УДК 530.12

БАРЫКИН В.Н.

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ И ПРИЛОЖЕНИЯ SH – СИММЕТРИЙ

Указан метод получения активных SH-симметрий из обычных пространственно-временных S-симметрий на основе функциональной деформации их генераторов Γ_s и параметров θ_s. Из S-преобразований Лорентца получена SH-симметрия Лорентца, содержащая функцию управления w несобственной инерцией электромагнитного поля. Найдена функция Грина для обобщенной системы уравнений электродинамики Максвелла. Рассмотрены случаи досветовых, световых и сверхсветовых движений. Указаны некоторые черты распространения излучения в среде при медленном изменении w. Использованы функционалы w(x), конкретизирующие состояния объектов или явлений. Показано, что группа изометрий ассоциирована с релаксационными физическими процессами.

ВВЕДЕНИЕ

При анализе физических задач приходится иметь дело с системой неизоморфных симметрий, объединенных в одно семейство, зависящее от дополнительных параметров. В данной лекции рассмотрен подход, позволяющий построение таких симметрий, привычных для электродинамики. Намечены пути дальнейшего продвижения в указанном направлении. Показано, что SH-симметрии являются физическим углублением *S*-симметрий **(**меняется их качество на основе учета новых физических факторов, ассоциированных с задачей) в том смысле, что они содержат в себе дополнительные возможности для анализа и интерпретации физических явлений. В простейшем случае углубление базируется на скалярной функции. Допустимо также использование производных от фактора активности. В сложных ситуациях, очевидно, понадобится использовать векторы и тензоры, характеризующие активность исследуемых физических конструкций и их качеств.

1. УГЛУБЛЕНИЕ СИММЕТРИЙ

Рассмотрим простой случай. Пусть модель физического явления задана уравнениями

$$L\Psi = 0\,,$$

где L - система дифференциальных операторов, Ψ - волновая функция. Пространственно-временная или *S*-симметрия модели содержит дифференциальные операторы Q , относительно которых инвариантны уравнения физической модели и которые переводят друг в друга их решения. Тогда

$$LQ\,\Psi - Q\,L\,\Psi = 0\,.$$

S-симметрии соответствуют инфинитезимальные генераторы Γ_s и параметры группы Θ^s . Она имеет вид

$$dx^{\mu}{}' = \left(I + \Gamma_s\Theta^s\right)^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}\,.$$

Если модель физического явления может быть представлена в группе G в форме *GAG*-модуля, как указано в главе 3, назовем ее *группой заполнения физической модели*. Будем считать, что генераторы ее алгебры A являются частным случаем параметрически зависимых матриц $Q \in \widetilde{Q}$, инвариантные полиномы $Sp\,\widetilde{Q}$ и $Det\,\widetilde{Q}$ для которых переменны и удовлетворяют уравнениям динамики. Пусть инвариант $Sp\,\widetilde{Q} = \widetilde{\sigma}$ характеризует пространство событий *SE* для физической модели. Пусть инвариант

$$Det\,\widetilde{Q} = \widetilde{w}$$

рассматривается как фактор динамики инерции явления. Используем обобщенные генераторы алгебры заполнения и параметры симметрии:

$$\widetilde{\Gamma}_s = \widetilde{Q}\,\Gamma_s\,\widetilde{Q}^{-1}, \quad \widetilde{\Theta}^s = \underset{(1)}{F}\,\Theta^s_{fs} + \underset{(2)}{F}\,\Theta^s_m.$$

Пусть

$$Q \circ Q^{-1} = I, \underset{(1)}{F} + \underset{(2)}{F} = 1.$$

Рассмотрим новые инфинитезимальные преобразования

$$dx^{\mu}{}' = \left(I + \widetilde{\Gamma}_S\,\widetilde{\Theta}^s\right)^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}.$$

