УДК 530.12

БАРЫКИН В.Н.

К СОГЛАСОВАНИЮ ГАЛИЛЕЕВСКОЙ И ЛОРЕНЦОВСКОЙ ФОРМИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Рассмотрено дополнение дифференциальных уравнений Максвелла материальными уравнениями, при котором полная система форминвариантна относительно группы Галилея. Проведено сравнение данного варианта с обобщением Герца, а также с лорентцинвариантный ситуацией. Сделан вывод, что, указанная пара является частным случаем более общей модели. Выведены обобщенные уравнения для четырехпотенциала.

ВВЕДЕНИЕ

Физика принципа относительности состоит в реализации наблюдения, что поведение физических изделий подчинено «одинаковым законам» как в случае относительного покоя, так и в случае движения с постоянной скоростью, если нет внешних воздействий. Математика принципа относительности состоит в условии форминвариантности уравнений, описывающих динамику исследуемых изделий. Первым известным примером является инвариантность уравнений динамики Ньютона относительно преобразований группы Галилея. В начальной стадии развития теории относительности в роли кинематической группы выступала группа Галилея. Доказательство форминвариантности уравнений электродинамики в вакууме привело к «замене» кинематической группы Галилея на Кинематическую группу Лоренца. В обоих случаях одними из параметров этих групп являются скорости, поэтому группы называются кинематическими. Поскольку указанные группы неизоморфны, нужно было определиться, что делать с группой Галилея? Была принята точка зрения, что она пригодна в физике для малых скоростей, но непригодна для больших скоростей. Поскольку в электродинамике реализуются большие скорости, для группы Галилея в ней не находилось места. В данной лекции показано, что реальная ситуация выглядит совсем иначе. И группа Галилея, и группа Лоренца являются точными форминвариантными симметриями для уравнений электродинамики Максвелла. Они различны потому, что соответствуют разным физическим условиям, которые реализуются в эксперименте и которые они способны учитывать, дополняя друг друга. В этой связи требуется провести детальный анализ их математических и физических различий. Ситуация выглядит так: электродинамика может быть обобщена таким образом, что и группа Лоренца и группа Галилея наполнены физическим содержанием.

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ, ФОРМИНВАРИАНТНАЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ

Максвелл предложил вариант электродинамики для «покоящихся сред»: модель построена так, что ни скорости движения физических сред, ни скорости первичных и вторичных источников излучения, ни скорости измерительных устройств, равно как и факторы, на них влияющие, не учитываются. Аналогичное замечание справедливо для ускорений. Так произошло потому, что тогда отсутствовали как экспериментальные данные, так и физические представления о том, как «сработают» на практике указанные обстоятельства. Только в начале 20 века возникла возможность и потребность систематического изучения данного круга вопросов. Проблему можно сформулировать так: обобщить физические модели, в частности, модель электромагнитных явлений, учитывая все многообразие скоростей, ускорений и движений более высоких рангов, а также факторов, влияющих на них. Реально за 100 лет неполно изучена лишь проблема скоростей, даже она оказалась достаточно сложной.

Исторически первый вариант галилеевски инвариантной электродинамики был предложен Герцем. Сущность его сводилась к дополнению дифференциальных уравнений Максвелла "конвективными членами"

$$rot[\vec{D},\vec{u}],\ \vec{u}\ div\ \vec{D},\ rot[\vec{B},\vec{u}].$$

Была предложена модель вида

$$rot\,\vec{H}=\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+rot[\vec{D},\vec{u}]+\vec{u}\,div\,\vec{D}+\vec{j}\right\},$$

$$rot\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+rot[\vec{B},\vec{u}]\right\},$$

$$div\ \vec{D}=\rho,\quad div\,\vec{B}=0.$$

При преобразованиях координат и времени согласно группе Галилея имеем связь компонент скоростей

$$u'_x=u_x-v,\quad u'_y=u_y,\quad u'_z=u_z.$$

Убедимся в инвариантности системы. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial M_z}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial z}\right),$$

