Академия наук БССР
Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова

Проблемы механики магнитных жидкостей

Сборник научных трудов

Минск 1981

В.Н. Барыкин

К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

При анализе распространения электромагнитного поля в сложных движущихся средах иногда применяют геометрические методы /I/. Неоднородная, неизотропная сплошная среда, какой является, например, ферромагнетик, моделируется неевклидовым многообразием с метрикой, зависящей от диэлектрической и магнитной проницаемости, а также от скорости движения среды. Такая вспомогательная метрика для покоящихся простых сред имеет вид /2/

$$g_{ik} = \sqrt{\mu}\ \mathrm{diag}(1,1,1,(\varepsilon\mu)^{-1}) \quad .$$

Тензоры H^{ik} и F_{mn} электромагнитного поля связаны соотношением

$$H^{ik} = g^{im} g^{kn} F_{mn} \quad . \qquad (I)$$

Для движущихся сред выбор метрики осуществляется на основе принципа относительности, согласно которому полная система уравнений должна быть инвариантна относительно группы Лорентца. Если группа симметрии системы уравнений шире группы Лорентца, для вывода уравнений нужны дополнительные предположения. Кроме этого необходим в ы б о р пространственно-временного многообразия.

В данной работе электромагнитное поле рассматривается в расслоении, а вспомогательная метрика выбрана на основе принципа относительности. Проведен вывод уравнений электродинамики в движущейся среде, неизотропность которой определяется метрикой. Получено их решение для плоской электромагнитной волны. Проанализирован физический смысл и некоторые особенности принятой модели.

I. Структура пространственно-временного многообразия

Рассмотрим в качестве пространственно-временного многообразия расслоение P с базой M и слоем Y. Пусть базой является ньютоновское пространство (прямая сумма трехмерного евклидова пространства и одномерного времени), а слоем - псевдоевклидово многообразие той же размерности, что и база (например, пространство Минковского). Полагаем, что метрика слоя и базы независимы друг от дру-

га. Расслоение Γ можно рассматривать как обобщение обычно применяемых в физике ньютоновской и эйнштейновской плоских моделей пространства. Действительно, если L есть ньютоновское пространство координат, то пространство их дифференциалов считают совпадающим с L. Аналогичная ситуация считается справедливой для пространства Минковского. Общая особенность таких конструкций состоит в том, что группа, действующая в основном пространстве и в пространстве дифференциалов, одна и та же. В предлагаемом варианте группа, действующая в базе, может быть отлична от группы, действующей в слое. Аналогичная ситуация имеет место в тетрадной формулировке общей теории относительности: группа непрерывных преобразований координат римановa пространства G_1 дополняется группой вращений локальных реперов G_2, выбор которых следует из дополнительных соображений /3/. Если G_2 действует локально, т.е. ее параметры зависят от координат и времени, то лагранжева формулировка теории поля позволяет найти уравнения, ковариантные относительно обеих групп преобразований, если в рассмотрение вводятся калибровочные поля /I/. Расслоение P с независимыми метриками слоя и базы рассмотрено в /4/, там же получены уравнения структуры такого пространства. С физической точки зрения выбор расслоения P привлекателен тем, что в рассмотрение вводятся два типа пространственно-временных величин: одни, относящиеся к базе, другие, относящиеся к слою. Соответственно имеют место два типа пространственно-временных преобразований. Сохранению евклидовской длины объектов и расстояний между ними в базе не противоречит относительность длин в слое. Абсолютность и относительность длительности является выражением сложной структуры временных связей исследуемого объекта. В рассматриваемом частном случае группа Галилея и Лорентца независимы и взаимно дополняют пространственно-временные характеристики явления.

2. Принцип относительности в расслоении P

Пусть задана система координат в базе (координаты x^h) и в слое (координаты y^h). Произвольная точка A расслоения Γ имеет координаты x^h, y^h. В окрестности точки A дифференциалы координат dy^h определяют естественный корепер в пространстве, касательном к слою Y с началом в точке A. Зададим в базе тензорное поле $a_{ij}(x^h)$ и рассмотрим квадратичную форму

$$dp^2 = a_{ij}(x^h_A)\,dy^i dy^j \quad . \tag{2}$$

Потребуем инвариантности (2) относительно преобразования дифференциалов координат, т.е. допустим, что существует центроаффинное преобразование

