(ELWIST 2) РАЗЛИЧИЕ СИММЕТРИИ ПРОЦЕССОВ И СОСТОЯНИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

ОБШАЯ РУБРИКАЦИЯ:

СИММЕТРИИ: МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ
СИММЕТРИИ: АЛГЕБРА ЛИ ПРОЦЕССА
СИММЕТРИИ: СИСТЕМА ГРУПП – СИГРУППА
СИММЕТРИИ: БИГРУППА
СИММЕТРИИ: ИЕРАРХИЯ СИММЕТРИЙ
СИММЕТРИИ: ДЕФОРМАЦИЯ СОСТОЯНИЙ
СИММЕТРИИ: ИНДУЦИРОВАНИЕ СИГРУППЫ
СИММЕТРИИ: ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
СИММЕТРИИ: КОНСТРУИРОВАНИЕ СИММЕТРИЙ
СИММЕТРИИ: ПРИЛОЖЕНИЯ К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

ВИКТОР БАРЫКИН

РАЗЛИЧИЕ

СИММЕТРИИ ПРОЦЕССОВ И СОСТОЯНИЙ

В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Чаще всего в физике анализируется параметризованное семейство состояний. Оно задается множеством величин, согласованных между собой. Часть из них измеряется непосредственно, некоторые величины задаются косвенно. В силу их зависимости от ряда физических параметров требуемый на практике анализ является непростым делом.

Принято считать, что вся система состояний, если она подчинена некоторой симметрии, может быть восстановлена по этой симметрии из одного состояния или их конечного набора. Этот подход используется, в частности, в релятивистской теории. В ней состояние электромагнитного поля, известное для одного наблюдателя, рассчитывается посредством группы Лоренца для другого инерциального наблюдателя. При этом учитываются какие-либо дополнительные обстоятельства. В кинематическом подхода не принято исследовать динамику состояний.

В реальной практике требуется исследовать динамику изменения состояний системы или изделия.

Научная и практическая проблема состоит в том, чтобы описывать реальные физические процессы, а не только систему состояний.

Длительное время не только в электродинамике, но и в физике в целом не было алгоритма для решения такой проблемы. Отсутствовал также практически полезный подход к разграничению и описанию состояний и процессов.

В этой статье дано детерминистическое описание процесса изменения параметров явления в электродинамике на основе обобщенной симметрии. Основная идея состоит в рассмотрении процесса как функционально согласованной системы состояний. Подход базируется на объединении неизоморфных симметрий в активную систему, способную учитывать как влияние взаимодействий на события, так и их итоги. Для этого используются новые математические объекты. Они названы сигруппой и бигруппой, частично исследованы их свойства. Проиллюстрированы некоторые физические аспекты данного подхода.

В связи с исследуемой темой возникает ряд вопросов:

- Как согласуются новые математические симметрии с теорией когомологий групп?
- Чем выражается и как реализуется активность новых симметрий?
- Каково соотношение новых симметрий и квантовых групп?
- Существует ли и как реализуется иерархия симметрий?
- Какие математические и физические следствия имеет иерархии симметрий?

Материал разбит на три самостоятельных раздела. Ответы на указанные вопросы даны частично, иногда только намечены пути к их достижению.

2.1. К симметрии физических процессов в электродинамике

При анализе физических конструкций и явлений изучаются факторы движений и факторы управления ими. Для их описания требуется ***система неизоморфных симметрий****. Найден и частично изучен пригодный для этого математический объект, названный сигруппой. Предложена концепция бигруппы: множества с двумя операциями, по каждой из которых множество является группой. На физических приложениях проиллюстрирована* ***динамика генераторов и параметров семейства симметрий,*** *относящихся к классу обобщенных кинематических симметрий.*

В физических задачах, относящихся к релятивистской электродинамике и квантовой механике, требуется учесть всю систему ранговых движений, а также факторов, управляющих ими. Обычно нужно выполнить теоретический и экспериментальный анализ взаимодействия, его деталей, учесть реальные условия измерения. Такая задача в полном объеме сложна. Поэтому приходится заменять анализ процессов изменения величин анализом некоторой системы состояний. Обычно они соответствуют итогам взаимодействия. В такой модели скрыт механизм реальных физических изменений.

В электродинамике для учета скоростей применяют кинематический метод перерасчета величин, используя группу Лорентца и пространство Минковского [1]. По параметрам состояния для одного наблюдателя рассчитываются параметры состояния для другого наблюдателя. В квантовой механике, базирующейся на пространстве Ньютона и группе Галилея, также исследуются состояния. В ней отказ от анализа деталей физических процессов обоснован моделью редукции волнового пакета. Согласно такому подходу, считается, что процессы невозможно описать ни детально, ни детерминистически [2].

2.1.1. Симметрийная модель процессов

В электродинамике для анализа системы состояний принято использовать группу Лорентца [1]. Известно, что она позволяет корректно рассчитать итог взаимодействия, не раскрывая деталей и хода динамического процесса. В кинематическом подходе различие параметров не имеет динамической природы. Ему «не нужен» процесс, который задает физически фиксируемые итоги взаимодействия [2].

Качественно другое описание поведения параметров электромагнитного поля дается обобщенной динамической моделью релятивистских эффектов [3]. В этом подходе поведение скорости поля динамически согласовано с изменением его частоты. Изменения происходят в форме релаксационного процесса. Параметры явления детерминистически меняются от некоторых начальных до некоторых конечных значений. Модель учитывает как собственную скорость поля, так и внешние скорости, ассоциированные с ней.

Расчет базируется на обобщенных преобразованиях дифференциалов координат для кокасательного пространства T^*M (согласованного с $T^1 \times R^3$):

$$dx' = \gamma(dx - vdt), dt' = \gamma\left(dt - \frac{vw}{c^2} n^2 dx\right), \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} n^2 w\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

В них входит относительная скорость для пары наблюдателей v, показатель преломления n, а также показатель отношения w: новая физическая величина, введенная в динамической модели релятивистских эффектов [4]. В таком варианте кокасательное пространство T^*M выполняет функции пространства скоростей. Для простых сред в случае релаксационного процесса изменения параметров поля величина w в электродинамике задается правилом

$$w = 1 - \exp\left(-P_\lambda (n-1)\right).$$

Здесь n – показатель преломления, P_λ – эмпирическая константа, зависящая от длины волны электромагнитного поля. Преобразования вида

$$dx' = \gamma\left(dx - vdt\right), dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}n^2 dx\right), \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}n^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

не образуют группу, если его элементы соответствуют разным значениям не только скоростей v, но и показателя преломления n.

С эмпирической точки зрения так отражается экспериментальный факт, что скорость света в среде не зависит от того, покоится ли среда или инерциально движется, если показатель преломления не зависит от скорости.

В подходе Эйнштейна в качестве такой среды использован «вакуум». Поскольку ему, по постановке задачи, нельзя было придавать физических свойств, объяснение экспериментов базировалось на свойствах четырехмерного многообразия Минковского. Взамен физической модели был предложен вариант математического расчета, которому постепенно «придали статус» универсальной вещи в себе, априорной сущности электромагнетизма. Постепенно этот статус был повышен до уровня свойств пространства-времени, характеризующего размеры и интервалы времени. Математика при анализе проблемы учета скоростей в электродинамике вышла на первый план в соревновании с физикой, оттеснив анализ физических аспектов на второй план.

В предлагаемой новой модели для взаимосвязи скоростей, характеризующих стадии динамического процесса, получено выражение

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{vw}{c^2}n^2 dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vw}{c^2}n^2 u_x}.$$

Рассмотрим «действие» симметрий. Начальные «данные» задаются дифференциалами координат типа (dx, dt), а «действие» состоит в вычислении пары (dx', dt') при разных значениях параметров преобразований v, n, w. «Действие» преобразований для дифференциалов задается независимо от условия, образуют ли они группу и принадлежат ли они какой-то группе. Группа «лишь» задает дополнительное ограничение на класс преобразований.

В $[3]$ обоснован диапазон изменения величин $w = [0 - 1]$, характеризующих стадии релаксационного процесса изменения параметров явления. Тогда при $w = 0$ получим значения скоростей для второго наблюдателя в случае, когда релаксационный процесс изменения параметров, в частности, обусловленный измерением, только начался. Он соответствует группе Галилея. При $w = 1$ получим конечные значения скоростей для релаксационного процесса. Они соответствуют канонической группе Лорентца. Для расчета динамики частоты в исследуемом процессе нужны дополнительные условия, например, обобщенное условие инвариантности фазы волны. Для анализа состояний такой алгоритм использовал Эйнштейн А. $[5]$.

Возникает вопрос: каким математическим объектом является введенная математическая конструкция, используемая для описания процесса изменения параметров? Какие дополнительные возможности открывает указанный алгоритм в задачах анализа физических процессов? Как согласовать между собой состояния и процессы?

Заметим, следуя физической точке зрения, что анализ процесса проведен на основе использования нового физического параметра w. Поэтому динамика процесса получает новое обоснование. Учтем это обстоятельство как общее правило любой практики, направленной на получение новых результатов: если мы желаем учесть что-то новое в процессах или в его симметриях, мы обязаны ввести в физическую модель и в симметрии хотя бы одну новую величину. Хорошо, если новая величина характеризует общие стороны и свойства явления. Для показателя отношения w это условие выполняется $[4]$. Понятно, что обобщение симметрии влечет за собой обобщение физических моделей.

Исследуем математическую структуру используемых преобразований для дифференциалов координат, а также специфику используемого алгоритма для описания процесса.

Поскольку однопараметрическое обобщение преобразований дифференциалов координат отталкивается от группы симметрии, мы приходим к варианту построения и использования обобщенных симметрий. Каковы эти симметрии? Как ими пользоваться?

2.1.2. Алгебра Ли физических процессов

Мы понимаем, что предложенное описание релаксационного процесса изменения скоростей и частот на основе пространственно-временных преобразований кокасательного пространства базируется на расширении алгебры симметрии явления. Действительно, предложенные преобразования координат содержат новый переменный физический параметр w, управляющий процессом. Последуем стандартной методике анализа $[6]$. Если $d\overline{x} \approx dx + \xi(dx, dy)w, d\overline{y} = dy + \eta(dx, dy)w,$ то получим генератор

$$X = \xi(dx, dy)\frac{\partial}{\partial(dx)} + \eta(dx, dy)\frac{\partial}{\partial(dy)}.$$

Для удобства записи будем использовать величину x вместо dx и величину t вместо dt. Мы обнаруживаем, что генератор симметрии группы Лорентца $\Gamma_l = x\partial_t + t\partial_x$ будет дополнен генератором симметрии группы Галилея вида $\Gamma_* = x\partial_t$. Введение нового параметра в преобразования для дифференциалов координат вида

$$dx' = \gamma(dx - v\eta dt)$$

даст генератор $\Gamma_{q2} = t\partial_x$. Указанная система порождает по алгоритму Ли генераторы вращений и деформаций: $x\partial_t - t\partial_x, x\partial_x - t\partial_t$. Таблица умножения в алгебре Ли будет следующей:

	$x\partial_t$	$t\partial_x$	$x\partial_t + t\partial_x$	$x\partial_x - t\partial_t$	$t\partial_x - x\partial_t$
$x\partial_t$	0	$x\partial_x - t\partial_t$	$x\partial_x - t\partial_t$	$-x\partial_t$	$x\partial_x - t\partial_t$
$t\partial_x$	$-x\partial_x + t\partial_t$	0	$-x\partial_x + t\partial_t$	$t\partial_x$	$x\partial_x - t\partial_t$
$x\partial_t + t\partial_x$	$-x\partial_x + t\partial_t$	$x\partial_x - t\partial_t$	0	$t\partial_x - x\partial_t$	$x\partial_x - t\partial_t$
$x\partial_x - t\partial_t$	$x\partial_t$	$-t\partial_x$	$-t\partial_x + x\partial_t$	0	$-x\partial_t - t\partial_x$
$t\partial_x - x\partial_t$	$-x\partial_x + t\partial_t$	$-x\partial_x + t\partial_t$	$-x\partial_x + t\partial_t$	$x\partial_t + t\partial_x$	0

2.1.3. Сигруппа для физических процессов

Проанализируем математическую структуру обобщенных преобразований Лорентца, полагая, что они в состоянии описать релаксационный процесс изменения параметров физических явлений. Поскольку для $w = 0$ это будет группа Галилея, а для $w = 1$ это будет каноническая группа Лорентца, обобщенные преобразования можно рассматривать как однопараметрическое семейство неизоморфных групп. Изучим их свойства и применения. Назовем новый объект сигруппой, так как он образован из системы групп.

Рассмотрим двойное действие матричных преобразований в кокасательном пространстве T^*M. Заметим, что преобразования координат содержат две скорости: одна из них используется без множителя w, а вторая используется с данным множителем. Другими словами, реализовано частичное изменение параметров. В физике в таком случае принято говорить о расщеплении величин. По-видимому, оно имело место всегда, но не обнаруживалось ранее потому, что в преобразованиях координат традиционно использовалось значение $w = 1$.