где

$$M_x=B_yu_z-B_zu_y,\quad M_y=B_zu_y-B_xu_z,\quad M_z=B_xu_y-B_yu_x.$$

Потребуем, следуя Герцу

$$\vec{E}'=\vec{E},\quad \vec{D}'=\vec{D}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t}=-v\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial t'},$$

а

$$\frac{\partial M_z}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial z}=\frac{\partial M'_z}{\partial y'}-\frac{\partial M'_y}{\partial z'}-v\left(\frac{\partial B'_y}{\partial y'}+\frac{\partial B'_z}{\partial z'}\right),$$

получим

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'}-\frac{\partial E'_y}{\partial z'}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B'_x}{\partial t'}+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial M'_z}{\partial y'}-\frac{\partial M'_y}{\partial z'}\right)-\frac{v}{c}\left(\frac{\partial B'_x}{\partial x'}+\frac{\partial B'_y}{\partial y'}+\frac{\partial B'_z}{\partial z'}\right).$$

Условие инвариантности $div\,\vec{B}'=div\,\vec{B}$ очевидно. Остальные уравнения анализируются и проверяются аналогично. Заметим, что связи полей и индукций в этой модели не предложены, а скорости учитываются через введение конвективных слагаемых в дифференциальные уравнения Максвелла.

Однако следствия из теории Герца вступают в противоречие с известными экспериментальными данными [1]. Основная причина этого в наличии скорости $\vec{u}$, входящей в дифференциальные уравнения электродинамики, которую следует интерпретировать как скорость эфира, полностью увлекаемого телами.

Новая модель галилеевски инвариантной электродинамики получается из электродинамики Максвелла для покоящихся сред, если из физических соображений в уравнениях Максвелла можно пренебречь либо $\partial \vec{H}/\partial t$ либо $\partial \vec{E}/\partial t$. Они называются "электрическим" и "магнитным" пределами, соответствуют практическим ситуациям, позволяя упростить решение некоторых задач. Эти случаи рассмотрены в [2].

Вопрос о галилеевски инвариантной электродинамике сред изучен также в [3]. Суть подхода сводится к рассмотрению уравнений электродинамики движущихся сред в косоугольной системе координат. В частности, в этом случае из материальных уравнений для покоящейся среды при использовании группы Галилея следуют новые материальные уравнения, причем полная система уравнений форминвариантна относительно группы Галилея. Для получения результатов, согласующихся с экспериментом, авторы требуют дополнительного перерасчета полученных решений с учетом симметрии относительно группы Лорентца. Другими словами, материальные уравнения электродинамики вида

$$\vec{D} = \vec{D}\left(\vec{E}, \frac{\vec{u}}{c}\right),\ \vec{B} = \vec{B}\left(\vec{H}, \frac{\vec{u}}{c}\right)$$

рассматриваются как формальные связи, не отвечающие реальной экспериментальной ситуации.

Примем предположение: возможно нахождение новой системы уравнений электродинамики, форминвариантной относительно группы Галилея, которой соответствуют физические ситуации, допускающие экспериментальную проверку [4].

Покажем, что уравнения Максвелла совместно с соотношениями между полями и индукциями

$$\vec{D} = \varepsilon\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right]\right),\quad \vec{B} = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D}, \frac{\vec{u}}{c}\right]\right),$$

где ε, μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\vec{u}$ - некоторая скорость движения, физический смысл которой необходимо выяснить, форминвариантны относительно группы Галилея. Пусть декартова система координат K' движется вдоль оси OX системы K со скоростью v. Определим соотношения между частными производными и компонентами скорости

