k}$ и частоту ω, входит скалярное произведение $\vec{k}\vec{u}$, а также отношение w. Это значит, что условия распространения волны зависят от того, какой угол образует направление распространения (волновой вектор $\vec{k}$) со скоростью среды $\vec{u}$ и как сильно действует граница на волну. Это обстоятельство отражает явление увлечения света движущейся средой. Получим конечные формулы для случая, когда $\beta=\frac{u}{c}$ является малой величиной и пренебрежем в дисперсионном уравнении членами со степенями β выше первой. Получим

$$\omega^2-2(\vec{k}\vec{u})\left(1-\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}\right)\omega-\frac{k^2}{\varepsilon\mu}=0.$$

Решение этого уравнения дает следующую зависимость фазовой скорости от скорости среды, показателя преломления $n=\varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0$ и отношения

$$v_\varphi=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{n}+v\cos\theta\left(1-\frac{w}{n^2}\right). \tag{44}$$

Множитель $\left(1-\frac{w}{n^2}\right)$ есть коэффициент увлечения света с учетом отношения.

Интересно рассмотреть случай $n=1$. Из (44) получим, что имеет место принцип постоянства скорости света в вакууме, если осуществляется переход света из одной системы отсчета в другую в вакууме и рассматривается конечная стадия такого перехода.

Литература

1. С.Н.Столяров. Эйнштейновский сборник 1975-1976. М.,"Наука", 1978.
2. Л.А.Островский, Н.С.Степанов. Изв. вузов. Радиофизика, 14, 489, 1971.

3. Ю.А.Кравцов, Н.С.Степанов. ЖЭТФ, 57, вып. 5(II), I730, 1969.
4. A Kaufman. Ann. of Phys., I8, 264, I962.
5. Л.А.Островский. ЖЭТФ, 6I, вып. 2(8), 55I, I97I.
6. П.К.Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., "Наука", I964.
7. В.Паули. Теория относительности. М., Гостехиздат, I947.
8. Р.Беккер. Электронная теория. М.-Л., ОНТИ, I936.
9. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, I957.
10. Б.М.Болотовский, С.Н.Столяров. Эйнштейновский сборник I974. М., "Наука", I976.

В.Н. Барыкин

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЕТА
С ИНЕРЦИАЛЬНО ДВИЖУЩЕЙСЯ
НЕРЕЗКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Препринт №2

Редактор Михалева Т.Г. Худ. редактор Гущева Э.Б.
Техн. редактор Шейбак З.В. Корректор Сауляк С.И.

Подписано в печать 4.0I.8I г. АТ 094I0.
Формат 60х84 I/I6.Бумага типографская №2.Печать офсетная.
Печ.л. I,7. Уч.-изд.л. I,4. Тираж 200 экз. Заказ 25.
Бесплатно.

Редакционно-издательский отдел Института тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова АН БССР

Отпечатано на ротапринте Института тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова АН БССР, Минск, Подлесная, I5