Введем обозначения

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dt' \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ -\tilde{v}_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx'' \\ dt'' \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ -\tilde{v}_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ dt' \end{pmatrix},$$

$$\gamma_1 = (1 - v_1\tilde{v}_1)^{-0,5}, \gamma_2 = (1 - v_2\tilde{v}_2)^{-0,5}, \qquad \tilde{v}_1 = \frac{v_1}{c^2} n_1^{\,2} w_1, \tilde{v}_2 = \frac{v_2}{c^2} n_2^{\,2} w_2,$$

$$a = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ -\tilde{v}_1 & 1 \end{pmatrix}, b = \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ -\tilde{v}_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\begin{pmatrix} dx'' \\ dt'' \end{pmatrix} = \gamma_2\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 + \tilde{v}_1 v_2 & -(v_1 + v_2) \\ -(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) & 1 + v_1\tilde{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix}.$$

Фактическое использование в исследуемых преобразованиях пары скоростей: без отношения, математических - v и с отношением, физических - wv продолжает и конкретизирует подход Ньютона к пространству. Хорошо известно, что Ньютон разделял пространство абсолютное или математическое и пространство относительное или физическое. Правда, конкретных пояснений и математической реализации он не предложил, потому что считал это обстоятельство очевидным. Заметим также, что Ньютон рассуждал о пространстве размеров. На данном примере мы видим, что для анализа инерционных процессов требуется не одно пространство скоростей, а пара пространств скоростей. Кроме этого, поскольку показатель отношения w меняется в ходе процесса, для него требуется задать динамическое уравнение, что инициирует углубление физического анализа.

Мы обнаруживаем не просто контракцию симметрий для группы Галилея и Лорентца с нефизичным изменением параметров симметрии, когда скорость света в вакууме стремится к бесконечности. Обнаруживается новый физический механизм: изменение показателя отношения w. Он позволяет отнести сходные неизоморфные группы к одному семейству симметрий. Заметим, что речь идет о структуре пространства скоростей, а не пространства размеров, у которого есть свои законы и свои симметрии. Запишем преобразования координат и времени в T^*M иначе, используя формулу

$$F = ba = \frac{1}{2}(ba + ab) + \frac{1}{2}(ba - ab).$$

Мы задали произведение b, a в виде суммы элементов симметричной и антисимметричной алгебр. Получим выражения

$$F = \sigma\gamma_2\gamma_1 \frac{\Gamma(1,2)}{\Gamma(1,2)} \left[\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sigma}(v_1 + v_2) \\ -\frac{1}{\sigma}(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma}(v_1\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1 v_2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma}(\tilde{v}_1 v_2 - v_1\tilde{v}_2) \end{pmatrix} \right],$$

$$\sigma = 1 + 0,5(\tilde{v}_1 v_2 + v_1\tilde{v}_2),$$

$$\sigma\gamma_2\gamma_1 = \frac{1+0{,}5\left(\tilde{v}_1 v_2 + v_1\tilde{v}_2\right)}{\left(1 - v_1\tilde{v}_1 - v_2\tilde{v}_2 + v_1\tilde{v}_1 v_2\tilde{v}_2\right)^{\frac{1}{2}}}, \Gamma(1,2) = \left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\left(v_1 + v_2\right)\left(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2\right)\right).$$

Следовательно, произведение элементов сигруппы имеет структуру вида

$$\begin{aligned} &A \cdot B = \kappa C + \sigma, \\ &A, B, C \Rightarrow M_1, \\ &\kappa, \sigma \Rightarrow M_2, M_3. \end{aligned}$$

Элементы A, B, C принадлежат сигруппе M_1, элементы κ, σ являются, соответственно, мультипликативной и аддитивной группами, ассоциированными с данной сигруппой. Они принадлежат множествам M_2, M_3. Позже будет показано, что данная сигруппа может быть выражена в форме произведения трех неизоморфных групп. Поэтому мы вправе утверждать, что данное сигрупповое множество индуцировано семейством, состоящим из пяти групп. Понятно, что сигруппа может индуцироваться разными семействами групп и разным их числом.

Легко показать, что

$$\frac{1}{\left(\sigma\gamma_1\gamma_2\right)^2} = 1 - \frac{\left(v_1 + v_2\right)\left(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2\right)}{\sigma^2} + \frac{1}{4}\frac{v_1^{\,2} v_2^{\,2}}{c^4}\frac{\left(w_2 - w_1\right)^2}{\sigma^2} = 1 - V^*\tilde{V}^* = \frac{1}{\gamma_*^{\,2}}.$$

Мы замечаем, что произведение преобразований, зависящих от w, дает выражение, не принадлежащее исследуемому обобщенному семейству. Этот факт был отмечен ранее в $[7]$.

Проанализируем его структуру. Во-первых, произведение содержит выражение вида $\frac{1}{\sigma}\left(\tilde{v}_1 v_2 - v_1\tilde{v}_2\right)$, характеризующее мультипликативный фактор некоммутативности исследуемого семейства. Оно обращается в ноль, когда $w_1 = w_2$. Источником некоммутативности, с алгебраической точки зрения, является новый генератор алгебры симметрии.

Во-вторых, множитель γ_* индуцирует введение комплексных скоростей, зависящих от аддитивного фактора некоммутативности $\left(w_2 - w_1\right)$. Действительно, пусть

$$V^* = \frac{\left(v_1 + v_2\right) + i0{,}5\frac{v_1 v_2}{c}\left(w_2 - w_1\right)}{\sigma}, \tilde{V}^* = \frac{\left(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2\right) - i0{,}5\frac{v_1 v_2}{c^3}\left(w_2 - w_1\right)}{\sigma}.$$

Отсюда $\gamma_* = RE\left(1 - V^*\tilde{V}^*\right)^{-0{,}5}$. Заметим, что появление комплексных скоростей естественно, если принять идеологию, что им соответствует учет внутренних степеней свободы для физического явления или физической конструкции. Из физических соображений мы понимаем, что у электромагнитного поля изменение скоростей согласовано с изменение частоты, управляемой показателем отношения w, который является скрытым параметром физической задачи. Более подробно эта проблема изложена в $[3]$.

Мы приходим к следующим выводам:

1. Правила сложения скоростей для физического процесса отличаются от кинематических правил сложения скоростей для состояний. Они зависят от аддитивного и мультипликативного факторов некоммутативности используемого семейства преобразований.
2. Физическому процессу соответствуют комплексные скорости, так реализуется согласованная динамика изменения частот и скоростей. Назовем анализируемое семейство

преобразований сигруппой Лорентца. Обозначим сигруппу выражением SG. Новый термин введен для того, чтобы различать симметрию процесса и симметрию состояний, которая задается группой Лорентца G.

Примем гипотезу: для описания физических процессов необходимо использовать сигруппу и ее действия в касательном и кокасательном пространствах.

Согласование групп и сигрупп состоит в следующем: сигруппа для процесса выступает как параметрическое семейство для неизоморфных групп, описывающих систему состояний.

Найдем функциональное свойство, которому подчинено произведение элементов сигруппы. Согласно приведенным выражения, оно состоит в том, что паре элементов изучаемого семейства сопоставляется функция $F(v_1, w_1, n_1, v_2, w_2, n_2)$, подчиненная условию

$$F(v_1, w_1, n_1, v_2, w_2, n_2) = F(0,0,1, v_2, w_2, n_2) \cdot F(v_1, w_1, n_1, 0,0,1).$$

Внешне оно напоминает стандартное условие для контрвариантного представления группы. Реально речь идет об условии для функционала F, зависимого от шести аргументов. Назовем это выражение представлением сигруппы. Его явный вид для изучаемых преобразований указан выше.

Рассмотрим математическую структуру, ассоциированную с парой чисел $w = 0, w = 1$. Они соответствуют каноническим значениям показателя отношения для групп Галилея и Лоренца, используемых в физике. Сопоставим паре чисел $[0,1]$матрицы:

$$0 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \breve{0}, 1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \breve{1}.$$

Они задают конечную группу по матричному произведению. Действительно,

$$\breve{0}\breve{0} = \breve{1}, \breve{0}\breve{1} = \breve{1}\breve{0} = \breve{0}, \breve{1}\,\breve{1} = \breve{1}.$$

Другими словами, изделие, изготовленное из конечного множества, не обладающего свойством быть группой, при новой компоновке становится группой, меняет свое качество. Этот факт хорошо известен в технике, когда совокупность деталей, соединенных вместе, становится изделием, имеющим новые свойства.

2.1.4. Бигруппа для физических процессов

Подойдем иначе к выражению для элемента семейства:

$$g = \frac{1}{\left(1 - \frac{w}{c^2} n^2 v^2\right)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{vwn^2}{c^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Он принадлежит унимодулярной группе. Их произведение будет различным, если рассматривать систему произведений для системы параметров, образующих элемент группы.

Так, пусть $w, n = const, v_1 \neq v_2$. Легко видеть, что мы получим элементы указанного семейства, используя стандартное матричное умножение. Так изучается группа Лорентца. Тогда

$$g_{2,1} = g_2 g_1, v_{2,1} = \frac{v_2 + v_1}{1 + \frac{v_2 v_1}{c^2} wn^2}.$$

Заметим, что в случае, когда меняются все указанные параметры и используется только матричное умножение, мы получаем сигруппу Лорентца.

Пусть $w, n \neq const, v \neq const$. Покажем, что рассматриваемое семейство становится бигруппой, если для схожих элементов ввести обобщенное поэлементное умножение, следуя Адамару, согласно правилу:

$$(a_1 + b_1)^{k_1}(a_2 + b_2)^{k_1} = (a_1 a_2 + b_1 b_2)^{k_1}.$$

В этом случае получаем элемент унимодулярной группы:

$$\widetilde{g}_{2,1} = g_2 \,\tilde{\cdot}\, g_1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4} w_1 n_1^2 w_2 n_2^2\right)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & v_1 v_2 \\ \frac{v_1 v_2}{c^4} w_1 n_1^2 w_2 n_2^2 & 1 \end{pmatrix} = (\det A)^{-1/2} A.$$

Назовем бигруппой семейство элементов, в котором для семейства параметров введена пара произведений. Рассмотренный вариант соответствует конкретной реализации бигруппы в семействе обобщенных преобразований Лорентца.

Мы приходим к качественно новым математическим объектам**.** С нашей точки зрения они управляют динамикой физических процессов. Применение пары произведений, по-разному действующих на разные параметры, представляет собой новое качество используемых элементов. В анализируемом случае новый физический параметр w привлек за собой новое физическое свойство и новое произведение.

В общем случае различных параметров и различных произведений может быть много, что потребует применения новых математических методов для исследования симметрии процессов. Возможно, именно этот математический инструмент поможет в прохождении физических лабиринтов взаимодействия**.**

Отметим проблему*:* по системе подгрупп установить систему сигрупп и бигрупп, им соответствующих, найти физические процессы, ассоциированные с ними.

Приложение 2.1. 1. Восемь шагов от группы Лорентца к сигруппе Лорентца.

Рассмотрим элемент группы Лорентца для дифференциалов координат (dx, cdt)в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} dx' \\ cdt' \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} = \det{}^{-1/2} A \cdot (A)\begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix}.$$

Известно, что эти преобразования образуют группу, которую мы берем в качестве исходного этапа анализа. Перейдем от группы к сигруппе, выполнив несколько действий.

Первый шаг состоит в деформации матрицы A без изменения ее определителя. Пусть

$$\widetilde{A} = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -vw^{-1} \\ -\frac{vw}{c^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Второй шаг состоит в замене скорости vна величину vw. Получим

$$\widetilde{A}^* = A(vw) = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} w^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы получили выражение, привычное для теории квантовых групп. Следовательно, квантовые группы можно рассматривать как объекты, промежуточные между группами и сигруппами. По этой причине они могут иметь свойства, привычные для групп и относящиеся к системе состояний. Они могут также иметь свойства, привычные для сигрупп и относящиеся к системе процессов.

Третий шаг состоит в построении элемента, аналогичного элементу исходной группы, по деформированной матрице $\widetilde{A}^*$:

$$\widetilde{g}^* = \det^{-1/2}\left(\widetilde{A}^*\right) \cdot \widetilde{A}^*.$$

Мы пришли к однопараметрическому обобщению группы Лорентца, которое задает сигруппу.

Сделаем *четвертый шаг*. Отметим, что для физических целей дополнительно пришлось деформировать скорость, полагая, что она зависит от скорости первичного источника излучения v_{fs} и от скорости физической среды v_m [3]:

$$u = (1 - w)v_{fs} + wv_m.$$

В этом случае действие сигруппы дает результаты, согласующиеся с экспериментом. Все последующие замечания изложены в [3,4]. Здесь показано, что новым является обоснование физической величины w, а также нахождение закона ее изменения при одном и том же значении скорости u. Таковы *пятый и шестой шаги* в построении и использовании сигруппы. *Седьмой шаг* состоит в указанном выше правиле сопоставления физическому процессу преобразований сигруппы, используя в качестве опорных данных величины, известные для второго наблюдателя. *Восьмой шаг* состоит в согласовании расчета с экспериментом, достигая уровня практического использования сигруппы.