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}.$$

Используя преобразования уравнений Максвелла и требуя их инвариантности, получим связи полей и индукций:

$$E'_x = E_x,\quad E'_y = E_y - \frac{v}{c}B_z,\quad E'_z = E_z + \frac{v}{c}B_y,$$

$$B'_x = B_x,\quad B'_y = B_y,\quad B'_z = B_z,$$

$$H'_x = H_x,\quad H'_y = H_y + \frac{v}{c}D_z,\quad H'_z = H_z - \frac{v}{c}D_y,$$

$$D'_x = D_x,\quad D'_y = D_y,\quad D'_z = D_z,\quad \rho' = \rho.$$

Нештрихованные величины выражаются через штрихованные соотношениями, в которых изменены знаки перед скоростью v, именно

$$\vec{B} = \vec{B}'\quad,\quad \vec{D} = \vec{D}',\quad \vec{E} = \vec{E}' - \left[\frac{\vec{v}}{c}, B'\right],\quad \vec{H} = \vec{H}' + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{D}\right].$$

Докажем инвариантность материальных уравнений. Подставим в них указанные соотношения для полей. Получим

$$\vec{D}' = \varepsilon\left(\vec{E}' + \left[\frac{\vec{u}'}{c}, \vec{B}'\right]\right),\quad \vec{B}' = \mu\left(\vec{H}' + \left[\vec{D}', \frac{\vec{u}'}{c}\right]\right).$$

Доказательство инвариантности полной системы уравнений электродинамики завершено. Рассмотрим вопрос о галилеевски инвариантной формулировке дуально симметричной электродинамики. Как показано в [5], дуально ковариантна система уравнений

$$rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_e\right), \quad rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{j}_g\right),$$

$$div\,\vec{B} = \rho_g\,, \quad div\,\vec{D} = \rho_e\,,$$

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} + \gamma\,\vec{H}\,, \quad \vec{B} = \mu\,\vec{H} + \gamma\,\vec{E}\,,$$

где ρ_e, ρ_g - плотности электрического и магнитного зарядов, $\vec{j}_e$, $\vec{j}_g$ - плотности соответствующих токов. Величина γ выражается через электрический e и магнитный g заряды соотношением $\gamma = (\varepsilon - \mu)\dfrac{e}{g} - g^2$. Для записи материальных уравнений в галилеевски инвариантном виде сначала преобразуем их. Пусть

$$\vec{D} = \left(\varepsilon - \frac{\gamma^2}{\mu}\right)\vec{E} + \frac{\gamma}{\mu}\vec{B}, \quad \vec{B} = \left(\varepsilon - \frac{\gamma^2}{\mu}\right)\vec{H} + \frac{\gamma}{\mu}\vec{D}\,.$$

Используя результаты предыдущего анализа, запишем их в галилеевски инвариантном виде

$$\vec{D} = \left(\varepsilon - \frac{\gamma^2}{\mu}\right)\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right]\right) + \frac{\gamma}{\mu}\vec{B}\,,$$

$$\vec{B} = \left(\mu - \frac{\gamma^2}{\varepsilon}\right)\left(\vec{H} + \left[\vec{D}, \frac{\vec{u}}{c}\right]\right) + \frac{\gamma}{\varepsilon}\vec{D}\,.$$

При $\vec{u} = 0$ получим соответствующие выражения для покоящейся среды. Используя связь полей и индукций, подставим их в уравнения Максвелла. Тогда

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,,\; div\,\vec{B} = 0\,,$$

$$rot\,\vec{B} + rot\left\{\left[\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right]\right]\frac{\vec{u}}{c}\right\} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right] + \vec{j}\,,$$

$$div\,\vec{E} + div\left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right] = \rho\,.$$

Полученная система аналогична уравнениям для электромагнитного поля в среде, "поляризация" $\vec{P}$ и "намагниченность" $\vec{M}$ которой задаются выражениями

$$\vec{P} = \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right], \quad \vec{M} = \left[\left(\vec{E} + \vec{P}\right), \frac{\vec{u}}{c}\right].$$

