

ГРУППА ЗАПОЛНЕНИЯ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрен вариант построения матричных групп на основе алгоритма сопоставления системе 01-Ритов системы матриц. Найдена группа, достаточная для записи в единой форме фундаментальных уравнений физической теории: Ньютона, Максвелла, Дирака, Шредингера. Выполнен графический анализ этой группы.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрено конструирование групп, используя графический и комбинаторный подходы.

1. ЧИСЛОВЫЕ ГРУППЫ

1. Циклическая группа Z_4 , абелева группа Гаусса, имеет элементы $(i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1)$. Их произведения образуют таблицу 1.

	i	-1	$-i$	1
i	-1	$-i$	1	i
-1	$-i$	1	i	-1
$-i$	1	i	-1	$-i$
1	i	-1	$-i$	1

Расположим элементы группы, изобразив их точками (\bullet), на местах элементов матрицы размерности 2×2 :

$$\begin{matrix} i & \bullet & \bullet & -1 \\ 1 & \bullet & \bullet & -i \end{matrix}$$

Назовем такую схему портретом группы. Представим разложение элементов группы в произведение пары элементов, изображая на ее портрете стрелки от первого сомножителя к другому. Если его квадрат равен самому элементу, изобразим это кружком. На рис.1. изображен графический код элементов группы.

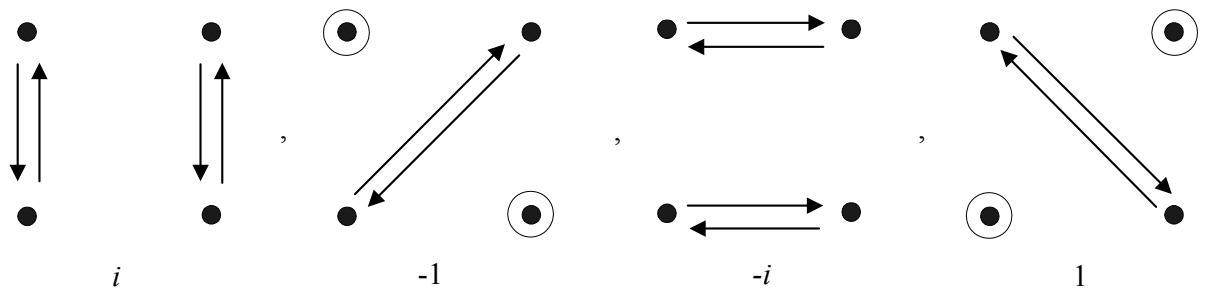


Рис.1. Код группы Z_4

Обычно элементы группы Z_4 изображают на комплексной плоскости (рис.2). Имеем $Z_4 \in \exp(ik \pi/2), k=0, 1, 2, 3$.

2. Мультипликативную группу C^* поля комплексных чисел C образуем числами $\alpha = x + iy$ и единичными матрицами размерности $n \times n$:

$$e = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \text{diag}(1, 1, 1, 1).$$

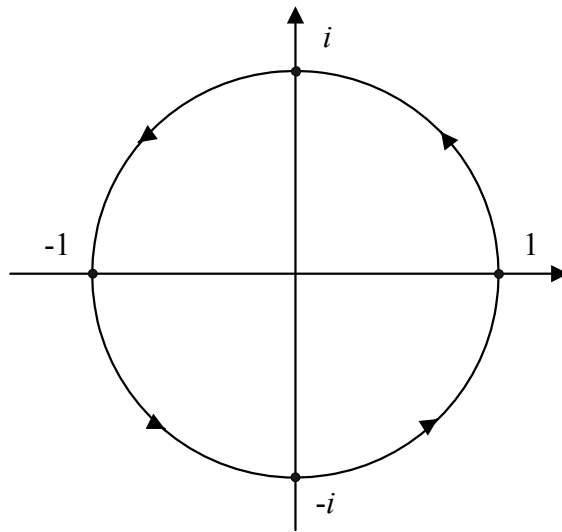


Рис.2. Группа Z_4 на комплексной плоскости

3. Рассмотрим матричную алгебру M_2 . Ее базис имеет вид

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствует таблице 2.

j i	a	b	c	d
a	a	b	0	0
b	0	0	b	a
c	0	0	c	d
d	d	c	0	0

Рассмотрим ее графическое представление, расположив элементы

$$a \bullet \quad \bullet b$$

$$d \bullet \quad \bullet c$$

Аналогично группам, введем для обозначения разложения элементов в двойное произведение стрелки и кружки. Имеем диаграммы (рис.3).