Следовательно, математика и физика сигруппы существенно отличается от группы. По-видимому, этот факт стал реальной причиной разнообразных обращений к группе Лорентца и анализа ее структуры и следствий, чтобы достичь понимания и физической ясности. В развиваемом подходе ясность достигается только в том случае, когда принимается, что процессы описываются не группами, а сигруппами или их обобщениями. В качестве такого обобщения выступает бигруппа.

Приложение 2.1.2. Структура общего перехода от группы к сигруппе и бигруппе.

Мы обнаружили восемь отличительных признаков, названных «шагами», по которым мы можем различать группу и сигруппу при однопараметрическом обобщении пространственно-временных симметрий. Все они сводятся, как показано в приложении 2.1.1., к «деформации» параметров и генераторов симметрии. Эти изменения могут быть частичными и согласованными с физикой. При этом матричное произведение элементов преобразований координат и времени остается единым для группы и для сигруппы. Когда речь идет о бигруппе, дополнительно меняется еще и система операций. Поэтому бигруппа обладает свойствами, которые существенно превосходят свойства сигрупп. К бигруппе мы приходим от группы через сигруппу.

Назовем углублением симметрии алгоритм построения сигрупп и бигрупп по заданной группе. Выполним сравнение указанных конструкций, следуя проведенному анализу.

ГРУППА:

- генераторы и параметры могут изменяться, но не деформируются, подчинены системе условных ограничений,
- элементы умножаются матрично.

СИГРУППА:

- генераторы и параметры исходной группы деформированы в ней, они могут изменяться, будучи дополнены законами изменения для новых величин, присущих сигруппе,
- элементы умножаются матрично.

БИГРУППА:

- генераторы и параметры исходной группы деформированы в ней, они могут изменяться, будучи дополнены законами изменения для новых величин, присущих сигруппе,
- множество элементов сигруппы дополнено новой операцией, для которой множество элементов образует новую группу.

Многопараметрические сигруппы могут быть устроены очень сложно. Еще сложнее в устройстве и применении многопараметрические N – группы.

Отметим, что мы ограничили анализ только преобразованиями, которые содержат скорость v. Показатель отношения w, выступающий в роли фактора управления скоростью, позволил преобразовать группу в сигруппу. С его помощью удалось перейти от описания состояний к описанию процессов, что качественно изменило подход к релятивистским эффектам.

В общем случае во внимание следует принять производные от координат более высоких порядков: второго – ускорения, третьего и т.д. Поэтому требуются группы, отличающиеся от группы Лорентца. Определим ранг движения степенью производных по времени от координат: размерам соответствует нулевой ранг, скоростям – первый ранг… Учет факторов управления указанными движениями более высоких рангов индуцирует семейство сигрупп и бигрупп. Дополнительно требуется выполнить согласование результатов с физикой. В частности, речь идет о нахождении законов изменения величин и корректном их использовании в физической модели.

Приложение 2.1.3. Сигруппа для процесса как деформация группы для состояний.

Введем величину $\tau = w_2 - w_1$. Возьмем пару элементов сигруппы:

$$g_2 = \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2} w_1 - \frac{v_2^2}{c^2}\tau\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ -\frac{v_2^2}{c^2} w_1 - \frac{v_2^2}{c^2}\tau & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} w_1\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ -\frac{v_1^2}{c^2} w_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем их произведение в такой форме:

$$\hat{g}_2 \hat{g}_1 = \left(g_2 g_1\right)_{\tau=0} + \tau^1 F_1\left(g_2, g_1\right) + \tau^2 F_2\left(g_2, g_1\right).$$

Требование ассоциативности для матриц с крышками, учтенное с точностью до параметров релаксации τ второго порядка, дает условия на функции $F_1\left(g_2, g_1\right)$ и $F_2\left(g_2, g_1\right)$ вида

$$F_i(g,h) + F_i(gh,k) = gF_i(h,k) + F_i(g,hk) + F_i(g,h)(I-k), i = 1,2.$$

Стандартное условие для 2-когомологий групп дополнено одним слагаемым. Однородное условие для функций меняется на неоднородное. Поскольку эти функциональные условия достаточно сложны, понятна сложность процессов и симметрий, им соответствующих.

Отсюда следуют проблемы:

- найти алгоритмы конструирования симметрий процессов, используя в качестве ориентира симметрии состояний,
- классифицировать процессы, допускаемые системой состояний,
- предложить алгоритмы анализа процессов на основе знания симметрий.

Из произведения матриц следует, что заданы величины

$$A+\tau B=\begin{pmatrix} 1+v_2 v_1 \dfrac{w_1}{c^2} & -v_2-v_1 \\ -\dfrac{v_2}{c^2}w_1-\dfrac{v_1}{c^2}w_1 & 1+v_2 v_1\dfrac{w_1}{c^2}\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{v_2}{c^2} & \dfrac{v_2 v_1}{c^2}\end{pmatrix}.$$

Произведение корней квадратных запишется в виде

$$\gamma_{2,1}=\gamma_2\gamma_1+\tau 0{,}5\gamma_2^2\gamma_1\frac{v_2^2}{c^2}=\alpha+\tau\beta.$$

Отсюда

$$g_{2,1}=(A+\tau B)(\alpha+\tau\beta)=\alpha A+\tau(\alpha B+\beta A)+\tau^2\beta B=(g_2 g_1)_{\tau=0}+\tau^1 F_1(g_2,g_1)+\tau^2 F_2(g_2,g_1).$$

Значит, сигруппу можно рассматривать как деформацию группы, управляемую полиномиальными функциями $F_i(g_2,g_1), i=1,2...$, которые ассоциированы с элементами группы. Известно, что деформации группы классифицируются когомологиями групп. По этой причине становится ясно, что процесс зависит не только от группы симметрии состояний, но и от групп когомологий, ассоциированных с процессом. Поскольку группы когомологий сложны, трудно разобраться с физикой происходящих процессов.

Приложение 2.1. 4. Коммутатор сигруппы.

При анализе проблемы некоммутативности групп исходят из условия, что произведение элементов группы a,b подчинено условию $ab=hba$. Отсюда следует выражение для коммутатора группы $h=aba^{-1}b^{-1}$.

Найдем коммутатор. В рассматриваемом случае элементы сигруппы имеют вид

$$a=\begin{pmatrix}\gamma & -v\gamma \\ -\dfrac{v}{c^2}w\gamma & \gamma\end{pmatrix},\gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}w\right)^{-1/2}.$$

Поскольку они принадлежат унимодулярной группе, обратные элементы сигруппы будут отличаться только заменой знаков перед скоростью:

$$a^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma & v\gamma \\ \dfrac{v}{c^2}w\gamma & \gamma\end{pmatrix},\gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}w\right)^{-1/2}.$$

Выполнив необходимые расчеты, получим

$$h=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}.$$

Введем обозначение

$$\Gamma = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} w_1\right)^{-1} \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2} w_2\right)^{-1}.$$

Элементы коммутатора запишутся следующим образом:

$$A = \Gamma\left(\left(1 - v_1\left(\frac{v_1 w_1}{c^2} - \frac{v_2 w_2}{c^2}\right) - v_2\left(\frac{v_1 w_1}{c^2} + \frac{v_2 w_2}{c^2}\right) + v_1 \frac{v_2^2 w_2^2}{c^4}\right)\right),$$

$$B = \Gamma\left((v_1 + v_2)\frac{v_1 v_2}{c^2}(w_2 - w_1)\right),$$

$$C = \Gamma\left(-\left(\frac{v_1 w_1}{c^2} + \frac{v_2 w_2}{c^2}\right)\frac{v_1 v_2}{c^2}(w_2 - w_1)\right),$$

$$D = \Gamma\left(\left(1 + v_2\left(\frac{v_1 w_1}{c^2} - \frac{v_2 w_2}{c^2}\right) - v_1\left(\frac{v_1 w_1}{c^2} + \frac{v_2 w_2}{c^2}\right) + v_2 \frac{v_1^2 w_1^2}{c^4}\right)\right).$$

При $w_1 = w_2 = w$ получим условие, для коммутативных групп вида

$$A = D = 1, B = C = 0.$$

Приложение 2.1. 5. Двухпараметрическая сигруппа

При построении электродинамики движущихся сред Эйнштейн принял точку зрения, что уравнения Максвелла обязаны остаться неизменными. Он исходил из модели эфира (по словам Борна), предложенной Лорентцом. Уравнения эти были «дополнены». Дополнение выразилось в форме присоединения к уравнениям электродинамики вакуума (в то время никак не подтвержденной экспериментально) пространства Минковского и группы Лорентца. Из рассмотрения выпала метрика связей для полей и индукций в однородной и изотропной среде вида

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} diag(1,1,1,\varepsilon\mu).$$

До метрики отношений, ассоциированной с указанной метрикой, дело вообще не дошло.

Примем модель, в которой для построения пространства скоростей требуется метрика отношений, взаимно трансфинитная метрике связей для покоящейся среды. Используем выражение

$$\theta^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\varsigma}} diag(1,1,1,\varsigma w).$$

В упрощенном случае немагнитных сред положим $\mu = 1 \Leftrightarrow \varsigma = 1$. Выражения упростятся. Общая структура связей между полями и индукциями приобретет вид

$$\Omega^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[\theta^{ij} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{w} - 1\right)u^i u^j\right], u^i = \frac{dx^i}{d\theta} = (1 - w)u^i_{fs} + wu^i_m, if \varsigma = 1.$$

Мы знаем, что в этом случае для описания динамического процесса изменения параметров электромагнитного поля требуется использовать однопараметрическую сигруппу, которая содержит в себе как группу Галилея, так и группу Лорентца.

Рассмотрим, как меняется ситуация, когда сигруппа двухпараметрическая. Зададим двухпараметрическую метрику для отношений вида

$$\theta^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\varsigma}} diag(1,1,1,\varsigma w).$$

Получим

$$\theta_{ij} = \sqrt{\varsigma} diag\left(1,1,1,\frac{1}{\varsigma w}\right), d\theta = \frac{icdt}{\sqrt[4]{\varsigma}\sqrt{w}}\left(1-\varsigma w\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}, u^i = \frac{dx^i}{d\theta} = \sqrt[4]{\varsigma}\sqrt{w}\frac{1}{ic}\frac{dx^i}{dt}\left(1-\varsigma w\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Рассмотрим выражение

$$\Omega^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[\theta^{ij} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{w\sqrt{\varsigma}} - 1\right)u^i u^j\right].$$

При $\vec{v} = 0$ оно дает $u^0 = \sqrt[4]{\varsigma}\sqrt{w}.$ Тогда $\vec{D} = \frac{\varepsilon}{\varsigma}\vec{E} = \varepsilon^*\vec{E}, \vec{B} = \mu\varsigma\vec{H} = \mu^*\vec{H}.$

$$\Omega^{ij}(\vec{v} = 0) = \frac{1}{\sqrt{w}\sqrt{\varsigma}} diag(1,1,1,\varepsilon\mu),$$

Получим $\varepsilon\mu = \varepsilon^*\mu^*.$

Приложение 2.1.6. Индуцирование сигруппы подмножествами матричной группы Паули

Покажем, что сигруппа базируется на структуре матричных групп. Воспользуемся матричной группой Паули вида

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Скомпонуем на ее подгруппе, состоящей из матриц σ^0, σ^1, величину

$$G_{1.} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{v}{c}\right].$$

.

Определим ее действие на плоскости вида

$$\begin{pmatrix} dx' \\ d\tau' \end{pmatrix} = G_1\begin{pmatrix} dx \\ d\tau \end{pmatrix}.$$

Получим группу Лорентца с инвариантом $dx^2 - d\tau^2 = inv, \tau = ct.$ Скомпонуем на ее подмножестве, состоящем из матриц σ^0, σ^2, величину

$$G_2 = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{v}{c}\right].$$

Определим ее действие на плоскости вида

$$\begin{pmatrix} dx' \\ d\tau' \end{pmatrix} = G_2 \begin{pmatrix} dx \\ d\tau \end{pmatrix}.$$

Получим группу Евклида с инвариантом $dx^2 + d\tau^2 = inv, \tau = ct.$ Скомпонуем на подмножестве, состоящем из матриц $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2$, величину

$$G_3 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{v}{c} \right].$$

Определим ее действие на плоскости вида

$$\begin{pmatrix} dx' \\ d\tau' \end{pmatrix} = G_3 \begin{pmatrix} dx \\ d\tau \end{pmatrix}.$$

Получим группу Галилея с инвариантом $d\tau^2 = inv, \tau = ct.$

Согласуем указанные группы между собой в рамках однопараметрического обобщения. Мы приходим к однопараметрической сигруппе, действующей по формулам

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\left(1 - w\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, dt' = \frac{dt - w\frac{v}{c^2}dx}{\left(1 - w\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

При $w = -1$ отсюда следует действие группы Евклида, $w = 1$ отсюда следует действие группы Лоренца, при $w = 0$ получим действие группы Галилея.