$$dy'^i = \hat{L}^i_j dy^j \quad , \tag{3}$$

оператор $\hat{L}^i_j$ которого обладает свойством

$$a_{km} = \hat{L}^i_k L^j_m a_{ij} \quad .$$

Интегрируя (3), получим взаимосвязь переменных для координат слоя

$$y'^i = \hat{L}^i_j y^j + b^i \quad . \tag{4}$$

Назовем <u>присоединенным</u> такое преобразование координат базы, которое получается по установленному правилу из преобразования координат слоя. Тривиальным правилом будем считать замену координат y_h координатами x^h. Тогда

$$x'^i = \hat{L}^i_j x^j + b^i \quad . \tag{5}$$

В общем случае присоединенные преобразования ведут к изменению метрики слоя, а выбор правила присоединения устанавливается дополнительно. Преобразования, сохраняющие метрику базы, в общем случае отличны от (5).

Введем <u>принцип относительности в расслоении</u>. Законы, которыми описывается состояние физических систем в окрестности произвольной точки A базы M расслоения P, инвариантны относительно пространственно-временных преобразований, присоединенных к указанной точке.

Теория относительности в плоском многообразии (специальная теория относительности - СТО) использует в качестве присоединенных преобразования Лорентца. В предлагаемом варианте группа преобразований зависит от точки многообразия M и тензорного поля в нем. Для того чтобы отличить предлагаемую модель от известной, назовем <u>бинарной теорией относительности</u> (БТО) пару, состоящую из расслоения P и принципа относительности в нем.

Для анализа инвариантных свойств уравнений электродинамики

в БТО рассмотрим окрестность произвольной точки A и получим присоединенные к точке преобразования для тензорного поля в M вида

$$a_{ij}(x_A^h) = (\vec{e}_i \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j = 1,2,3 \\ 0, & i \neq j \\ -\frac{1}{w}, & i = j = 0 \end{cases} \quad . \tag{6}$$

3. Вывод однопараметрических преобразований и их интерпретация

Взаимосвязь реперов, при которой форма (2), построенная по (6), остается инвариантной, имеет вид

$$\vec{e}_0{}' = \frac{\vec{e}_0 + \beta/w\vec{e}_1}{(1-\beta^2/w)^{1/2}}, \quad \vec{e}_2{}' = \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3{}' = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1{}' = \frac{\beta\vec{e}_0 + \vec{e}_1}{(1-\beta^2/w)^{1/2}} . \tag{7}$$

Для компонент ковариантного вектора $d\vec{y}$ с учетом (6) и (7) получим

$$dy^0{}' = \frac{dy^0 - \beta dy^1}{(1-\beta^2/w)^{1/2}}, \quad dy^2{}' = dy^2, \quad dy^3{}' = dy^3, \quad dy^1{}' = \frac{dy^1 - \beta/w\, dy^0}{(1-\beta^2/w)^{1/2}} . \tag{8}$$

Отождествим следующим образом координаты dy^i :

$$dy^0 = c\,dt, \qquad dy^1 = dx, \qquad dy^2 = dy, \qquad dy^3 = dz .$$

Нетрудно видеть, что (8) представляют собой взаимосвязь дифференциалов декартовых систем координат для случая, когда система координат K' движется вдоль оси OX системы координат K и в начальный момент оси направлены одинаково. Пусть скорость такого движения равна v. Для точки, покоящейся в K, имеем

$$dx - \beta/w\, c\,dt = 0 .$$

Отсюда следует, что

$$\beta = w\frac{v}{c} . \tag{9}$$

Зададим декартову систему координат в базе и примем тривиальное правило присоединения. Подставляя (9) в (8), получим следующие присоединенные преобразования /5/:

$$x'^{\alpha} = a^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} + b^{\alpha} \quad , \tag{10}$$

где

$$a^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\frac{v}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{c} w\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} ,$$

$$\gamma = \left(1 - w\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} .$$

Взаимосвязь скоростей запишется так:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x \frac{vw}{c^2}} , \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - u_x \frac{vw}{c^2}\right)} , \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - u_x \frac{vw}{c^2}\right)} . \tag{11}$$

Интерпретируем физически параметр w. Рассмотрим случай, когда точечное событие движется вдоль оси OX системы координат K и в интервале $[a,b]$ задано скалярное поле $\Phi(x)$, монотонно меняющееся от значения $\Phi_1 = \text{const}$ до $\Phi_2 = \text{const}$. Прохождение указанной области отождествим с взаимодействием события с системой отсчета, полагая, что оно ведет к изменению параметров события. Качественно такой подход изложен в /6,7/. Обозначим $\varphi(x) = \frac{d\Phi}{dx}$ и определим функционал w соотношением

$$w = \frac{\int_a^x \varphi(t)\,dt}{\int_b^a \varphi(t)\,dt} = \begin{cases} 0 , & x < a \\ 0 \div 1 , & a \leqslant x \leqslant b \\ 1 , & x > b \end{cases} . \tag{12}$$