В них генераторы $\widetilde{\Gamma}_s$ и *параметры симметрии* $\widetilde{\Theta}^s$ *зависят от значений* $\widetilde{w}$*,* $\widetilde{\sigma}$ *инвариантных полиномов*. Полученные таким образом симметрии "сплетают" *S*-симметрию с квазигруппой управления инерцией *w*, которая соответствует инвариантному скаляру

$$w = \frac{Det\widetilde{Q}}{DetQ}.$$

Формы и виды "сплетения" симметрий могут быть разными. Предложенный вариант задает одну конкретную возможность. В рамках принятых допущений (поскольку $\widetilde{\Gamma}_S$ и $\widetilde{\Theta}^s$ зависят от *w*) имеем нелинейную зависимость *SH*-симметрий от *w* и *5-мерное пространство* основных состояний. Действительно,

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\left(1 - w\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \frac{dt - dxw\dfrac{v}{c^2}}{\left(1 - w\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad dw' = dw,$$

где $v = (1-w)u_{fs} + wu_m$ или $v = v_{\xi} = u_{fs} + wu_m$. Можно принять точку зрения, что исходное физическое пространство всегда было пятимерно, охватывая и проявляя место R^3, время T^1, отношение *w*. Принимая *t* и *w* за основные координаты исходного расслоенного пространства, мы имеем их прямое произведение $R^3 \times (T, w)$. Тонкость состоит в том, что не только генераторы SH-симметрий, но и параметры Θ^s зависят о*т* *w*. Интересен случай, когда между собой сплетены несколько симметрий.

Рассмотрим вариант *пассивной SH-симметрии*, полагая $w = const$. Отношению

$$w = 1 - \exp[-P_0(n-1)]$$

соответствуют разные физические условия:

а) $w = 0$ - вакуум;

б) $0 < w < 1$ - разреженная газовая среда;

в) $w = 1$ - "плотная" среда.

При $v = const$ *SH*-симметрии задают преобразования Лорентца, обобщенные с учетом w. Они переходят в стандартные при замене $\widetilde{c} = c/\sqrt{w}$, что позволяет легко вывести уравнения Максвелла, обобщенные с учетом w. Соотношения для полей и индукций содержат скорость $\vec{u}$, которая имеет *формальный* смысл, потому что ни преобразования координат, ни указанная замена не имеют средств раскрыть ее. Дополнительный анализ инерции электромагнитного поля, выполненный в $[1]$, показал, что для кинематики достаточно взять

$$\vec{u} = (1-w)\vec{u}_{fs} + w\vec{u}_m ,$$

где $\vec{u}_{fs}$ - скорость первичного источника излучения, $\vec{u}_m$ - скорость физической среды. В общем случае недостаточно знать и использовать только SH-симметрию. Для согласующейся с опытом модели нужны дополнительные физические предположения. Фактически мы ввели $w(\vec{x},t)$ как *"управляющее поле"*, говоря словами Г. Вейля, учитывая новые грани "физического поля состояний" и конкретизируя взаимодействие электромагнитного поля с материей.

Мы понимаем теперь, что каноническая симметрия Лорентца является «ростковой точкой» семейства параметрических симметрий. Их новые стороны и свойства способны учитывать новые стороны и свойства исследуемых конструкций и их физических движений.

Как показано ранее, симметрия Лорентца, зависимая от активного показателя отношения W, индуцирующая указанную выше связь скоростей, соответствует только релаксационным процессам для света. Понятно, что этот класс процессов важен, но он не является единственным. По этой причине мы обязаны изучать все многообразие процессов переноса, выходя за рамки преобразований Лорентца. На роль такой обобщенной симметрии естественно претендует унимодулярная и линейная группы, для которых группа Лорентца является их нормальной подгруппой.