Мы получим также систему групп, умножая G_1, G_2, G_3 на (-1). В частности, получим обобщенную сигруппу, заданную выражениями

$$dx' = (\pm 1)\frac{dx - vdt}{\left(1 - w\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, dt' = (\pm 1)\frac{dt - w\frac{v}{c^2}dx}{\left(1 - w\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Поскольку преобразования компонент тензоров второго ранга в электродинамике зависят от пары произведений компонент преобразований симметрии, то знаки плюс и минус будут компенсироваться. Будет скрыта зеркальность симметрий. Вследствие этого взаимосвязи для полей и индукций, инвариантные относительно исследуемых преобразований, будет принадлежать классу параметризованных преобразований, образующих сигруппу.

$$\vec{D} + w\left[\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{H}\right] = \varepsilon\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c} \times B\right]\right), \vec{B} + w\left[\vec{E} \times \frac{\vec{u}}{c}\right] = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D} \times \frac{\vec{u}}{c}\right]\right).$$

Группе Лорентца соответствует $w = 1$, при $w = -1$ получим группу Евклида, при $w = 0$ получим группу Галилея.

Следовательно, однопараметрическая сигруппа релаксационного процесса в электродинамике индуцируется группами, ассоциированными матричной группой Паули, исходя из использования системы ее подгрупп и ее подмножеств.

Приложение 2.1.7. Связь сигруппы с гиперкомплексными числами

При анализе составляющих для сигруппы мы использовали матрицы

$$\pi^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pi^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pi^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что по определенному алгоритму с ними могут быть связаны комплексные ($i^2 = -1$), двойные ($i^2 = 1$), дуальные $(i^2 = 0)$ числа при их выражении через действительные числа формулой

$$x = a + ib.$$

Сопоставим гиперкомплексным числам матрицы, а с произведением матриц ассоциируем «взаимодействие», полагая, что его можно измерить и отобразить системой чисел. Пусть, например, задана проекция $\uparrow \pi_\xi$ вида (элемент подмножества Паули) в виде

$$\uparrow \pi_\xi (a_1 + i_\xi b_1) \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} a_1 + \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} b_1 = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{Vmatrix}.$$

Тогда произведение этих матриц есть

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -b_1a_2 - a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{Vmatrix}.$$

Выполнив обратное проектирование $\pi \downarrow$, получим стандартное выражение для произведения комплексных чисел. Следовательно, группа Евклида ассоциирована с системой комплексных чисел.

Для двойных чисел аналогично используем матрицы, которые индуцируют группу Лорентца:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ и } \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Их произведение по указанному алгоритму дает значения

$$\begin{Vmatrix} a_1a_2 + b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & b_1b_2 + a_1a_2 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, группа Лорентца ассоциирована с системой двойных чисел.

Для дуальных чисел используем матрицы, которые индуцирую группу Галилея:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ и } \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Их произведение дает значения

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ 0 & a_1 a_2 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, дуальные числа ассоциированы с группой Галилея.

Рассмотрим характеристические полиномы использованных нами матриц.

$$1.\ Det\begin{Vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 = Det\chi_\tau,$$

$$2.\ Det\| \lambda I - \sigma \| = Det\begin{Vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 1 = Det\chi_\sigma.$$

$$3.\ Det\begin{Vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 + 1 = Det\chi_\alpha.$$

Если $Det\chi_\xi = 0$, то $\lambda_\tau = 0$, $\lambda_\sigma = \pm 1$, $\lambda_\alpha = \pm 1$. Мы имеем возможность рассматривать единицы гиперкомплексных чисел как критические значения детерминантов характеристических полиномов матриц.

Замечание 1. Мы знаем, с одной стороны, что указанная выше система физических групп принадлежит однопараметрической сигруппе. С другой стороны, с каждой из групп ассоциированы «свои» гиперкомплексные числа. Поэтому мы вправе утверждать, что нигруппа ассоциирована с системой гиперкомплексных чисел. Обратно, по системе гиперкомплексных чисел, если рассматривать их как элементы некоторого параметризованного множества, можно построить сигруппу.

Замечание 2. Из графического представления матриц следует, что матрицы $\pi^i, i = 0,1,2,3$ выражают систему отношений в паре объектов:

- π^0 -объекты имеют позитивное отношение только к себе,
- π^1 - первый и второй объекты относятся друг к другу позитивно.
- π^2 – первый объект относится ко второму позитивно, а второй к первому относится негативно,
- π^3 – первый объект относится ко второму позитивно, а второй на это влияние не реагирует.

Мы обнаруживаем здесь обобщение ситуаций, привычных для физики, когда действие равно противодействию, порождая группу Евклида и систему комплексных чисел. В реальных условиях взаимодействия, в частности, при учете всей системы психологических отношений, будет реализоваться вся система отношений. Поэтому взаимодействие может и должно быть основано на всей системе гиперкомплексных чисел. Для нигруппы такой подход естественен, хотя числовые свойства она показывает лишь косвенно. Для группы более привычно использование одной системы гиперкомплексных чисел.

По этой причине следует ожидать, что физические модели, построенные только на одной из указанных числовых систем, не в состоянии охватить и проявить весь наличный опыт. В саму модель, в начальные и граничные условия следует вводить, наряду с комплексными числами, также дуальные и двойные числа. Это замечание особенно важно, когда речь идет об исследовании сингулярных состояний и активностей. В другой системе чисел такой сингулярности может не быть.

Покажем, что данный алгоритм пригоден для матриц размерности 3×3. Для них мы нашли ранее матрицы, обладающие свойствами:

$$i^3 = j^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Они имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = j.$$

Изменив один знак плюс в данных матрицах на минус, мы получим матрицы, обладающие свойством

$$\alpha^3 = \beta^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Их явный вид таков:

$$\alpha^i \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^i \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Почленно складывая матрицы и деля сумму пополам, получим матрицы, обладающие свойством

$$\pi^3 = \tau^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Их явный вид таков:

$$\pi^i \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau^i \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следуя структуре указанных матриц, мы определили 6 мест, в которые можно расположить функции, характеризующие структуру нигруппы. Построим кинематическую группу на указанных матрицах и укажем вариант построения на этой основе системы сигрупп. Пусть группа задана выражением вида (элементы группы безразмерны):

$$g = \begin{pmatrix} a & v_x & v_y \\ v_y & a & v_x \\ v_x & v_y & a \end{pmatrix}, Detg = a^3 + v^3{}_x + v^3{}_y - 3av_x v_y .$$

Тогда ее действие в кокасательном пространстве определено формулой

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ cdt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & v_x & v_y \\ v_y & a & v_x \\ v_x & v_y & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ cdt \end{pmatrix}.$$

Новая кинематическая группа, если привести ее к унимодулярному виду, характеризуется «релятивистским» множителем

$$\Gamma^{-1} = \sqrt[3]{a^3 + v^3{}_x + v^3{}_y - 3av_x v_y} .$$

По этой причине кинематическое поведение дифференциалов координат будет существенно отличаться от привычного релятивистского поведения.

Данная группа на основе системы гиперкомплексных чисел порождает систему нигрупп. Для однопараметрических нигрупп достаточно ввести функцию на одно из отмеченных «звездочками» мест:

$$\begin{pmatrix} \circ & * & * \\ * & \circ & * \\ * & * & \circ \end{pmatrix}$$

У двухпараметрических нигрупп занимаются функциями две «звездочки». В рассматриваемом случае максимальная размерность нигруппы (задаваемая числом ее параметров) равна шести.

Приложение 2.1.8. Иерархия симметрий, конструирование сигрупп по системе подгрупп

Рассмотрим матричную группу с элементами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме единичного элемента в ней присутствуют 7 других элементов. Укажем подгруппы данной группы. Они заданы парами матриц вида

$$1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.2)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}.3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.4)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

$$5)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.6)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Они заданы также тройками матриц вида

$$7)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}.8)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Их физический смысл обнаруживается при изучений действий на плоскости. Пусть переменными на плоскости являются координаты $x^1 = x, x^2 = ct.$ Пусть параметрами группы будут безразмерные скорости типа $\frac{v}{c}$. Тогда выражение

$$\begin{pmatrix}x'\\ct'\end{pmatrix}=\gamma\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\frac{v}{c}\right]\begin{pmatrix}x\\ct\end{pmatrix}$$

задает действие первой группы на плоскости:

$$x' = \gamma(x+vt), t' = \gamma\left(t+\frac{v}{c^2}x\right).$$

Оно характеризует согласованные растяжения и вращения, ассоциированные со скоростями v, и совпадает с действием канонической группы Лорентца, если выбрать

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Группы 3)-6), генераторы которых расположены по главной диагонали матриц 2×2, задают только согласованные растяжения, зависимые от параметров, на которых строится группа, зависимая от параметров. Выбор параметров здесь пока ничем не ограничен, допуская разные физические возможности. В частности, это может быть зависимость от температуры, от ускорений. Может быть также зависимость от некоторой согласованной системы физических параметров, которые могут дополнительно зависеть от других величин.

Группы 7),8) содержат генераторы, расположенные по главной и по второстепенной диагонали. По этой причине их действие сводится к вращениям и растяжениям, как согласованным, так и не согласованным друг с другом. При этом допустимо рассматривать разные физические факторы, которым подчинена исследуемая взаимосвязь.

Желая рассматривать не только состояния физических изделий и их движений, но также процессы, которые приводят к этим состояниям, мы обязаны физически и математически обосновать новые величины, посредством которых характеризуется именно процесс, в частности, его разные стадии.

Без величин, характеризующих стадии процесса, невозможно записать и теоретически исследовать процесс.

Анализ показал, что для физического процесса требуются величины, ассоциированные с величинами, характеризующими поведение физической системы в отсутствие внешних относительных скоростей. Собственная скорость электромагнитного поля в физической среде подсказывает количество и качество величин, требуемых для учета других возможных скоростей. Для электромагнитного поля, движущегося в среде, требуется пара величин: диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости. Они соединены в тензор диэлектрической проницаемости вида

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} diag(1,1,1,\varepsilon\mu).$$

Действуя сообразно данной «подсказке» со стороны электромагнитного поля и среды, мы можем ввести для учета факторов, описывающих процесс изменения параметров электромагнитного поля, обусловленного внешними скоростями, выражение вида

$$\theta^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\varsigma}} diag(1,1,1,\xi\varsigma).$$

В случае, когда магнитная проницаемость $\mu = 1$, когда среда не намагничена, ожидаемое выражение для θ^{ij} становится проще. Ранее оно записано нами в виде

$$\theta^{ij} = diag(1,1,1,w),$$

а величина w названа показателем отношения. Для нее найдено соотношение с физическими параметрами задачи, а также согласованная связь внешних скоростей друг с другом. Для анализа динамического процесса используются преобразования координат и времени, зависящие от показателя отношения w вида

$$x' = \gamma(w)(x + vt), t' = \gamma(w)\left(t + w\frac{v}{c^2}x\right),$$

$$\gamma(w) = \left(1 - w\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Из этих выражений следует, что они не образуют группу. «Частичное» введение величины w преобразует группу в качественно новый математический объект, названный сигруппой. По-видимому, каждую группу можно аналогичным образом преобразовать в сигруппу. Легко видеть, что сигруппа объединяет в себе семейство как изоморфных, так и неизоморфных групп, что также свидетельствует о новом качестве сигруппы, не присущем группе.

Примем точку зрения, что сигруппа способна описывать физические процессы. В данном случае это связано с мультипликативным и частичным введением новой величины в известную группу Лорентца, на основе которой описываются состояния физических изделий или явлений, с ними ассоциированных.

Проанализируем механизм превращения группы в сигруппу в рассматриваемом случае. Группа Лорентца имеет следующую структуру: каждый элемент матрицы, представляющей группу, является произведением двух элементов. Аналогично выглядит сигруппа. Поэтому преобразование группы в сигруппу символично выглядит так:

$$\frac{1}{\gamma^{1/2}}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\widehat{\gamma}^{1/2}}\begin{pmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} \end{pmatrix}, \gamma = \det A, \widehat{\gamma} = \det \widehat{A}.$$

По одному способу преобразуется одна группа элементов: $a_{ij} \Rightarrow \widehat{a}_{ij}$. По другому способу преобразуется вторая группа элементов: $\det A \Rightarrow \det \widehat{A}$. Для преобразования первого типа можно дополнительно использовать систему матриц

$$\begin{pmatrix} \xi & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \varsigma \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \zeta & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \tau \end{pmatrix},$$

которые умножаются на матричный элемент группы почленно, по Адамару. Так возникает семейство сигрупп. Указанные неединичные элементы могут быть полиномами от других переменных, например $\tau = \tau_1 \tau_2 ... \tau_p$. Частный вариант, рассмотренный выше, сводится к тому, что

$$\xi = \varsigma = \tau = 1, \zeta = w.$$

Возможно построение системы сигрупп по заданной группе, для этого пригодны разные приемы и подходы. Рассмотрим один из них. Умножим элемент канонической группы Лорентца на элемент группы треугольных матриц, принадлежащих унимодулярной группе:

$$g_b = \frac{\left(1 - w\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (w-1) \frac{v}{c^2} \frac{1}{\left(1 - w\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right] \subset G_b.$$

Он несингулярен при $w = 0$. Группа базируется на дуальных числах и нелинейна по параметрам $\left(w, \dfrac{v}{c}\right)$. Введенный параметр w мы интерпретируем физически как фактор взаимодействия электромагнитного поля со средой. Рассмотрим

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2} w_1}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ \dfrac{v}{c^2} w_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2} w_1}}{\sqrt{1 - w\dfrac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \dfrac{1 - \dfrac{v^2}{c^2} w}{1 - \dfrac{v^2}{c^2} w_1} & 0 \\ \dfrac{(w - w_1)\dfrac{v}{c^2}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2} w_1} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - w\dfrac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ w\dfrac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы перемножили пару элементов, принадлежащих подгруппе G_a и подгруппе G_b, принадлежащих унимодулярной группе. В итоге получен качественно новый объект, названный нигруппой. Конечно, возможно рассмотрение большего числа групп и их произведений, что приведет к новым математическим объектам. Они могут быть пригодны для описания сложных процессов.