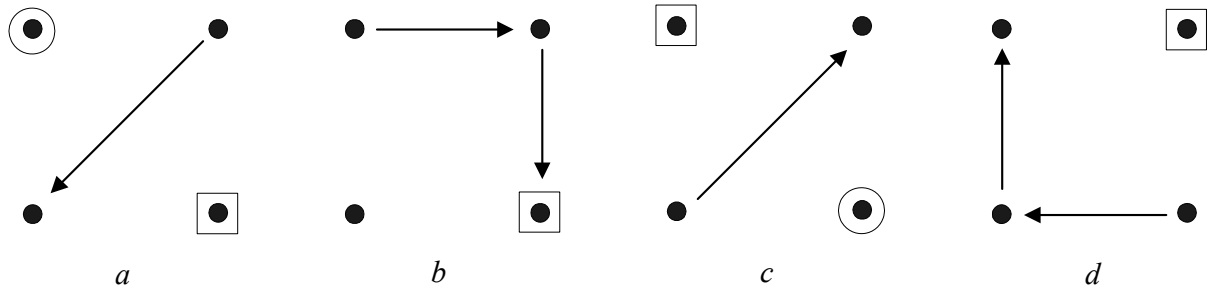


Рис.3. Код алгебры M_2

Символом $\boxed{\bullet}$ обозначен элемент, произведения с которым дают ноль или сам элемент. Рассмотрим другой базис из суммы и разности исходных матриц и построим его графическое изображение, меняя стрелки в исходных диаграммах, если берется разность матриц. Имеем, с точностью до символа $\boxed{\bullet}$, рис..4). Мы получили известные матрицы Паули:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Они образуют группу. Обозначим ее $V(2)$. Применим к ней графический подход. Примем следующее расположение элементов:

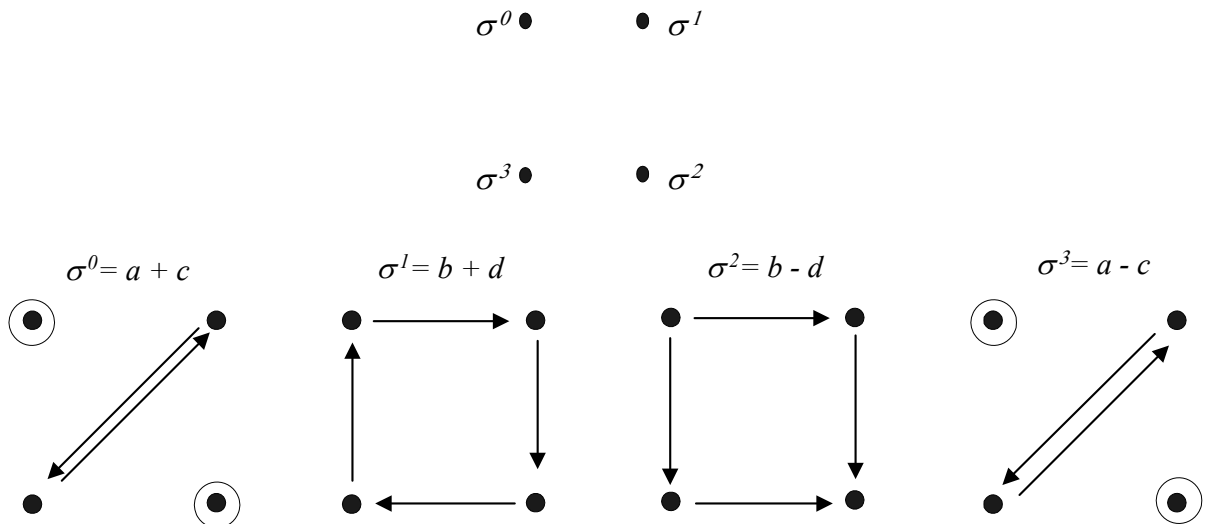


Рис.4. Иной вид кода группы M_2

Получим разложение элементов в двойные произведения (рис.5).