2. НОВЫЕ РЕШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ МАКСВЕЛЛА

Рассмотрим поведение электромагнитного поля в ситуациях, соответствующих разным значениям $w = const$. Запишем полную систему уравнений электродинамики в $R^3 \times T^1$:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\frac{\pi}{c}\vec{j},$$

$$\vec{D} + w[\vec{\beta} \times \vec{H}] = \varepsilon\left(\vec{E} + [\vec{\beta} \times \vec{B}]\right), \quad \vec{B} + w[\vec{E} \times \vec{\beta}] = \mu\left(\vec{H} + [\vec{D} \times \vec{\beta}]\right),$$

$$\vec{u}_{in} = (1-w)\vec{u}_{fx} + w\vec{u}_m, \quad \vec{\beta} = u_{in}/c,$$

$$w = 1 - \exp[-P_0(n-1)], \quad P_0 \approx 7 \cdot 10^4 .$$

Здесь $(\vec{E},\vec{B},\vec{H},\vec{D})$ - поля и индукции, $(\vec{j},\rho)$ - плотности токов и зарядов, $\vec{\beta} = \vec{u}_{in}/c$. Найдем ее решения для фиксированных значений $w = [0 \div 1]$. Им соответствует распространение излучения в вакууме, разреженном газе постоянной плотности или однородной "плотной" среде. Введем векторный $\vec{A}$ и скалярный φ потенциалы, полагая

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Уравнения

$$L\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\left\{\vec{j} + \frac{k\Gamma^2}{\chi + w}\frac{u_{in}}{c}\left(w\vec{u}_{in}\cdot\vec{j} - c^2\rho\right)\right\},$$

$$L\varphi = -4\pi\mu\frac{\Gamma^2}{w+\chi}\left\{\rho\left(1 - \varepsilon\mu\frac{u^2{}_{in}}{c^2}\right) + \chi\frac{\vec{u}_{in}\cdot\vec{J}}{c^2}\right\}$$

содержат

$$L = \left(\Delta - \frac{w}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \chi\frac{\Gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_{in}\cdot\nabla\right)^2,$$

$$\chi = \varepsilon\mu - w, \qquad \Gamma^2 = (1 - w\beta^2)^{-1}.$$

Условие калибровки вида

$$\left(\nabla\cdot\vec{A} + \frac{w}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \frac{\chi\Gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_{in}\nabla\right)(\vec{u}_{in}\vec{A} - c\varphi) = 0$$

упростило их. Проанализируем распространения излучения от δ - образного мгновенного источника. Найдем функцию Грина для уравнений, полагая, что среда не имеет дисперсии, а ось Z цилиндрической системы координат направлена по скорости $\vec{u}_{in}$. Имеем

$$G_0(\vec{r},t) = 16\pi^4\mu(r^2 + \xi^2)^{-1/2}\delta\left(t - \frac{1}{c}\frac{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}{(1 - w\beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(r^2 + \xi^2\right)^{1/2}\right),$$

где $\xi = z - \dfrac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}u_{in}t,\ r^2 = \rho^2\dfrac{\varepsilon\mu(1 - w\beta^2)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}.$

При $\beta = 0$ получим

$$G_0(\vec{r},t) = 16\pi^4\mu\frac{1}{R}\delta\left(t - \frac{R\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\right),$$

где $R = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ - расстояние от источника до точки наблюдения. В общем случае функция Грина отлична от нуля на эллипсоиде вращения, ось симметрии которого совпадает со скоростью $\vec{u}_{in}$. Анализ показал, что его центр перемещается со скоростью

$$u_0 = \frac{u_{in}(\varepsilon\mu - w)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}.$$

Для групповой скорости поля в нерелятивистском приближении модель дает следующую зависимость от w, $\vec{u}_{fs}$, $\vec{u}_m$:

$$\vec{v}_g = \frac{c}{n}\frac{\vec{k}}{k} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right)\left[\vec{u}_{fs}(1 - w) + w\vec{u}_m\right].$$