В рассматриваемом варианте действие сигруппы в данном случае есть действие произведения двух неизоморфных подгрупп. Понятно, что информация об одной сигруппе может позволить, в некоторых случаях, обойтись без информации о паре групп, реализуя некоторую «экономию усилий».

Примем модель визуальной аналогии, сопоставляя группе окружность, а сигруппе – отрезок. Тогда получим «бабочку», тело которой образует сигруппа, а ее крылья есть пара окружностей. Эти окружности соединены с отрезком, сопоставляемым сигруппе.

Выразим элемент, используемый для превращения группы в сигруппу, в виде произведения элементов двух групп:

$$G_{1,2}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}w}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 0\\ \frac{(w-w_1)\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{(w-w_1)\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}w} & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}w}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow G_1\cdot G_2.$$

Изучим структуру группы G_2. Так как

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}=0{,}5\left(a+a^{-1}\right)\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}}\right],$$

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab & 0\\ 0 & a^{-1}b^{-1}\end{pmatrix},$$

мы имеем дело с однопараметрической группой. Новая безразмерная величина

$$a=\frac{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}}$$

выступает в роли функционального параметра группы G_2.

Рассмотрим структуру группы G_1. Она задана выражением вида

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \sigma & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot 1+\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]0{,}5\sigma+$$
$$+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot 0+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot 0+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot 0+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot 0.$$

Величину

$$\sigma=\frac{(w-w_1)\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}$$

назовем вторым функциональным параметром сигруппы. Мы понимаем теперь, что релаксационный процесс, исследуемый в электродинамике, пригоден для описания электродинамических явлений для малых относительных скоростей движения источников излучения и детекторов. Он лишь частично использует указанные генераторы групп. Естественно считать, что релаксационные процессы выражают только часть из всей совокупности возможных процессов.

Функциональные параметры группы G_1 действуют аддитивно, функциональные параметры группы G_2 действуют мультипликативно. Следовательно, в рассматриваемом случае нигруппа задается в форме произведения трех групп: обобщенной кинематической G_L, зависимой от скорости v, показателя отношения w, а также групп G_1, G_2. Следовательно, при анализе процессов требуется использовать преобразование волновых функций ψ, выражающих систему состояний, зависимое от системы групп. В рассматриваемом случае

$$\psi' = U(1) \cdot U(2) \cdot U(3) \cdot \psi.$$

В этом варианте анализа следует «пересмотреть» алгоритм калибровочного описания физических явлений:

- изучить новую структуру калибровочных полей,
- уточнить сущность и структуру законов сохранения (стандартных для калибровочной группы) и законов поведения (следующих из рассмотрения системы групп, которые могут не принадлежать калибровочной группе),
- выйти за пределы «идеологии компенсации», включив в рассмотрение систему величин вида

$$G_{mn} = \partial_m A_n(g) + \partial_n A_m(g),$$

ассоциированных с группой заполнения физических явлений и выражающих структуру гравидинамики,
- согласовать между собой структуру симметричных и антисимметричных физических полей, индуцированных положительными и отрицательными электрическими и гравитационными предзарядами.

Представим сигруппу в окрестности единицы. В этом случае

$$g^* = \left(I + \alpha^i(1)\theta_i(1)\right)\left(I + \alpha^i(2)\theta_i(2)\right)\left(I + \alpha^i(3)\theta_i(3)\right) = I + \alpha^i(1)\theta_i(1) + \alpha^i(2)\theta_i(2) + \alpha^i(3)\theta_i(3).$$

Значит, сигруппа порождает систему калибровочных полей, согласованных друг с другом.

Рассмотрим проблему системы калибровочных полей с другой стороны. Запишем элементы изучаемых групп через элементы базиса матричной алгебры вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$G_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} w_1}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ \frac{v}{c^2} w_1 & 1 \end{pmatrix} = E \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} w_1}} + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0{,}5 \frac{\left(1 + \frac{w_1}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} w_1}} v + \gamma \cdot 0{,}5 \frac{\left(1 - \frac{w_1}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} w_1}} v,$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix} = E \cdot 1 + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0{,}5\sigma + \gamma \cdot (-0{,}5\sigma), \qquad \sigma = \frac{(w - w_1)\frac{v}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2} w_1},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = E \cdot 0{,}5\left(a + a^{-1}\right) + \alpha \cdot 0{,}5\left(a - a^{-1}\right) + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0, \qquad a = \frac{\sqrt{1 - w\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} w_1}}.$$

Их произведение выразится в форме элемента матричной алгебры:

$$G = G_0 G_1 G_2 = \vec{\tau} \cdot \vec{U} = \tau^a \cdot U_a.$$

Выражение для U_a будет зависеть от 64 слагаемых, не так, обобщая подход стандартной теории калибровочных полей. Поэтому ее следует рассматривать как начало «алфавита». «Слова» и «тексты», адекватные реальности, еще нужно найти. Заметим, что модель фотона, используемая в стандартной теории, очень далека от реальных частиц света, структура и свойства которых чрезвычайно многообразны. Поэтому мы вправе считать, что столь же далеки от реальности бозоны $Z_0, W^{\pm}$. Они выражают только часть многогранной действительности, относящейся к слабым взаимодействиям. Аналогичное замечание справедливо для кварков и глюонов, используемых в моделях сильных взаимодействий.

Произведение двух элементов сигруппы дает элемент, не принадлежащий сигруппе:

$$A \cdot B = \kappa C + \sigma.$$

Здесь A, B, C принадлежат множеству сигруппы M_1, элементы κ, σ принадлежат, соответственно, мультипликативной и аддитивной группам. Следовательно, структуре сигруппы свойственна пара операций и множество, состоящее из пяти неизоморфных групп. По этой причине новый объект можно называть также послегруппой. Кажется очевидным, что структура послегруппы достаточна для классификации физических процессов, если характеризовать их системой групп и функциональной операцией для их произведения.

Произведение элементов группы задается правилом: $A \cdot B = C$.

Определим предгруппу тройным произведением: $A \cdot B \cdot C = D$.

Предпредгруппа определяется произведением четырех элементов: $A \cdot B \cdot C \cdot D = E$.

Рассмотрим выражение для коммутатора неабелевой группы, превращающей кинематическую группу в нигруппу. Учтем соотношение используемых матриц и обратных им в данном конкретном случае:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -da^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Примем во внимание, что множители перед указанными матрицами будут взаимно обратны. Поэтому явное выражение коммутатора, следующее из условия

$$ab = qba \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} = q,$$

получит вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{v_1^2}{c^2}w_1}{1-\frac{v_1^2}{c^2}} & 0 \\ \dfrac{(w_1-1)\frac{v_1}{c^2}}{1-\frac{v_1^2}{c^2}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{v_2^2}{c^2}w_2}{1-\frac{v_2^2}{c^2}} & 0 \\ \dfrac{(w_2-1)\frac{v_2}{c^2}}{1-\frac{v_2^2}{c^2}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{v_1^2}{c^2}}{1-\frac{v_1^2}{c^2}w_1} & 0 \\ -\dfrac{(w_1-1)\frac{v_1}{c^2}}{1-\frac{v_1^2}{c^2}w_1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{v_2^2}{c^2}}{1-\frac{v_2^2}{c^2}w_2} & 0 \\ -\dfrac{(w_2-1)\frac{v_2}{c^2}}{1-\frac{v_2^2}{c^2}w_2} & 1 \end{pmatrix} = q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения:

$$\Gamma_1 = 1-\frac{v_1^2}{c^2}, \Gamma_1(w_1) = 1-\frac{v_1^2}{c^2}w_1, \Gamma_2 = 1-\frac{v_2^2}{c^2}, \Gamma_2(w_2) = 1-\frac{v_2^2}{c^2}w_2.$$

Тогда явное выражение для σ запишется формулой

$$\sigma_1 = (w_1-1)\frac{v_1}{c^2}\frac{1}{\Gamma_1(w_1)}\left(1-\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2(w_2)}\right), \sigma_2 = -(w_2-1)\frac{v_2}{c^2}\frac{1}{\Gamma_2(w_2)}\left(1-\frac{\Gamma_1}{\Gamma_1(w_2)}\right), \sigma = \sigma_1+\sigma_2.$$

Некоммутативность группы, переводящей кинематическую группу в кинематическую сигруппу, характеризуется, согласно ее коммутатору, смешанным произведением пары базовых факторов некоммутативности. Их явный вид указан выше.

Коммутатор от коммутатора дает единичную матрицу, что свидетельствует о разрешимости группы, переводящей группу Лорентца в нигруппу. Действительно, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Различие кинематической группы и кинематической сигруппы кажется очень простым по форме: выполнив замену

$$c \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{w}},$$

мы перейдем от кинематической группы к кинематической сигруппе.

Конечно, так мы не сможем «охватить» дополнительные черты сигруппы, для которой важно использовать не просто формальные скорости, а реальные их связи, согласованные с показателем отношения. Например, как мы знаем из расчета и из эксперимента, это может быть выражение

$$v = (1-w)v_{fs} + wv_m,$$

где v_{fs} – скорость первичного источника излучения, v_m – скорость физической среды, в частности, детектора излучения.

Данное замечание приведено для того, чтобы проиллюстрировать факт, что кинематическая нигруппа может быть «более физичной», чем кинематическая группа. Это обстоятельство выглядит естественным, потому что сигруппа учитывает новые физические свойства, которые у группы содержатся в скрытом виде, например, соответствуя $w=1$. Ситуация становится еще более сложной, когда и скорости, и показатель отношения переменны.

Общий прием построения сигрупп по группе может выглядеть так: нужно выполнить замену единицы, или нескольких единиц в элементах группы, функциями $\varphi_{1,}\varphi_2 ...,$ активизируя скрытые параметры и скрытые возможности симметрии. Подчиняя вводимые функции динамическим уравнениям, мы активизируем симметрию не только формально, но и сущностно.

Активизация группы с переходом к сигруппе индуцирует продолжение физических моделей, имеющих симметрию группы. Сигруппа, а тем более их семейство, индуцируют изменение величин, операторов, а также начальных и граничных условий при анализе физических конструкций и физических моделей. Речь фактически идет о нигрупповом продолжении физических моделей.

Приложение 2.1.9. Некоммутативный моноид для вложения сигруппы

Из анализа экспериментов в электродинамике следует, что релятивистский процесс для света описывается посредством симметрийных элементов GH, которые представляют собой произведение отличных от единицы элементов трех неизоморфных групп:

$$G_a = I + a, G_b = I + b, G_c = I + c,$$
$$GH = abc.$$

В связи с этим обстоятельством возникает задача вложения GH в некоторую известную математическую структуру. Естественно рассмотреть полупрямое произведение базовых групп, так как произведение трех элементов $a,b,c,$, отличных от единицы дает GH. Действительно,

$$G_a G_b G_c = I + ab + ac + bc + abc.$$

Выясним структуру указанных элементов, учитывая некоммутативность произведения элементов. Выразим ее в явном виде. Произведения можно разделить на несколько «уровней».