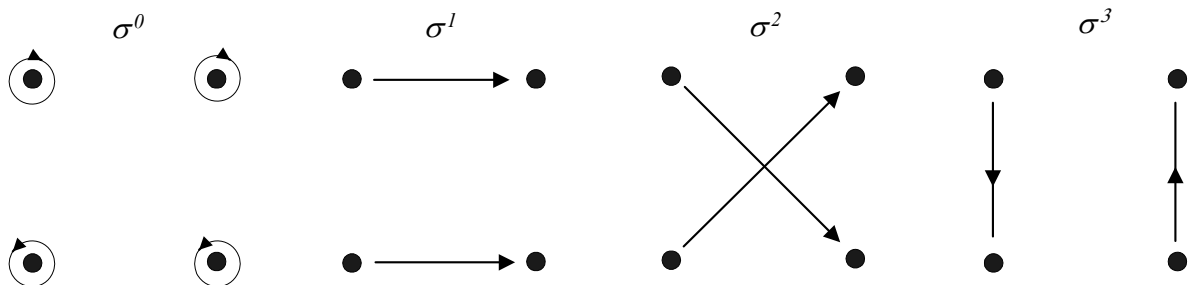


Рис.5. Графический код второго порядка группы $V(2)$
Группа $V(2)$ неабелева. Поскольку

$$(\sigma^2)^2 = -\sigma^0, \quad (\sigma^2)^3 = -\sigma^2, \quad (\sigma^2)^4 = \sigma^0,$$

имеем подгруппу (с точностью до умножения на ± 1)

$$H = \{\sigma^0, \sigma^2, (\sigma^2)^2, (\sigma^2)^3\} \in Z_4,$$

которая является нормальной подгруппой группы $V(2)$, так как

$$\sigma^1 \sigma^2 (\sigma^1)^{-1} = -\sigma^2, \quad \sigma^3 \sigma^2 (\sigma^3)^{-1} = -\sigma^2.$$

Поскольку $(\sigma^1)^2 = \sigma^0$, $(\sigma^2)^2 = \sigma^0$, группа $V(2)$ есть расширение Z_2 посредством H .

2. МАТРИЧНАЯ ГРУППА ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Выполним теперь тензорное умножение Кронекера, заменив единицы матриц Паули этими же матрицами, а нули - нулевыми матрицами. Введем обозначение $\sigma_j^i = \sigma^j \otimes \sigma^i$. Получим группу $V(4) = V(2) \otimes V(2)$. Она задается матрицами (с точностью до умножения на ± 1):

$$\begin{aligned} \sigma_0^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \sigma_0^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_0^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_0^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sigma_1^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_1^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_1^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_2^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_2^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \sigma_3^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_3^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_3^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} a^1 &= \sigma_1^2, & a^2 &= \sigma_2^0, & a^3 &= \sigma_3^2, & b^1 &= \sigma_2^1, & b^2 &= \sigma_2^3, & b^3 &= \sigma_0^2, \\ c^1 &= \sigma_0^3, & c^2 &= \sigma_3^3, & c^3 &= \sigma_3^0, & e^1 &= \sigma_1^1, & e^2 &= \sigma_1^0, & e^3 &= \sigma_0^1, \\ f^1 &= \sigma_2^2, & f^2 &= \sigma_1^3, & f^3 &= \sigma_3^1, & X &= \sigma_0^0. \end{aligned}$$

Ее элементы задаются на рис.6. Их произведения представим таблицей 3.