Выведем уравнения для потенциалов в галилеевски инвариантной электродинамике. Введем по обычной схеме

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\,, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}\,.$$

Тогда одна пара уравнений Максвелла удовлетворяется тождественно, а из уравнений

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,, \quad \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$$

совместно с материальными уравнениями следуют уравнения для $\vec{A}$, φ. Тогда

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu} - \nabla \times \left(\vec{D} \times \frac{\vec{u}}{c}\right) = 4\frac{\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,, \quad \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho\,.$$

Согласно формулам векторного исчисления

$$\nabla \times \left(\vec{D} \times \frac{\vec{u}}{c} \right) = \left(\frac{\vec{u}}{c} \cdot \nabla \right) \vec{D} - \frac{\vec{u}}{c} \left(\nabla \cdot \vec{D} \right) = \left(\frac{\vec{u}}{c} \cdot \nabla \right) - \frac{\vec{u}}{c} 4\pi\rho ,$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) = -\frac{\vec{u}}{c} \cdot \nabla \times \vec{B} .$$

Отсюда

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \mu \left(\vec{j} - \vec{u}\rho \right) + \frac{\mu\varepsilon}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right] \right),$$

$$\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\vec{u}}{c} \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho .$$

Запишем выражение

$$\vec{K} = \frac{\mu\varepsilon}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right] \right)$$

через потенциалы $\vec{A}$ и φ. Тогда

$$\vec{K} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right)^2 \vec{A} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \nabla \left(c\varphi - \vec{u}\,\vec{A} \right).$$

Сгруппируем члены. Для потенциала $\vec{A}$ получим

$$\nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \left(\vec{u}\,\vec{A} - c\varphi \right) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right)^2 \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \left(\vec{j} - \vec{u}\rho \right).$$

Из другого уравнения следует, что

$$\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\vec{u}}{c} \left[4\frac{\pi}{c} \mu \left(\vec{j} - \vec{u}\rho \right) + \frac{\mu}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \right] = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho .$$

Поскольку $\left(\vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{D} = \nabla \left(\vec{u}\,\vec{D} \right) - \vec{u} \times \left(\nabla \times \vec{D} \right)$, то

$$\frac{\varepsilon}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \left[-\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{u}\,\vec{A} - c\varphi \right) \right] = \frac{\vec{u}}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{D} .$$

Следовательно,

$$\nabla \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \right) + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right)^2 \varphi + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{u}\,\vec{A} - c\varphi \right) \right] =$$

$$= \frac{4\pi\mu}{c} \left(\frac{c\rho}{\varepsilon\mu} + \frac{\vec{u}}{c} \vec{j} - \frac{c u^2}{c^2} \rho \right).$$

Преобразовав, получим

$$-\left\{ \nabla^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right)^2 \right\} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \left(\vec{u}\,\vec{A} - c\varphi \right) \right) =$$

$$=\frac{4\pi\mu}{c}\left(\frac{c\rho}{\varepsilon\,\mu}+\frac{\vec{u}}{c}\vec{j}-c\rho\frac{u^2}{c^2}\right).$$

Выберем калибровочное условие

$$\nabla\cdot\vec{A}-\frac{\varepsilon\,\mu}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)\left(\vec{u}\,\vec{A}-c\varphi\right)=0\,.$$

Тогда искомые уравнения примут вид:

$$\left\{\nabla^2-\frac{\mu\,\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)^2\right\}\vec{A}=-\frac{4\pi\mu}{c}\left(\vec{j}-\vec{u}\rho\right),$$

$$\left\{\nabla^2-\frac{\mu\,\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)^2\right\}\varphi=-\frac{4\pi\mu}{c}\left(\frac{c\rho}{\varepsilon\,\mu}+\frac{\vec{u}}{c}\vec{j}-c\rho\frac{u^2}{c^2}\right).$$