Групповая скорость поля зависит от показателя преломления n и от показателя отношения w. Обобщенный множитель Френеля вида $\left(1 - \dfrac{w}{n^2}\right)$ косвенно свидетельствует о том, что часть скоростей в динамическом процессе переходит в частоту. Из анализа четырехметрик, которые входят в структуру уравнений электродинамики, следует, что метрика Евклида равноправна с метрикой Минковского. По этой причине становится возможным рассмотрение ситуаций, когда отношение становится отрицательным. Рассмотрим вариант, когда $w = -w_*$. Тогда получим, например, скорость

$$\vec{v}_g = \frac{c}{n_*}\frac{\vec{k}}{k} + \left(1 + \frac{w_*}{n_*^{\ 2}}\right)\left[\vec{u}_{fs}\left(1 + w_*\right) - w_*\vec{u}_m\right],$$

которая задает качественно новое поведение света. Вероятно, оно может реализоваться либо внутри частицы света, либо в особых условиях вне ее.

Найдем решения обобщенной системы уравнений Максвелла при условии незначительного изменения параметров среды на расстояниях порядка длины волны. Тогда частота ω и волновой вектор $\vec{k}$ будут связаны дисперсионным уравнением вида

$$c^2k^2 = w\omega^2 + \Gamma^2(\varepsilon\mu - w)(\omega - \vec{k}\cdot\vec{u}_{in})^2.$$

Из него следует выражение для групповой скорости поля. Имеем

$$\vec{v}_g = c\frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} = c\frac{\vec{k} + k\Gamma^2c^{-2}\vec{u}_{in}(\omega - \vec{k}\cdot\vec{u}_{in})}{\dfrac{\omega\, w}{c} + k\Gamma^2c^{-1}(\omega - \vec{k}\cdot\vec{u}_{in})}.$$

Рассмотрим распространения света в вакууме. Тогда

$$\vec{v}_\phi = \left\{c + (1-w)\,u\cos\Theta\right\}\frac{\vec{k}}{k}, \qquad \vec{v}_g = \vec{c} + (1-w)\,\vec{u}\,.$$

При $w = 1$ скорость света не зависит от величины $\vec{u}$, при $w = 0$ имеет место сложение скоростей по векторному закону. Величина $\xi = 1 - w$ дает меру влияния скорости $\vec{u}$ на скорость поля. В вакууме, из физических соображений, скорости $\vec{u}$ соответствует скорость движения источника поля. Если w=1, эта скорость не проявляется в экспериментах, если $w = 0$, то ее можно обнаружить.

Рассмотрим теперь распространение электромагнитного поля в случае, когда происходит медленное изменение w. Будем считать, что справедливы материальные уравнения, полученные ранее. Пусть выполняется приближение геометрической оптики, в котором w, $\vec{k}$ локально постоянны. Выразим индукции через поля (с точностью до членов третьего порядка по β):

$$\vec{B} = \frac{1}{1 - \varepsilon\mu\beta^2}\left\{\mu(1 - w\beta^2)\vec{H} + (\varepsilon\mu - w)[[\vec{E}\cdot\vec{\beta}] - \vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{H})]\right\},$$

$$\vec{D} = \frac{1}{1 - \varepsilon\mu\beta^2}\left\{\varepsilon(1 - w\beta^2)\vec{E} + (\varepsilon\mu - w)[[\vec{\beta}\cdot\vec{H}] - \vec{\beta}(\beta\cdot\vec{E})]\right\}.$$

Заметим, что если $\varepsilon = \mu = w = 1$, отсюда следуют вакуумные связи, соответствующие группе Лорентца. Это физически бессмысленно, потому что при $\varepsilon = \mu = 1$ не может быть выполнено условие $w = 1$.

Заметим, что плотность энергии электромагнитного поля, выражаемая стандартной формулой

$$W = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{B} + \vec{H}\vec{D}\right),$$

является сложной функцией, зависящей от скоростей, от показателей преломления n и отношения w , что естественно предполагает изучение динамики частоты поля.