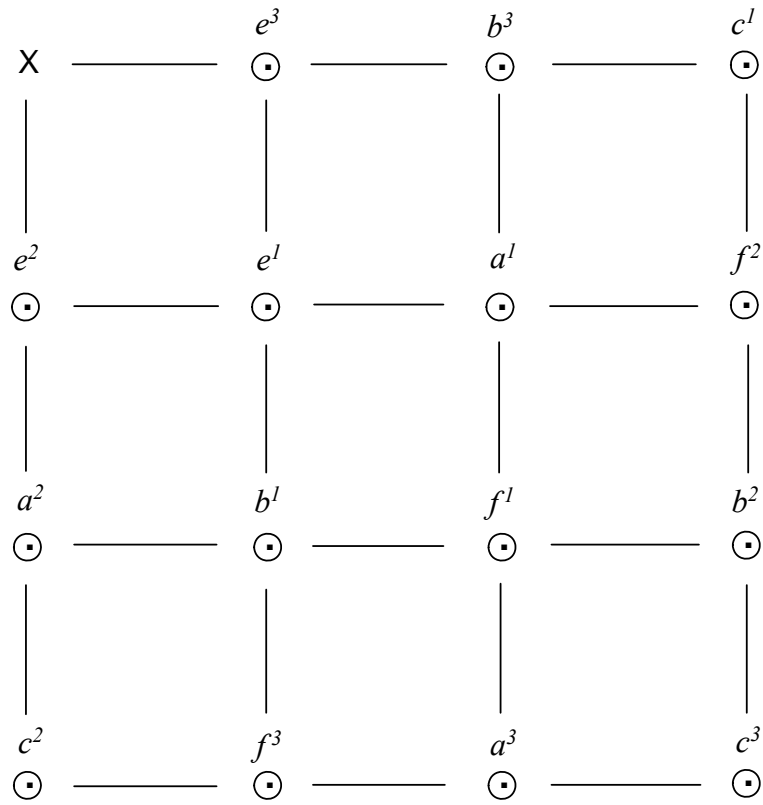


Рис. 6. Расположение элементов группы $V(4)$

Таблица 3.

Двойные произведения элементов группы $V(4)$

	a^1	a^2	a^3	b^1	b^2	b^3	c^1	c^3	c^2	e^1	e^2	e^3	f^1	f^2	f^3
a^1	$-X$	$-a^3$	a^2	$-c^3$	f^3	$-e^2$	$-e^1$	b^1	f^1	c^1	b^3	f^2	$-c^2$	$-e^3$	$-b^2$
a^2	a^3	$-X$	$-a^1$	$-e^3$	$-c^1$	$-f^1$	b^2	$-f^2$	$-e^2$	f^3	c^2	b^1	b^3	c^3	$-e^1$
a^3	$-a^2$	a^1	$-X$	f^2	$-e^1$	$-c^2$	$-f^3$	$-e^3$	b^3	b^2	$-f^1$	c^3	e^2	$-b^1$	c^1
b^1	$-c^3$	$-e^3$	f^2	$-X$	b^3	$-b^2$	f^1	a^1	$-e^1$	c^2	f^3	a^2	$-c^1$	$-a^3$	$-e^2$
b^2	f^3	$-c^1$	$-e^1$	$-b^3$	$-X$	b^1	a^2	$-e^2$	$-f^2$	a^3	c^3	$-f^1$	e^3	c^2	$-a^1$
b^3	$-e^2$	$-f^1$	$-c^2$	b^2	$-b^1$	$-X$	$-e^3$	$-f^3$	a^3	f^2	a^1	c^1	a^2	$-e^1$	c^3
c^1	e^1	b^2	f^3	$-f^1$	a^2	e^3	X	c^2	c^3	a^1	f^2	b^3	$-b^1$	e^2	a^3
c^3	b^1	f^2	e^3	a^1	e^2	f^3	c^2	X	c^1	$-f^1$	b^2	a^3	$-e^1$	a^2	b^3
c^2	$-f^1$	e^2	b^3	e^1	f^2	a^3	c^3	c^1	X	b^1	a^2	f^3	$-a^1$	b^2	e^3
e^1	$-c^1$	$-f^3$	b^2	$-c^2$	a^3	$-f^2$	$-a^1$	$-f^1$	$-b^1$	X	e^3	e^2	$-c^3$	$-b^3$	$-a^2$
e^2	b^3	$-c^2$	f^1	$-f^3$	$-c^3$	a^1	f^2	$-b^2$	$-a^2$	e^3	X	e^1	a^3	c^1	$-b^1$
e^3	$-f^2$	b^1	$-c^3$	a^2	f^1	$-c^1$	$-b^3$	$-a^3$	f^3	e^2	e^1	X	b^2	$-a^1$	c^2
f^1	c^2	b^3	$-e^2$	c^1	$-e^3$	a^2	b^1	$-e^1$	a^1	$-c^3$	$-a^3$	$-b^2$	X	f^3	f^2
f^2	e^3	$-c^3$	$-b^1$	$-a^3$	$-c^2$	e^1	e^2	$-a^2$	$-b^2$	b^3	c^1	a^1	f^3	X	f^1
f^3	$-b^2$	e^1	$-c^1$	e^2	$-a^1$	$-c^3$	$-a^3$	$-b^3$	e^3	a^2	b^1	c^2	f^2	f^1	X

Соединяя вместе элементы подгрупп, получим портрет группы $V(4)$ (рис.7).