Величина w определяет степень прохождения событием области многообразия, в которой осуществляется изменение параметров вследствие взаимодействия с системой отсчета. Можно говорить о переходе события в систему отсчета и выделить начальную ($w = 0$), промежуточные ($0 \div 1$) и конечную ($w = 1$) стадии такого перехода. На-

чальная стадия взаимодействия с системой отсчета, согласно (10), описывается преобразованиями Галилея, а конечная - преобразованиями Лорентца.

Изменение потенциала Φ можно непосредственно связать с изменением скорости распространения электромагнитного излучения. Для этого рассмотрим следующее уравнение Гамильтона - Якоби для фотона:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + cH = 0 \quad , \tag{13}$$

где $H = c\sqrt{\alpha^2\Phi + (\partial S/\partial x)^2}$, α - константа.

Найдем величину скорости

$$q = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial(\partial S/\partial x)} = c^2\frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{H} \quad .$$

$\Phi = 0$ соответствует случаю, когда $q = c$, увеличение Φ ведет к уменьшению скорости, а уменьшение - к росту. Имеет место полная аналогия с движением материальной точки в потенциальном поле. Поскольку уравнение (13) формально эквивалентно уравнению Гамильтона - Якоби для массовой частицы, потенциал Φ играет роль эффективной массы

$$m_{эф} = \frac{\alpha}{c}\sqrt{\Phi} \quad .$$

С этой точки зрения распространение электромагнитного поля в области изменения потенциала Φ эквивалентно изменению его инерционных свойств.

4. Уравнения электродинамики в БТО

Рассмотрим изотропную среду с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε , μ соответственно для случая выбора в базе M произвольного тензорного поля $a_{ij}(x)$. В частном случае тензорного поля (6) уравнения, инвариантные относительно преобразований (10) впервые получены в /5/. Для произвольного фиксированного w полная система полевых уравнений в среде состоит из уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\vec{u} \quad , \qquad \mathrm{div}\vec{D} = 4\pi\rho \quad ,$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 . \tag{I4}$$

и "материальных" уравнений

$$\vec{D} + w\left[\frac{\vec{u}}{c}, H\right] = \varepsilon\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c}, B\right]\right) ,$$

$$\vec{B} + w\left[\vec{E}, \frac{\vec{u}}{c}\right] = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D}, \frac{\vec{u}}{c}\right]\right) . \tag{I5}$$

В этом можно убедиться, записав (I4) и (I5) в декартовых координатах и проведя их преобразование по (I0). В общем случае такая прямая проверка неудобна. Изложим здесь иной метод получения системы уравнений, исходя из записи уравнений (I4), (I5) через антисимметричные тензоры H^{ik} и F_{mn} /8/. В декартовой системе координат имеем дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = I^i , \qquad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 , \tag{I6}$$

i , j = 0,I,2,3.

Рассмотрим запись материальных уравнений через тензоры H^{ik} и F_{mn}. Для этого введем наряду с тензором a_{ik} тензор O^{kn} по правилу

$$a_{ik}O^{kn} = \delta_i^n ,$$

а также четырехскорость

$$u^l = \frac{dx^l}{dp} .$$

Имеем /9/

$$H^{ik} = \frac{1}{\mu}\left\{O^{im}O^{kn}F_{mn} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{O} - 1\right)\left[O^{im}F_{lm}u^l u^k + O^{kn}F_{nl}u^l u^i\right]\right\} . \tag{I7}$$

Учитывая свойство антисимметрии тензоров, H^{ik} и F_{mn} (I7) записывается в виде (I), где роль метрики играет выражение

$$g^{ik} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[O^{ik} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{O} - 1\right)u^i u^k\right] .$$

Тем самым получено правило конструирования материальных уравнений для замыкания известных дифференциальных уравнений Максвелла. Пред-

положения о независимости метрики базы от метрики слоя находит свое выражение в том, что в произвольной системе координат уравнения (I6) заменяются общековариантными.