Первый уровень образуют исходные элементы групп.

$$a = \gamma\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ a\alpha & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & \\ * & * \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}.$$

Второй уровень задан произведениями элементов $a,b,c.$

$$ab = \gamma\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ a\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1+\alpha\sigma & \alpha \\ a\alpha+\sigma & 1 \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ a\alpha & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} \alpha\sigma & 0 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & \\ * & * \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & \\ * & \end{pmatrix}.$$

$$ba = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}\gamma\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ a\alpha & 1 \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \sigma + a\alpha & 1+\alpha\sigma \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ a\alpha & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma & \alpha\sigma \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ * & * \end{pmatrix}.$$

$$bc=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \sigma & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & 0\\ c\sigma & c^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ c\sigma & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\ast & \\ \ast & \ast\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ast & \\ & \ast\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\ast & \\ & \ast\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & \\ \ast & \end{pmatrix}.$$

$$cb=\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \sigma & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & 0\\ c^{-1}\sigma & c^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ c^{-1} & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\ast & \\ & \ast\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ast & \\ \ast & \ast\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\ast & \\ & \ast\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & \\ \ast & \end{pmatrix}.$$

$$ca=\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ a\alpha & 1\end{pmatrix}\gamma=\gamma\begin{pmatrix}b & b\alpha\\ ab^{-1}\alpha & b^{-1}\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1+(b-1) & \alpha+(b-1)\alpha\\ a\alpha+(b^{-1}-1)a\alpha & 1+(b^{-1}-1)\end{pmatrix}=$$
$$=\gamma\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ a\alpha & 1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}+\gamma(-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\gamma\alpha\begin{pmatrix}0 & b-1\\ a(b^{-1}-1) & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\ast & \\ & \ast\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ast & \ast\\ \ast & \ast\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\ast & \ast\\ \ast & \ast\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\ast & \\ & \ast\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & \ast\\ \ast & \end{pmatrix}.$$

$$ac=\gamma\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ a\alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}b & b^{-1}\alpha\\ ab\alpha & b^{-1}\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1+(b-1) & \alpha+(b^{-1}-1)\alpha\\ a\alpha+(b-1)a\alpha & 1+(b^{-1}-1)\end{pmatrix}=$$
$$=\gamma\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ a\alpha & 1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}+\gamma(-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\alpha\gamma\begin{pmatrix}0 & b^{-1}\\ ab & \end{pmatrix}+\gamma\alpha(-1)\begin{pmatrix}0 & 1\\ a & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\ast & \ast\\ \ast & \ast\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ast & \\ & \ast\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\ast & \ast\\ \ast & \ast\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\ast & \\ & \ast\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & \ast\\ \ast & \end{pmatrix}.$$

Третий уровень задан произведениями исходных элементов и тех новых элементов, которые получены на втором уровне. Новые элементы следуют из произведений вида

$$\begin{pmatrix}\ast & \\ \ast & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ \ast & \ast\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\ast & \ast\\ & \end{pmatrix},\begin{pmatrix} & \\ \ast & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \ast\\ & \ast\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} & \\ & \ast\end{pmatrix},\begin{pmatrix} & \ast\\ \ast & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & \ast\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} & \ast\\ & \end{pmatrix}.$$

Четвертый уровень выражается через предыдущие элементы в форме произведения

$$\begin{pmatrix}\ast & \ast\\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ \ast & \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\ast & \\ & \end{pmatrix}.$$

Вся система элементов образует полугруппу с единицей, называемую моноидом, так как левые и правые идеалы, а также матрицы с одним элементом, не имеют обратных. Эта полугруппа некоммутативна. Элементы типа GH входят в состав моноида.

Исходные группы с элементами a, b, c порождают некоммутативный моноид, что задает ее ранг R=3. Порядок полугруппы N=13 определяется числом ее независимых элементов.

Представим всю систему базовых элементов некоммутативной полугруппы:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Система образующих элементов некоммутативного моноида такова:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Складывается впечатление, что необратимость процессов, с математической точки зрения, обусловлена тем обстоятельством, что их симметрия подчинена некоммутативному моноиду. В силу обстоятельства, что у некоторых элементов моноида нет обратных элементов, процессу «запрещено» идти в обратную сторону.

В приложении к частице света известна физическая необратимость: скорость частицы света способна «превратиться» в ее частоту, а частота частицы света неспособна превратиться в ее скорость.

Конечно, могут существовать какие-то особые условия, при которых это реализуется, но в обычной практике таких обратных изменений нет.

2.2. НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ И ПРИЛОЖЕНИЯ SH – СИММЕТРИЙ

Указан метод получения когомологически активных SH-симметрий из обычных пространственно-временных S-симметрий на основе функциональной деформации их генераторов Γ_s и параметров θ_s. Из S-преобразований Лорентца получена SH-симметрия Лорентца, содержащая функцию управления w несобственной инерцией электромагнитного поля. Найдена функция Грина для обобщенной системы уравнений электродинамики Максвелла. Рассмотрены случаи досветовых, световых и сверхсветовых движений. Указаны некоторые черты распространения излучения в среде при медленном изменении w. Использованы функционалы w(x), конкретизирующие состояния объектов или явлений. Показано, что группа изометрий ассоциирована с релаксационными физическими процессами.

При анализе физических задач приходится иметь дело с системой неизоморфных симметрий, объединенных в одно семейство, зависящее от дополнительных параметров. В данной лекции рассмотрен подход, позволяющий построение таких симметрий, привычных для электродинамики. Намечены пути дальнейшего продвижения в указанном направлении. Показано, что SH-симметрии являются физическим углублением *S*-симметрий. Меняется их качество на основе учета новых физических факторов, ассоциированных с задачей. Они дают дополнительные возможности для анализа и интерпретации физических явлений. В простейшем случае углубление базируется на скалярной функции. Допустимо также использование производных от фактора активности. В сложных ситуациях могут понадобиться векторы и тензоры. Они будут характеризовать активность исследуемых физических конструкций и их качеств.

2.2.1. Углубление симметрий

Рассмотрим простой случай. Пусть модель физического явления задана уравнениями

$$L\Psi = 0\,,$$

где L - система дифференциальных операторов, Ψ - волновая функция. Пространственно-временная или *S*-симметрия модели содержит дифференциальные операторы Q, относительно которых инвариантны уравнения физической модели и которые переводят друг в друга их решения. Тогда

$$LQ\Psi - QL\Psi = 0\,.$$

S-симметрии соответствуют инфинитезимальные генераторы Γ_s и параметры группы Θ^s. Она имеет вид

$$dx^{\mu}{}' = \left(I + \Gamma_s \Theta^s\right)^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}\,.$$

Если модель физического явления может быть представлена в группе G в форме *GAG*-модуля, как указано в главе 3, назовем ее группой заполнения физической модели. Будем считать, что генераторы ее алгебры A являются частным случаем параметрически зависимых матриц $Q \in \widetilde{Q}$, инвариантные полиномы $Sp\,\widetilde{Q}$ и $Det\,\widetilde{Q}$ для которых переменны и удовлетворяют уравнениям динамики. Пусть инвариант $Sp\,\widetilde{Q} = \widetilde{\sigma}$ характеризует пространство событий *SE* для физической модели. Пусть инвариант

$$Det\,\widetilde{Q} = \widetilde{w}$$

рассматривается как фактор динамики инерции явления. Используем обобщенные генераторы алгебры заполнения и параметры симметрии:

$$\widetilde{\Gamma}_s = \widetilde{Q}\,\Gamma_s\,\widetilde{Q}^{-1}, \quad \widetilde{\Theta}^s = \underset{(1)}{F}\,\Theta^s_{fs} + \underset{(2)}{F}\,\Theta^s_m\,.$$

Пусть

$$Q \circ Q^{-1} = I, \underset{(1)}{F} + \underset{(2)}{F} = 1.$$

Рассмотрим новые инфинитезимальные преобразования

$$dx^{\mu}{}' = \left(I + \widetilde{\Gamma}_S\,\widetilde{\Theta}^s\right)^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}\,.$$

В них генераторы $\tilde{\Gamma}_s$ и параметры симметрии $\tilde{\Theta}^s$ зависят от значений $\tilde{w}$, $\tilde{\sigma}$ инвариантных полиномов. Полученные таким образом симметрии "сплетают" *S*-симметрию с квазигруппой управления инерцией *w*, которая соответствует инвариантному скаляру

$$w = \frac{Det\tilde{Q}}{DetQ}.$$

Формы и виды "сплетения" симметрий могут быть разными. Предложенный вариант задает одну конкретную возможность. В рамках принятых допущений (поскольку $\tilde{\Gamma}_S$ и $\tilde{\Theta}^s$ зависят от *w*) имеем нелинейную зависимость *SH*-симметрий от *w* и 5-мерное пространство основных состояний. Действительно,

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\left(1 - w\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \frac{dt - dxw\frac{v}{c^2}}{\left(1 - w\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad dw' = dw,$$

где $v = (1 - w)u_{fs} + wu_m$ или $v = v_\xi = u_{fs} + wu_m$. Можно принять точку зрения, что исходное физическое пространство всегда было пятимерно, охватывая и проявляя место R^3, время T^1, отношение *w*. Принимая *t* и *w* за основные координаты исходного расслоенного пространства, мы имеем их прямое произведение $R^3 \times (T, w)$. Тонкость состоит в том, что не только генераторы SH-симметрий, но и параметры Θ^s зависят от w. Интересен случай, когда между собой сплетены несколько симметрий.

Рассмотрим вариант пассивной SH-симметрии, полагая $w = const$. Отношению

$$w = 1 - \exp[-P_0(n-1)]$$

соответствуют разные физические условия:

а) $w = 0$ - вакуум;

б) $0 < w < 1$ - разреженная газовая среда;

в) $w = 1$ - "плотная" среда.

При $v = const$ *SH*-симметрии задают преобразования Лорентца, обобщенные с учетом w. Они переходят в стандартные при замене $\tilde{c} = c/\sqrt{w}$, что позволяет легко вывести уравнения Максвелла, обобщенные с учетом *w*. Соотношения для полей и индукций содержат скорость $\vec{u}$, которая имеет формальный смысл, потому что ни преобразования координат, ни указанная замена не имеют средств раскрыть ее. Дополнительный анализ инерции электромагнитного поля показал, что для кинематики достаточно взять

$$\vec{u} = (1 - w)\vec{u}_{fs} + w\vec{u}_m,$$

где $\vec{u}_{fs}$ - скорость первичного источника излучения, $\vec{u}_m$ - скорость физической среды. В общем случае недостаточно знать и использовать только SH-симметрию. Для согласующейся с опытом модели нужны дополнительные физические предположения. Фактически мы ввели $w(\vec{x}, t)$ как "управляющее поле", говоря словами Г. Вейля, учитывая новые грани "физического поля состояний" и конкретизируя взаимодействие электромагнитного поля с материей.

Мы понимаем теперь, что каноническая симметрия Лорентца является «ростковой точкой» семейства параметрических симметрий. Их новые стороны и свойства способны учитывать новые стороны и свойства исследуемых конструкций и их физических движений.

Как показано ранее, симметрия Лорентца, зависимая от активного показателя отношения W, индуцирующая указанную выше связь скоростей, соответствует только релаксационным процессам для света. Понятно, что этот класс процессов важен, но он не является единственным. По этой причине мы обязаны изучать все многообразие процессов переноса, выходя за рамки преобразований Лорентца. На роль такой обобщенной симметрии естественно претендует унимодулярная и линейная группы, для которых группа Лорентца является их нормальной подгруппой.

2.3. СТРУКТУРА И РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЙ С НЕКОТОРЫМИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

2.3.1.Конструирование канонической мономиальной группы CMN(4)

Рассмотрим все варианты мономиального расположения канонических элементов (единиц) в матрицах размерности 4×4. Введем конструирующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 0 & \bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bullet & 0 & \bullet \\ \bullet & 0 & \bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Расположим 2×2 матрицы в свободных местах матриц 3×3, заполним матрицы 4×4 полученными матрицами 3×3. Получим таблицу П. 1.1:

Таблица П1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Найдем распределение элементов по подгруппам, используя различие в схемах отношений и спинорные комбинаторные операции. Анализ классов отношений указал систему возможностей.

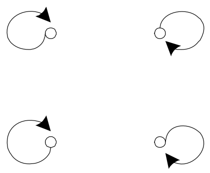
Нами выбрана упорядоченная основа для конечной схемы отношений для четырёх элементов

4 ○ ○ 1

3 ○ ○ 2

α

A:

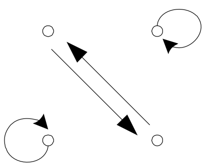


$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

Различие исходных элементов соответствует привычному отличию отношений в системе, состоящей из указанных нами элементов

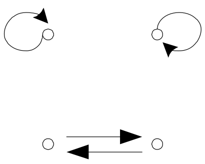
β

B:



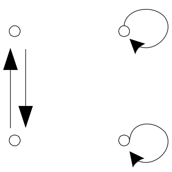
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

C:



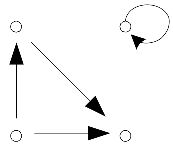
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

D:

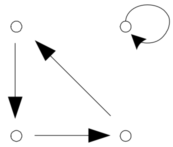


$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{E:}} \\ \\ \boxed{\text{F:}} \end{array} \right.$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

α β γ дискретно различаются по $Sp(\xi)$.

Заметим, что есть аналогия между спинорной комбинаторной группой и диагональными матрицами Картана, им соответствующими. Действительно

$$\underbrace{\left)\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}\right(\begin{matrix}\mapsto\\\mapsto\\\mapsto\\\mapsto\end{matrix}}_{X}, \quad \underbrace{\left)\begin{matrix}1\\-1\\1\\-1\end{matrix}\right(\begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsto\\\mapsfrom\end{matrix}}_{C_1}, \quad \underbrace{\left)\begin{matrix}1\\1\\-1\\-1\end{matrix}\right(\begin{matrix}\mapsto\\\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsfrom\end{matrix}}_{C_2}, \quad \underbrace{\left)\begin{matrix}1\\-1\\-1\\1\end{matrix}\right(\begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsfrom\\\mapsto\end{matrix}}_{C_3}.$$

Здесь $\left)\begin{matrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{matrix}\right($ означает диагональную матрицу.