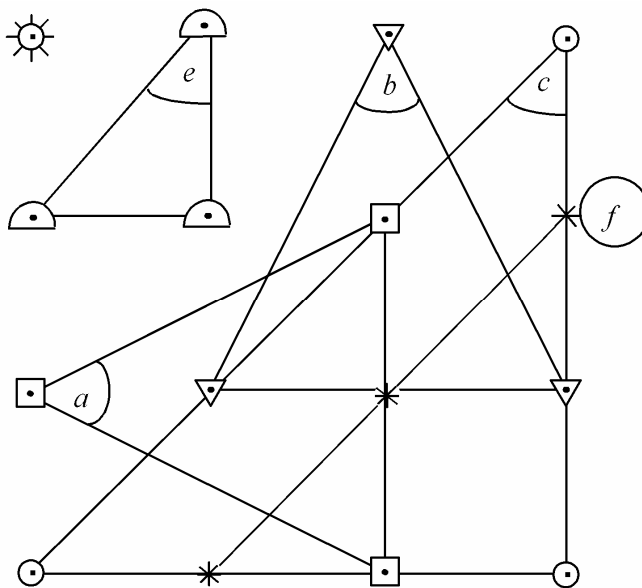


Рис.7. Портрет группы $V(4)$

Представим его в другом виде, учитывая, что a^i и b^i антикоммутируют, e^i и f^i коммутируют, а подгруппа c^i "переводит" a^i, b^i, f^i в e^i, f^i и обратно (рис.8).

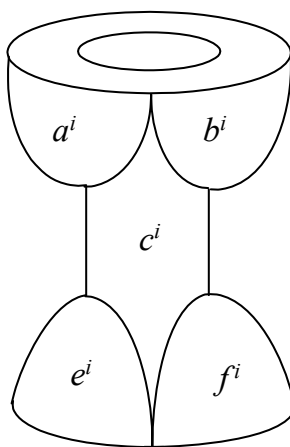


Рис. 8. Условный портрет группы $V(4)$

Двойные произведения матриц удобно задать схемой, указывающей, как данный элемент разлагается в произведение двух элементов. Располагая элементы согласно портрету группы, имеем ее коды второго уровня (рис. 9).