Для свободного электромагнитного поля в вакууме получим

$$\left\{\nabla^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)^2\right\}\vec{A}=0\,,$$

$$\left\{\nabla^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)^2\right\}\varphi=0\,,$$

$$\nabla\cdot\vec{A}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)\left(\vec{u}\,\vec{A}-c\varphi\right)=0\,. \qquad (1,1)$$

Изучим некоторые следствия этой системы. Рассмотрим, как распространяется электромагнитное поле согласно уравнениям для $\vec{A}$, φ. Ищем решение уравнений в виде плоской волны. Тогда

$$\vec{A}=\vec{A}_0\exp\left\{i\left(\omega t-\vec{k}\,\vec{r}\right)\right\},\quad \varphi=\varphi_0\exp\left\{i\left(\omega t-\vec{k}\,\vec{r}\right)\right\}.$$

Подставим их в (1.1). Получим дисперсионное уравнение

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2}=\left(1-\frac{\vec{u}}{c}\frac{c\vec{k}}{\omega}\right)^2. \qquad (1.2)$$

Из него следуют выражения для фазовой и групповой скоростей:

$$\vec{v}_\varphi=\vec{c}\left(1+\vec{s}\,\frac{\vec{u}}{c}\right), \qquad (1.3)$$

Эти формулы согласуются с преобразованиями Галилея, если под скоростью $\vec{u}$ понимать скорость движения источника в вакууме. Для решения уравнений (1.1) с источниками найдем функцию Грина. В инерциально движущейся среде без дисперсии ее вид определяется выражением

$$G_0(\vec{r},t)=8\pi^2\mu\int\frac{J_0\left(k_\rho,\rho\right)\exp\left[i\left(k_z z-\omega t\right)\right]k_\rho d\,k_\rho d\,k_z d\omega}{k_\rho^2-\varepsilon\,\mu\frac{\omega^2}{c^2}+2\,\varepsilon\,\mu\,\beta\,\omega\frac{k_z}{c}+\left(1-\varepsilon\,\mu\,\beta^2\right)k_z^2}.$$

Здесь ось OZ направлена по скорости $\vec{u}$, J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Проведя необходимые вычисления, получим

$$G_0(\vec{r},t)=16\pi^4\mu\left(\rho^2+\overset{*}{x}{}^2\right)^{-1/2}\delta\left(t-\frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\left(\rho^2+\overset{*}{x}{}^2\right)^{1/2}\right),$$

где $\overset{*}{x}=z-ut$. Функция Грина для $u<c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ отлична от нуля на поверхности, уравнением которой в фиксированный момент времени является

$$t=\frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\rho^2+(z-ut)^2\right]^{1/2}.$$

Это эллипсоид вращения, ось симметрии которого совпадает со скоростью движения среды. Полуоси эллипса равны $a=ct/\sqrt{\varepsilon\mu}$, $b=ct/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Положение центра эллипсоида определяется выражением $z_0=ut$. Следовательно, центр поверхности, на которой функция Грина отлична от нуля, перемещается со скоростью $\vec{u}_0=\vec{u}$.

Если отождествить $\vec{u}_0$ со скоростью движения источника излучения в вакууме, получим результат: поверхность, несущая сигнал, представляет собой сферу, центр которой все время совпадает с положением источника, движущегося инерциально.

2. ФОРМАЛЬНОЕ СОГЛАСОВАНИЕ ГРУПП ГАЛИЛЕЯ И ЛОРЕНЦА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Сравним между собой две системы уравнений электродинамики, форминвариантные относительно групп Галилея и Лорентца соответственно [6, 7]. Конечно, для такого сравнения нужны глубокие физические причины, требуется физическое наполнение модели. На данной стадии они не видны и будут раскрыты позже. Сейчас задача состоит в выяснении возможности формального согласования различных симметрии, а также изменений в структуре обобщенной системы уравнений и их решений. В рассматриваемом случае различие двух моделей обусловлено лишь структурой материальных уравнений. Действительно, возможно единообразное рассмотрение двух ситуаций, если принять материальные уравнения, зависящие от величины *w*. Пусть, например,