Всю систему матриц можно распределить следующим образом:

$$\boxed{\text{A:}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsto\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsto\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsto\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsto\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\boxed{\text{B:}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsto\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsto\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsto\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsto\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\boxed{\text{C:}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsfrom\end{matrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\boxed{\text{D:}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsfrom\\\mapsto\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsfrom\\\mapsto\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsfrom\\\mapsto\end{matrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\mapsto\\\mapsfrom\\\mapsfrom\\\mapsto\end{matrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\boxed{\text{E:}}\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\mapsto\\ \mapsto\\ \mapsfrom\\ \mapsfrom\end{matrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\mapsto\\ \mapsto\\ \mapsfrom\\ \mapsfrom\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\mapsto\\ \mapsto\\ \mapsfrom\\ \mapsfrom\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\mapsto\\ \mapsto\\ \mapsfrom\\ \mapsfrom\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\dots$$

$$\boxed{\text{F:}}\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\mapsto\\ \mapsfrom\\ \mapsfrom\\ \mapsto\end{matrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\mapsto\\ \mapsfrom\\ \mapsfrom\\ \mapsto\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\mapsto\\ \mapsfrom\\ \mapsfrom\\ \mapsto\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\mapsto\\ \mapsfrom\\ \mapsfrom\\ \mapsto\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\dots$$

Остальные комбинаторные операции дают в применении к данной системе матриц немономиальные варианты, нарушают мономиальность.

Проверка показывает, что мы получили матричные подгруппы, заданные объединениями матриц:

$$A;\ A\oplus B,\ A\oplus C,\ A\oplus D;\ A\oplus E\oplus F.$$

Разобьем систему канонических мономиальных матриц на подгруппы.

$$\dim\left(A\oplus E\oplus F\right)=\dim A+\dim\left(A\oplus\xi\right),\quad \xi\in B, C, D.$$

Выполним обозначения матриц для удобства дальнейшего использования.

$$\boxed{\text{A:}}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{a_1}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}}_{a_2}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}}_{a_3}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}}_{a_4},\qquad a_i^{-1}=a_i.$$

$$\boxed{\text{B:}}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}}_{b_1}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}}_{b_2}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{b_3}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}}_{b_4},\qquad \begin{matrix}b_1^{-1}=b_1,\\ b_2^{-1}=b_4,\\ b_3^{-1}=b_3,\\ b_4^{-1}=b_2.\end{matrix}$$

$$\boxed{\text{C:}}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{c_1}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}}_{c_2}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}}_{c_3}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}}_{c_4},\qquad \begin{matrix}c_1^{-1}=c_1,\\ c_2^{-1}=c_3,\\ c_3^{-1}=c_2,\\ c_4^{-1}=c_4.\end{matrix}$$

$$\boxed{\text{D:}}\quad \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}}_{d_1}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{d_2}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}}_{d_3}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}}_{d_4}\qquad \begin{aligned}d_1^{-1}&=d_1,\\ d_2^{-1}&=d_2,\\ d_3^{-1}&=d_4,\\ d_4^{-1}&=d_3.\end{aligned},$$

$$\boxed{\text{E:}}\quad \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{e_3}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}}_{e_4}\qquad \begin{aligned}e_1^{-1}&=f_1,\\ e_2^{-1}&=f_4,\\ e_3^{-1}&=f_2,\\ e_4^{-1}&=f_3.\end{aligned},$$

$$\boxed{\text{F:}}\quad \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}}_{f_1}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{f_2}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}}_{f_3}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}}_{f_4}\qquad \begin{aligned}f_1^{-1}&=e_1,\\ f_2^{-1}&=e_3,\\ f_3^{-1}&=e_4,\\ f_4^{-1}&=e_2.\end{aligned},$$

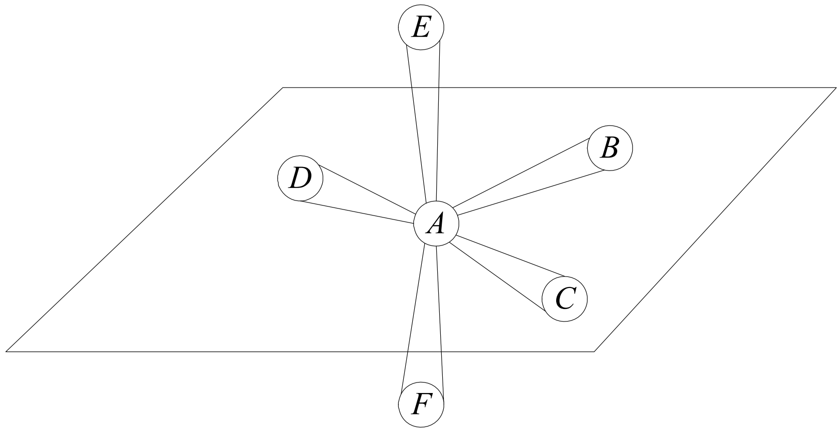


Рис. П1.1. Расположение матриц в фактор-группе
$SO(4)/A : A;\ A\oplus B;\ A\oplus C;\ A\oplus D;\ A\oplus E\oplus F$

Изучим таблицу умножения элементов данной группы. Получим свойства произведений:

$$\begin{aligned}&AA \Rightarrow A,\\ &BB \Rightarrow A, CC \Rightarrow A, DD \Rightarrow A,\\ &EF \Rightarrow A, FE \Rightarrow A.\end{aligned}$$

Данная система соответствует структуре факторгруппы для группы А, выступающей в роли нормальной подгруппы.

Структура факторгруппы задается системой произведений для элементов, образующих ее:

$$\begin{aligned}
&BC \Rightarrow F, CD \Rightarrow F, DB \Rightarrow F,\\
&DC \Rightarrow E, CB \Rightarrow E, BD \Rightarrow E,\\
&AE \Rightarrow E \neq EA \Rightarrow E,\\
&AF \Rightarrow F \neq FA \Rightarrow F,\\
&BE \Rightarrow D, BF \Rightarrow C, EB \Rightarrow C, FB \Rightarrow D,\\
&CE \Rightarrow B, CF \Rightarrow D, EC \Rightarrow D, FC \Rightarrow B,\\
&DE \Rightarrow C, DF \Rightarrow B, ED \Rightarrow B, FD \Rightarrow C,\\
&EE \Rightarrow F, FF \Rightarrow E.
\end{aligned}$$

Представим группу наглядно, указав соответствие нормальной подгруппе A классов элементов, обозначенных B,C,D,E-F и расположенных на своих «полочках»:

$$A \Leftrightarrow \begin{array}{|l|}\hline B, \\ \hline C, \\ \hline D, \\ \hline E, \quad F. \\ \hline \end{array}$$

Мы получили три одинаковых по свойствам смежных классов типа B,C,D, а также один отличный от них смежный класс, состоящий из пары смежных подклассов типа E,F. Представим их стандартной формулой

$$1 \to A \to G \to G/A \to 1, G = CMN(4).$$

Изучим эту конструкцию с точки зрения теории когомологий. Нам нужно изучить возможности расширения групп, исходя из того факта, что одно из расширений известно

$$1 \to A \to G_1 \to G_1/A \to 1, G_1 = A + B.$$

Все другие подгруппы могут быть получены, если умножить элементы смежного класса B на матрицы, принадлежащие смежным классам C,D,E,F. Другими словами, роль функций, порождающих новые расширения по известному расширению, выполняют произведения матриц B на другие мономиальные матрицы ξ, которые могут быть получены конструированием мономиальных матриц, отличающихся от A и B. Тогда

$$\xi \Leftrightarrow CMN(4) \neq A + B.$$

Соответственно, получим

$$\xi B \Leftrightarrow C, D, E, F.$$

Группы когомологий в данном случае совпадут с указанными выше подгруппами вида

$$A + C, A + D, A + E + F.$$

Покажем, что MN(4) можно получить из группы A, умножив ее на знаковую группу. Действительно, так как

$$A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

из нее можно получить все остальные подгруппы MN (4). Например, получим

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \\ = \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \\ + \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ = \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ = \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получим другие матрицы, используя знаковую группу:

$$b^1 \Rightarrow \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, b^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix}, b^3 \Rightarrow \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix}, b^0 \Rightarrow \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix},$$

$$f^1 \Rightarrow \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix}, f^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix}, f^3 \Rightarrow \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, f^0 \Rightarrow \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix},..$$

При таком подходе расширение группы A реализуется посредством элементов знаковой группы.

2. 3. 2. Новые возможности продолжения физических моделей

Физические модели обычно строятся на системе кватернионов или на системе антикватернионов, используя систему четырехметрик. Они могут быть переписаны на основе использования группы A и системы знаковых групп, заменив систему четырехметрик системой тензоров третьего ранга.

В этом случае естественно реализовать расширение физических моделей, базирующееся на расширении канонической мономиальной группы. Действительно, перейдя от группы A к группам

$$A+B, A+C, A+D,$$
$$A+E+F,$$

мы получаем возможность расширения физических моделей с 4-мерного пространства-времени на 8-мерное пространство-время (для групп первого типа), а также на 12-мерное пространство-время (для группы второго типа).

Предлагаемый вариант основан на введении дополнительных «волновых функций», способных выполнять роль величин, которые либо не проявляются при стандартных физических измерениях, либо «малы» при условиях, привычных для наблюдения. Кроме этого, в 8-мерных моделях вводится второе время, дополнительное стандартному физическому времени, а в 12-мерных моделях таких времен будет три. Одно из предположений о полезности ожидаемых новых моделей сводится к тому, что таким способом можно будет учесть стороны и свойства живых объектов, по-разному воспринимающих физическую реальность и по-разному реагирующих на ее воздействия.

Следует отметить, что ожидаемые новые модели могут быть расширены на матриты. Так названы объемные матрицы с набором чисел, адекватно учитывающих различие в размерности Ритов, входящих в исследуемые конструкции. Они могут быть подчинены функциональным операциям, подбираемым на основе анализа свойств этих конструкций и их взаимодействий.

2.3.3.Электродинамика Максвелла в спинорной форме

Введем

$$\Psi = \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} H_x + iD_x \\ H_y + iD_y \\ H_z + iD_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi^* = \begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^* = \begin{pmatrix} H_x - iD_x \\ H_y - iD_y \\ H_z - iD_z \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_k = \left\{ \partial_x, \partial_y, \partial_z, (-i)\frac{1}{c}\partial_t \right\}, \quad \partial_k^* = \left\{ \partial_x, \partial_y, \partial_z, i\frac{1}{c}\partial_t \right\}, \quad U^k = \left\{ \frac{U_x}{c}, \frac{U_y}{c}, \frac{U_z}{c}, i \right\},$$

$$\overset{*}{U}{}^k = \left\{ \frac{U_x}{c}, \frac{U_y}{c}, \frac{U_z}{c}, -i \right\}, \quad g^{kn} = g_{kn} = diag(1, 1, 1, 1), \quad r^{kn} = r_{kn} = diag(1, 1, 1, -1).$$

Используем

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

,

$$b^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Мы можем выразить их через каноническую мономиальную группу, умножив ее элементы на знаковую группу. Действительно, получим

$$e^1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},e^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},e^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},e^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Введем

$$a^1=col(-,+,-,+)e^1,a^2=col(-,-,+,+)e^2,a^3=col(+,-,-,+),a^4=col(+,+,+,+)e^4,$$
$$b^1=col(+,+,-,-)e^1,b^2=col(-,+,+,-)e^2,b^3=col(+,-,+,-),b^4=col(+,+,+,+)e^4.$$

$$\Pi_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \Pi_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \Pi_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\Pi_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Тогда для F_{mn} и H_{mn} в форме

$$F_{mn}=\begin{pmatrix}0&B_z&-B_y&-iE_x\\-B_z&0&B_x&-iE_y\\B_y&-B_x&0&-iE_z\\iE_x&iE_y&iE_z&0\end{pmatrix},\quad H_{mn}=\begin{pmatrix}0&D_z&-D_y&iH_x\\-D_z&0&D_x&iH_y\\D_y&-D_x&0&iH_z\\-iH_x&-iH_y&-iH_z&0\end{pmatrix}$$

получим

$$F_{mn}=\frac{i}{2}\left(a^k\,\Pi_k\,\Psi^*-b^k\,\Pi_k\,\Psi\right),\qquad H_{mn}=\frac{-i}{2}\left(a^k\,\Pi_k\,\varphi-b^k\,\Pi_k\,\varphi^*\right).$$

Легко записать в спинорной форме уравнения Максвелла

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\qquad \nabla\times\vec{B}=0.$$

Действительно,

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}E_x-iB_x\\E_y-iB_y\\E_z-iB_z\\0\end{pmatrix}+\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\partial_z+\right.$$

$$+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\Bigg\}\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}=0\,.$$

Аналитически они выглядят так: $a^k\,\partial_k\,\Psi^*+b^k\,\partial_k^*\,\Psi=0$.