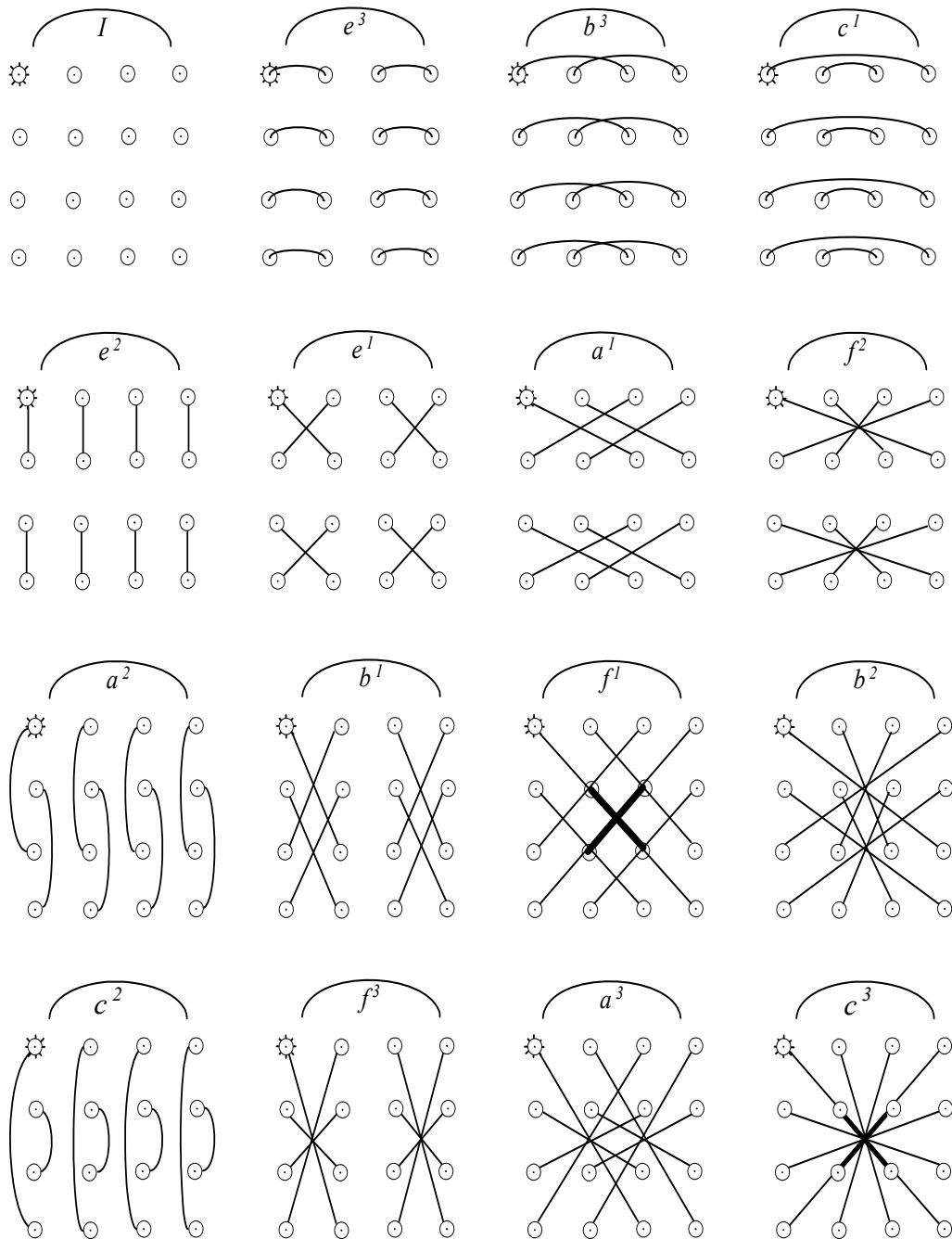


Рис.9. Коды второго уровня группы $V(4)$

Найдем характеристические полиномы для элементов A различных подгрупп $V(4)$ согласно определению:

$$\det\|\lambda I - A\| = 0.$$

Для действительных собственных чисел он имеет вид

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Его корни таковы

$$\lambda_1 = \lambda_4 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Рассмотрим пару кривых, отличающихся знаком:

$$y_1 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1, \quad y_2 = -\lambda^4 + 2\lambda^2 - 1,$$

что соответствует выбору функций вида $y_i = \det A_i \det|\lambda I - A_i|$. Тогда имеем симметрично расположенные графики (рис.10). Для двух кривых имеем минимальные значения, соответствующие

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1.$$

Ассоциируем с метрикой Минковского $\eta^{ij} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ новые "метрики", умножая компоненту η^{00} на λ_i :

$$r^{ij} = \text{diag}(1, 1, 1, -1), \quad n^{ij} = \text{diag}(1, 1, 1, 0), \quad g^{ij} = \text{diag}(1, 1, 1, 1).$$

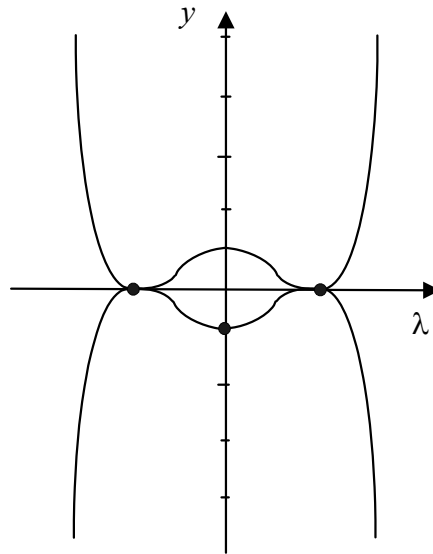


Рис.10. Графики характеристических полиномов подгрупп $(e^i, f^i, c^i) \in V(4)$

Группа "несет" их на себе. Будем рассматривать корни характеристического уравнения как точки пересечения двух кривых

$$y_1 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1, \quad y_2 = 0$$

при условии, что $\pm y_1 = y_2$. Тогда возможно выбрать $y_2 \neq 0$ и рассматривать элементы матриц, соответствующие "корням" λ_i , как динамические элементы, если динамично поведение y_2 . Пусть, например, $y_2 = a\lambda + b$, причем (a, b) переменны. Имеем связь

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = a\lambda + b,$$

которая позволяет выполнить анализ динамики "метрик" группы $V(4)$, образованной из $U(1)$ и $SU(4)$ в виде