Рассмотрим случай малых скоростей с $\beta^2 << 1$. Тогда

$$\vec{B} = \mu\,\vec{H} + [\vec{G}\times\vec{E}], \qquad \vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} - [\vec{G}\times\vec{H}],$$

где $\vec{G} = -(\mu\varepsilon - w)\vec{\beta}$. Получим для луча локальное дисперсионное уравнение

$$(\vec{k} - \vec{G})^2 = n^2,$$

где $\vec{k} = \nabla\psi, \psi$ - эйконал, n - показатель преломления. Ему соответствует гамильтониан

$$H = 0.5[(\vec{K} - \vec{G})^2 - n^2].$$

Из уравнений Гамильтона-Якоби для H следует, что в области с изменением w касательный к лучу вектор $d\vec{r}/ds$ не параллелен градиенту эйконала, а изменение импульса определяется поведением $\vec{G}$.

Чтобы было более удобно анализировать частные случаи, преобразуем функцию Грина. Используем соотношение из теории δ - функций, полагая

$$\delta(f(t)) = \sum_s \frac{\delta(t - t_s)}{|f'(t_s)|},$$

где $f(t) = t - \frac{1}{c}\frac{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}{(1 - w\beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu}}\left\{\rho^2\frac{\mu(1 - \mu\beta^2)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2} + \left(z - \frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}ut\right)^2\right\}^{1/2}$, $f'(t) = \frac{df}{dt}$,

t_s - корень уравнения. Для корней имеем

$$t_{1,2} = \frac{1}{c}\frac{-(\varepsilon\mu - w)\beta z \pm \sqrt{\varepsilon\mu}(1 - w\beta^2)\left[z^2 + \rho^2(1 - \varepsilon\mu\beta^2)/(1 - w\beta^2)\right]^{1/2}}{1 - \varepsilon\mu\beta^2}.$$

Значения $|f'(t_s)|$ оказываются одинаковыми. Имеем

$$|f'(t_1)| = |f'(t_2)| = a\left(z^2 + b\left(1 - a^2 z^2\right)\right)^{1/2},$$

где $a = \frac{(\varepsilon\mu - \beta^2 w^2)c^{-1}}{(1 - w\beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu}}$, $b = \frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}$. Окончательный вид функции Грина запишем, используя функцию

$$\operatorname{sgn} a = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$G_0(\vec{r}, t) = 16\pi^4\mu\frac{0.5(1 + \operatorname{sgn} t_1)\delta(t - t_1) + 0.5(1 + \operatorname{sgn} t_2)(\delta(t - t_2))}{\left[z^2 + \left[(1 - \varepsilon\mu\beta^2)/(1 - w\beta^2)\right]\rho^2\right]^{1/2}}.$$

Множители перед δ - функциями обеспечивают выключение тех значений, для которых t_1 или t_2 становится отрицательным. Рассмотрим частные случаи, соответствующие различным значениям скорости $\vec{u}$ и фазовой скорости $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Вариант 1: Досветовые скорости при $u \langle c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. После преобразований получим

$$G_0(\vec{r}, t) = 16\pi^4\mu\,\delta(t - t_1)\left(z^2 + \frac{1 - \varepsilon\mu\beta^2}{1 - \beta^2 w}\rho^2\right)^{-1/2}.$$

Вариант 2: Световое движение при $u = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Тогда

$$t_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{2c}\left[(1+\frac{w}{\varepsilon\mu})z+\frac{\rho^2}{2}\right], \qquad t^2=\infty .$$

Функция Грина

$$G_0(\vec{r},\ t_1)=\frac{16\pi^4\mu}{z}\delta(t-t_1)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дан алгоритм углубления симметрии Лоренца. Показано, что он в состоянии порождать семейство неизоморфных симметрий. Рассмотрены приложения новой симметрии к электродинамике Максвелла. Показана возможность описания динамического процесса на основе обобщенной симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барыкин В.Н. Электродинамика Максвелла без относительности Эйнштейна. М. : УРСС, 2005, -182 с.