$$\vec{D}+w\left[\frac{\vec{u}}{c},\vec{H}\right]=\varepsilon\left(\vec{E}+\left[\frac{\vec{u}}{c},\vec{B}\right]\right),\quad \vec{B}+w\left[\vec{E},\frac{\vec{u}}{c}\right]=\mu\left(\vec{H}+\left[\vec{D},\frac{\vec{u}}{c}\right]\right).$$

При $w=0$ получим систему уравнений, форминвариантную относительно группы Галилея, при $w=1$ - относительно группы Лорентца, другие значения w ранее не исследовались ни теоретически, ни экспериментально.

3. ТЕНЗОРНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ, НЕЗАВИСИМОСТЬ ОТ 4-МЕТРИКИ И СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОСТЕЙ

Независимость уравнений Максвелла в трехмерном пространстве от метрики, а также общее свойство ковариантности в четырехмерном пространстве первоначально было обнаружено Т. Вейлем [8] .Позднее эти вопросы рассматривали Ф. Коттлер [9], Э.Картан [10], Д. Данциг [11], Е. Пост [12], Ж. Дешам [1]. В Советском Союзе симметрийные свойства уравнений электродинамики в рамках группового подхода широко проанализированы в работах Н.Х. Ибрагимова [14], В.И. Фущича и А.Г. Никитина [15]. Г.А. Котельников [16] рассмотрел нелинейные представления группы Галилея. Мною рассмотрена галилеевски инвариантная электродинамика вакуума [4] и доказана физическая дополнительность группы Галилея и Лорентца в электродинамике движущихся сред [7].

Проанализируем указанные вопросы с общих позиций, следуя монографии Е.Поста [12]. Рассмотрим преобразования координат в четырехмерном пространстве вида

$$x^{k'} = x^{k'}\left(x^k\right), \quad x^k = x^k\left(x^{k'}\right),$$

полагая, что они невырожденны и голономны: $\partial_{i'} A^j_{j'} = \partial_{j'} A^j_{i'}, \quad \Delta \neq 0$.

Хорошо известно, что уравнения Максвелла состоят из тензорных уравнений:

а) $\nabla_{[k} F_{mn]} = 0, \nabla_k \widetilde{H}^{ik} = \widetilde{s}^{\,i}, \nabla_k$ – ковариантные производные,

б) $\widetilde{H}^{ik} = \widetilde{\kappa}^{ikmn} F_{mn}$.

Их форма не меняется при действии группы диффеоморфизмов. Но а) и б) уравнения принадлежат разным пространствам. Первые уравнения ассоциированы с касательным пространством $T_* M$, а связи принадлежат кокасательному пространству $T^* M$. Соответственно, для них характерны преобразования вида $T_* M \Rightarrow \partial_k = a^{k'}_k \partial_{k'}, T^* M \Rightarrow dx^k = a^k_{k'} dx^{k'}$. Они согласованы между собой согласно условию

$$a^{k'}_k a^l_{k'} = \delta^l_k.$$

По указанной причине закон преобразования тензоров будет учитывать зависимость величин $a^{k'}_k (x,t)$ от координат и времени в касательном пространстве, что приводит к необходимости изменения дифференциальных уравнений. В уравнениях связи для величин и индукций изменений вносить не придется.