Введем $\Phi=column\left(2\rho U_x,\,2\rho U_y,\,2\rho U_z,\,-2i\rho\right)4\pi$.

Тогда уравнения $\nabla\times\vec{H}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}+4\pi\dfrac{\vec{j}}{c}$, $\quad\nabla\cdot\vec{D}=4\pi\rho$

Получат форму $a^k\,\partial_k^*\,\varphi^*+b^k\,\partial_k\,\varphi=\Phi$.

Отметим, что уравнения Максвелла «нечувствительны» к умножению слева на мономиальные матрицы. Так, если умножить уравнения Максвелла на матрицу

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

получим матричные уравнения

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}E_x-iB_x\\E_y-iB_y\\E_z-iB_z\\0\end{pmatrix}+\Bigg\{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\partial_z+$$

$$+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\Bigg\}\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}=0.$$

Они тождественны указанным выше векторным уравнениям. Аналогично можно показать, что уравнения не изменятся, если умножить их слева на матрицу

$$\begin{pmatrix}\alpha&0&0&\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\delta&0&0&\alpha\end{pmatrix}.$$

Отсюда, в частности, простейшим способом можно показать, что уравнения Максвелла инвариантны как относительно группы Лорентца, так и относительно группы Галилея. Запишем в спинорной форме материальные уравнения:

$$\vec{B} + w\left[\vec{E} \times (\vec{u}/c)\right] = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D} \times (\vec{u}/c)\right]\right),$$

$$\vec{D} + w\left[(\vec{u}/c) \times \vec{H}\right] = \varepsilon\left(\vec{E} + \left[(\vec{u}/c) \times \vec{B}\right]\right).$$

Получим

$$i\mu\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_x}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_y}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_z}{c} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(-i)\right\} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} H_x - iD_x \\ H_y - iD_y \\ H_z - iD_z \\ 0 \end{pmatrix} - i\mu\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_x}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_y}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_z}{c} +\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(i)\right\}\begin{pmatrix} H_x + iD_x \\ H_y + iD_y \\ H_z + iD_z \\ 0 \end{pmatrix} = w\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ w^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_x}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_y}{c} +\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w \\ 0 & 0 & w^{-1} & 0 \end{pmatrix}\frac{U_z}{c} + \frac{1}{w}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(i)\right\}\begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix} + w\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ w^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_x}{c} +\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_y}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & -w^{-1} & 0 \end{pmatrix}\frac{U_z}{c} + \frac{1}{w}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(-i)\right\}\begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Если ввести

$$G_{kn} = diag(1, 1, 1, w^{-1}), \quad R_{kn} = diag(1, 1, 1, -w^{-1}), \quad \tilde{a}^k = Q^{-1} a^k Q, \quad \Pi^k = g^{kn}\Pi_n,$$

$$Q^{-1} = diag(1, 1, 1, w), \quad \tilde{b}^k = Q^{-1} b^k Q, \quad a_k = a^k, \quad b_k = b^k, \quad U_k = g_{kn}U^k,$$

можно записать $i\mu\left(b^k U_k^* \varphi^* - a^k U_k \varphi\right) = wG_{kn}\left(\tilde{a}^k U^n \Psi^* + \tilde{b}^k \overset{*}{U}{}^n \Psi\right)$

и

$i\varepsilon\left(b^k U_k \Psi^* - a^k U_k^* \Psi\right) = wR_{kn}\left(\tilde{a}^k U^{*n}\varphi^* + \tilde{b}^k U^n \varphi\right).$

Если мы желаем записывать уравнения на основе канонической мономиальной группы, мы вправе использовать тензор четвертого ранга $g^i{}_{jk}$ вместо метрического тензора g_{jk}. Это изменение кажется простым с математической точки зрения. С физической точки зрения оно достаточно сложно, так как означает, что метрика «теряет» свое первичное значение.

Используя расширение канонической мономиальной группы, мы получили систему ее смежных классов, обозначенных буквами B, C, D, что порождает группы размерности 16, а также смежный класс EF, порождающий группу размерности 24. Легко видеть, что каждый элемент указанных смежных классов можно использовать для расширения кватернионов. Так, например, умножая a^i на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

получим предкватернион вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При перемножении этих матриц мы получим элементы кватерниона, поэтому указанные элементы названы предкватернионами. Покажем, что умножение кватерниона на элемент из двойного смежного класса, принадлежащий EF, позволяет получить препредкватернион. Он назван так потому, что элементы кватерниона получаются из них после тройного произведения

$$\alpha\beta\gamma \Rightarrow \textit{кватернион.}$$

Выберем матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицы a^i на нее слева. Получим предпредкватернионы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указанные умножения сводятся к тому, что у кватернионных матриц переставляются строки. Мы можем записать уравнения Максвелла на кватернионах, предкватернионах, предпредкватернионах. От этого их векторный вид не изменится. Значит, уравнения Максвелла обладают скрытой матричной симметрией. Ранее мы приняли идеологию, что каждому набору матриц соответствует своя система физических конструкций и их качеств. Следуя ей, мы обязаны считать, что единая форма уравнений скрывает разные ситуации и разные конструкции. Это предположение важно с практической точки зрения. Мы не можем установить структуру конструкций, относящихся к свету и систему их свойств, если не сможем новые величины, характеризующие свет. С теоретической точки зрения уравнения Максвелла следует дополнить новыми элементами. Однако нужен также и новый эксперимент, позволяющий установить структурные элементы частиц света.

Приложение 2.3.1. Начала новой концепции физического моделирования

Анализ структуры фундаментальных физических моделей привел нас к заключению, что они могут быть унифицированно записаны на основе канонической мономиальной группы, имеющей размерность 4×4.

С теоретической точки зрения так может быть потому, что физические модели задаются в четырехмерном пространстве-времени. Для него требуется использовать матрицы указанной размерности.

С физической точки зрения матрицы размерности 4×4 характеризуют отношения между четырьмя объектами. В рамках развиваемого подхода на их роль претендуют, согласно структурной модели частиц света, пара гравитационных предзарядов, обозначенных $\pm g$, а также пара электрических предзарядов, обозначенных $\pm q$. Канонические отношения между ними, выражаемые числами $[-1,0,1]$, формируют систему матриц, используемых в физических моделях. Тогда физика базируется на системе отношений между четверкой базовых физических предзарядов.

Эти слова остаются пока только формальным пояснением ситуации. Для того чтобы продвинуться к пониманию физики, нужны модели предзарядов. Будем рассматривать их в форме изделий, изготовленных из атонов: ориентированных струн, имеющих поперечную структуру. Пусть они имеют активный обмен с праматерией.

Гравитационные предзаряды представим в форме « лепестков роз », имеющих поперечные соединения. Если ориентация направлена к центру « лепестков », назовем это изделие отрицательным предзарядом. У положительного гравитационного предзаряда поперечные соединения ориентированы от центра « лепестков ».

Согласно основному допущению силовые линии способны соединяться, образуя форму тора. Рассмотрим пару разных **гравитационных предзарядов**, полагая, что они отталкиваются. Чтобы понять этот факт с точки зрения обмена с праматерией, нам нужно предположить, что между разными предзарядами праматерия усваивается лучше, чем вне предзарядов. Можно предположить, что рецепторы между ними раскрыты больше, чем снаружи. У одинаковых предзарядов силовые линии могут быть лучше раскрыты вне предзарядов, что приводит к эффекту их притяжения из-за лучшего поступления праматерии.

Для электрических предзарядов ситуация выглядит иначе. Представим их в виде системы «шипов» с ориентацией к центру шипов или от их центра. Примем модель взаимодействия, основанную на их обмене с праматерией. Если предзаряды одинаковы, то рецепторы между предзарядами могут быть открыты лучше и лучше втягивают в себя праматерию, чем рецепторы, которые находятся вдали от линии связи. Если же предзаряды различны, то лучше раскрываются и втягивают в себя праматерию внешние рецепторы, что приводит к эффекту притяжения предзарядов.

Различие механизмов «втягивания праматерии» объясняется различием конструкций, сопоставленных предзарядам. Отметим, что во всех указанных случаях есть предел удаления и приближения предзарядов, а также эффект изменения динамики взаимодействия.

Сложным является взаимодействие предзарядов разных типов.

Аксиоматизируя указанный механизм, мы утверждаем не только формальную, но и физическую причину реализации матриц размерности четыре в физических моделях:

матрицы задают математическую и физическую основу для описания базового взаимодействия между четырьмя предзарядами $(\pm g, \pm q)$, находящимися в праматерии.

Приложение 2.3.2. К энергетическим свойствам конструкций

В реальной практике физиков используются самые разнообразные конструкции. Значительный интерес представляют базовые физические конструкции, так как они образуют строительные блоки для производных конструкций. Для того чтобы практиковать с ними, желательно иметь алгоритм расчета свойств конструкций, в частности, энергии их составных частей.

Сделать это особенно трудно, если объекты принципиально новые и принадлежат новому уровню материи. Определенное место может занять расчет, основанный на общих свойствах физических систем, изготовленных из Ритов.

Чтобы «нащупать» контуры расчета, обратимся к модели, вытекающей из микродинамики. Для величин X в этом случае используется уравнение

$$\frac{d\left(X^i - X^i{}_0\right)}{dt} = \alpha\left[\left(X^i - X^i{}_0\right), H\right] = \alpha\left(\left(X^i - X^i{}_0\right)H - H\left(X^i - X^i{}_0\right)\right).$$

Примем зависимость

$$X^i - X^i{}_0 = A^i{}_0 \exp(i\omega t).$$

Получим

$$A^i{}_0 = \alpha\left[A^i{}_0, H^*\right].$$

Выполним композитную деформацию данной модели, умножая матрицы на разные скалярные функции s, r, σ. Получим алгоритм, используемый в модели квантовых групп. Рассмотрим вариант

$$sAB^i - rB^i A = \sigma B^i.$$

Здесь B^i – матрицы, ассоциированные с изделием. Например, это система, состоящая из четырех блоков:

$$A = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 \end{pmatrix}.$$

Принимая величины E^i в качестве энергий, рассчитаем свойства гравитационного и электрического предзарядов.

Пусть гравитационный предзаряд представлен четверкой 0-Ритов, соединенных между собой в «кольцо». Матрица, ассоциированная с ним, имеет вид:

$$X_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть электрический предзаряд представлен четверкой 0-Ритов, соединенных между собой в форме «ежа» с одним 0-Ритом в центре изделия. Матрица, ассоциированная с ним, имеет вид:

$$B^i{}_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^i{}_q = B^i{}_q - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим базовые уравнения для расчета энергетических свойств предзарядов:

$$\begin{pmatrix} 0 & sE_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sE_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sE_4 \\ sE_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & rE_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rE_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rE_3 \\ rE_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma E_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & sE_2 & sE_3 & sE_4 \\ sE_1 & 0 & 0 & 0 \\ sE_1 & 0 & 0 & 0 \\ sE_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & sE_1 & sE_1 & sE_1 \\ sE_2 & 0 & 0 & 0 \\ sE_3 & 0 & 0 & 0 \\ sE_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma E_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow q.$$

У гравитационного предзаряда энергии 0-Ритов в данном изделии различны:

$$E_1\left(1 - \frac{r^4}{s^4}\right) = \frac{\sigma}{s} E_0 \left(1 + \frac{r^3}{s^3}\right),$$

$$E_{i+1} = \frac{r}{s} E_i + \frac{\sigma}{s} E_0, i = 1,2,3.$$

.

Энергии 0-Ритов в этом изделии одинаковы у электрического предзаряда одинаковы:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4.$$

Понятно, что выполнение этих свойств накладывают отпечаток на соединение изделий, изготовленных из тонкой материи, между собой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что возможно объединение неизоморфных групп, при котором новое семейство, хотя оно принадлежит некоторой группе, само группой не является. Такой новый объект назван сигруппой. Указан вариант использования сигруппы для описания физического процесса в электродинамике движущихся сред. Найдено функциональное условие для представления сигруппы. Кроме матричного произведения дополнительно введено обобщенное поэлементное произведение, что позволяет рассматривать исследуемое множество как бигруппу.

ЛИТЕРАТУРА.

1.Барыкин В.Н. Лекции по электродинамике и теории относительности без ограничения скорости. М.: УРСС, 2005 (второе издание).
2.Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М.: Высшая школа, 1993.
3.Барыкин В.Н. Новая физика света. Мн.: Ковчег, 2003.
4.Барыкин В.Н. Электродинамика Максвелла без относительности Эйнштейна. М.: УРСС. 2005.

5.Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел. «Собрание научных трудов». М.:Наука, 1966,т.1.
6.Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Знание, 1991.
7.Барыкин В.Н. Пространственно-временные симметрии в электродинамике изотропных, инерциально движущихся сред. «Теоретико-групповые методы в физике». М.: Наука, 1986, т.1.