Рассмотрим симметрийные свойства уравнений электродинамики, используя группу диффеоморфизмов. Обозначим частные производные и якобиан преобразований

$$A^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \quad A^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad \Delta = \det\left|A^i_{i'}\right| \neq 0 .$$

Используем известные законы преобразования тензоров и тензорных плотностей

$$F_{i'j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} F_{ij}, \quad \widetilde{H}^{i'j'} = \left|\Delta\right|^{-1} A^{i'}_i A^{j'}_j \widetilde{H}^{ij} .$$

Рассмотрим вопрос об инвариантности первой пары уравнений. Получим

$$\partial_{[k'} F_{i'j']} = \partial_{[k'}\left(A^i_{i'} A^j_{j']} F_{ij}\right) = A^i_{[i'} A^j_{j'} \partial_{k']} F_{ij} + F_{ij} A^i_{[i'} \partial_{k'} A^j_{j']} + F_{ij} A^j_{[j'} \partial_{k'} A^i_{i']} .$$

Из-за голономности преобразований и антисимметричности F_{ij} второй и третий члены компенсируются, а так как $\partial_{k'} = A^k_{k'} \partial_k$, то $\partial_{[k'} F_{i'j']} = A^i_{[i'} A^j_{j'} A^k_{k']} \partial_k F_{ij}$. Перенесем индекс альтернирования по (*ijk*). Получим $\partial_{[k'} F_{i'j']} = A^k_{k'} A^i_{i'} A^j_{j'} \partial_{[k} F_{ij]}$. Поскольку $\partial_{[k} F_{ij]} = 0$, то $\partial_{[k'} F_{i'j']} = 0$. Проанализируем симметрийные свойства второй пары дифференциальных уравнений электродинамики. Так, легко видеть, что

$$\partial_{k'} \widetilde{H}^{i'k'} = \left|\Delta\right|^{-1} A^{i'}_i A^{k'}_k \partial_{k'} \widetilde{H}^{ik} + \widetilde{H}^{ik}\left\{\left|\Delta\right|^{-1} A^{i'}_i \partial_{k'} A^{k'}_k + \left|\Delta\right|^{-1} A^{k'}_k \partial_{k'} A^{i'}_i + A^{i'}_i A^{k'}_k \partial_k \left|\Delta\right|^{-1}\right\}.$$

Используем известные соотношения: $-\left|\Delta\right|^{-1} A^k_{k'} \partial_i A^{k'}_k = \partial_i \left|\Delta\right|^{-1}, \quad A^{i'}_i A^{j'}_j \partial_{j'} \widetilde{H}^{ij} = A^{i'}_i \partial_j \widetilde{H}^{ij}$.

Сгруппируем выражения

$$\partial_{k'} \widetilde{H}^{i'k'} = \left|\Delta\right|^{-1} A^{i'}_i \partial_{k'} \widetilde{H}^{ik} + \left|\Delta\right|^{-1} \widetilde{H}^{ik}\left\{A^{i'}_i A^m_{k'} \partial_m A^{k'}_k + \partial_{k'} A^{i'}_i - A^{i'}_i A^m_{k'} \partial_k A^{k'}_m\right\}.$$

Член вида $\widetilde{H}^{ik}\partial_k A_i^{i'}$ исчезнет из-за антисимметрии $\widetilde{H}^{ik}$. Другие члены в скобках компенсируются из условия голономности. Получим $\partial_{k'}\widetilde{H}^{i'k'} = \left|\Delta\right|^{-1} A_i^{i'}\partial_k \widetilde{H}^{ik} = \left|\Delta\right|^{-1} A_i^{i'} \cdot \widetilde{S}^{i}$. Следовательно, *дифференциальные уравнения электродинамики Максвелла инвариантны относительно произвольных невырожденных преобразований голономных систем координат*.

Уравнения Максвелла не показывают связность многообразия без кручения. Чтобы доказать это, заменим частные производные на ковариантные. Для F_{mn} имеем

$$\nabla_{[k}F_{mn]} = \partial_{[k}F_{mn]} - 2F_{\sigma[k}\Gamma^{\sigma}_{mn]} = \partial_{[k}F_{mn]}.$$

Рассмотрим уравнения для $\widetilde{H}^{ik}$:

$$\nabla_k \widetilde{H}^{ik} = \partial_k \widetilde{H}^{ik} + \widetilde{H}^{pk}\Gamma^{i}_{kp} + \widetilde{H}^{ip}\Gamma^{k}_{pk} - \Gamma^{p}_{pk}\widetilde{H}^{ik} = \widetilde{S}^{i}.$$

Последний член разложения обусловлен структурой тензорной плотности. Величина $\widetilde{H}^{pk}\Gamma^{i}_{kp} = 0$ из антисимметрии $\widetilde{H}^{pk}$. Два других слагаемых взаимно компенсируются вследствие симметричности связности. Отсюда следует вывод: дифференциальные уравнения Максвелла для среды независимы от метрики и линейной связности многообразия без кручения и допускают симметрию относительно группы невырожденных, голономных преобразований координат, поэтому допустимо описывать все электромагнитные явления в многообразии аффинной связности $R^3 \times T^1$, рассматривая "метрику" Ω_{kn} и связности как самостоятельные физические структуры, характеризующие условия, в которых находится электромагнитное поле.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ попыток построения галилеевски инвариантной электродинамики движущихся сред. Показано, что он возможен, если ввести в рассмотрение показатель отношения $w = 0$ и с его учетом обобщить связи между полями и индукциями. Проведено объединение двух неизоморфных систем, форминвариантных относительно группы Галилея и группы Лоренца в однопараметрическое семейство. Показано, что этот вариант не противоречит тензорной природе уравнений Максвелла, в частности, их инвариантности относительно невырожденных голономных преобразований координат. Указаны физические тонкости, которые требуется учесть, чтобы разобраться в физике явлений, сопровождающихся изменением группы симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельштам Л. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике.-М.: Наука,1972.-432 с.
2. Levy-Leblond M. Nonrelativistic Particles and Wave Equation. // Comm. Math. Phys. - 1967.-v.6. –p.286-311.
3. Миллер М.А., Сорокин Ю.М., Степанов Н.С. Ковариантность уравнений Максвелла и сопоставление электродинамических систем. // УФН.-1977.-т.122.-N3.-с.525-539.
4. Барыкин В.Н. К вопросу о галилеевски инвариантной формулировке электродинамики. // Весцi АН БССР.-1985. N.4. –с.110-114.
5. Сердюков А.Н., Стражев В.И. О дуально симметричной формулировке макроскопической электродинамики.// Изв.вузов. Физика. -1980.-N6.-с.33-36.
6. Барыкин В.Н. К электродинамике инерциально движущихся сред. –Минск, 1982.-55 с./ Препринт ИТМО АН БССР, N1.
7. Барыкин В.Н. О физической дополнительности групп Галилея и Лоренца в электродинамике изотропных, инерциально движущихся сред.// Изв. вузов. Физика.-

1989.-N9.- C.57-66.
8. Weyl H. Raum, Zeit, Materie. – N.Y.: Springer, 1921. – 320 s.
9. Kottler F. Maxwellische Cleichungen und Metric // Sitzungsberichte AK Wien 2a. – 1922. – Bd. 131.
10. Cartan E. Annals de lécole Superiere. – 1924, - № 1,2.
11. Danzig D. The fundamental equations of electrodynamics, independent of metrical geometry // Proceedings Cambridge Philosophical Society. – 1934. – V.30. – P. 421-427.
12. Post E.Y. Formal Structure of Electromagnetism. – Amsterdam: Holland. – 1962. – 204 p.
13. Дешам Ж.А. Электродинамика и дифференциальные формы. // ТИЭР. 1981. – Т. 69. – с. 5-28.
14. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1985. – 300 с.
15. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. – Киев.: Навукова думка, 1985. – 280 с.
16. Котельников Г.А. Группа Галилея в исследовании симметрийных свойств уравнений Максвелла. // Теоретико-групповые методы в физике. – М.: Наука, 1986. – Т. 2. – с. 466-494.