5. Распространение плоской электромагнитной волны в среде

Исходя из уравнений электродинамики (I4), (I5) в /5/ получены уравнения для векторного потенциала $\vec{A}$. Они имеют вид

$$\left\{\left[\Delta - \frac{w}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] - \frac{\varepsilon\mu - w}{c^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}w\right)}\left[(\vec{u},\nabla) + \frac{\partial}{\partial t}\right]^2\right\}\vec{A} = 0 \quad , \qquad (I8)$$

$$\mathrm{div}\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu - w}{c^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}w\right)}\left[(\vec{u},\nabla) + \frac{\partial}{\partial t}\right]^2(\vec{u}\vec{A}) = 0 \quad . \qquad (I9)$$

Пусть событие распространяется в базе в области, в которой меняется значение нормированного поля w (ему соответствует изменение потенциала Φ). В этом случае, согласно качественному анализу уравнения (I3), должно происходить изменение скорости света. Покажем, что этот вывод согласуется с решением уравнений (I8), (I9). Действительно, дисперсионное уравнение для плоской волны запишется так:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}w + \frac{\varepsilon\mu - w}{c^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}w\right)}(\vec{k}\vec{u} - \omega)^2 = 0 \quad . \qquad (20)$$

Из (20) при $\frac{u}{c} << 1$ следует выражение фазовой скорости

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + u\cos\theta\left(1 - \frac{w}{n^2}\right) \quad ,$$

где $n = \varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0$, θ – угол между $\vec{k}$ и $\vec{u}$. Множитель $\left(1 - \frac{w}{n^2}\right)$ является коэффициентом увлечения света, обобщающим френелевское значение. В вакууме имеем, поскольку $n = I$,

$$v_\Phi = c + u(1-w)\cdot\cos\theta \quad . \qquad (2I)$$

Следовательно, изменение w от I до 0 сопровождается изменением скорости света в вакууме относительно фиксированной координатной системы от значения $v_\Phi(1) = c$ до $v_\Phi(2) = c + u\cos\theta$.

6. Сравнение результатов измерений, полученных различными наблюдателями

Рассмотрим ситуацию, когда точечное событие проходит последовательно области U и V многообразия M, в каждой из которых происходит изменение w. В этом случае каждому значению w_1 в U соответствует корепер $\{dx^i\}$, а значению w_2 в V – корепер $\{dx'^i\}$. Как сравнить между собой результаты измерений? Перенесем кореперы в одну точку M, что можно сделать в плоском многообразии без изменения его компонент, и рассмотрим в качестве метрики сравнения матричное произведение метрик первой и второй областей, соответствующих определенным значениям w. Пусть в U метрика $a_{ij}^{(1)} = \mathrm{diag}(1,1,1,-\frac{i}{w_1})$, а в V метрика $a_{ij}^{(2)} = \mathrm{diag}(1,1,1,-\frac{i}{w_2})$. Тогда

$$a_{ij}^{(1,2)} = \mathrm{diag}(1,1,1,-\frac{1}{w_1 w_2}) \quad . \tag{22}$$

Преобразования декартовых координат, оставляющие метрику (22) инвариантной, устанавливают следующую связь кореперов $\{dx'^i\}$ и $\{dx^i\}$:

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} w_1 w_2\right)^{1/2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \frac{dt - dx\,\frac{v}{c^2} w_1 w_2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} w_1 w_2\right)^{1/2}} \tag{23}$$

Преобразования (23) позволяют сравнивать различные экспериментальные ситуации. Рассмотрим, например, следующий случай: $w_1 = 1$, а w_2 меняется от значения $w_2 = 0$ до $w_2 = 1$. Это соответствует физической ситуации, когда с измеренными значениями, полученными на конечной стадии перехода события в первую систему отсчета, сравниваются измеренные значения, полученные на различных стадиях перехода события во вторую систему отсчета. Тогда можно сделать следующие выводы:

а) В БТО меняется формулировка принципа постоянства скорости света в вакууме: "Измеренные значения скорости света в вакууме, полученные различными инерциальными наблюдателями и соответствующие ситуации, когда изменение параметров вследствие взаимодействия с системами отсчета завершено, т.е. $w_1 = w_2 = 1$, связаны преобразованиями Лорентца".

б) В БТО устраняется противоречие между принципом постоянства скорости света в вакууме и преобразованиями Галилея. В самом деле, преобразования Галилея соответствуют описанию взаимосвязи со-

бытий, когда реализуется начальная стадия взаимодействия по меньшей мере с одной системой отсчета, принцип же постоянства скорости света связывает конечные состояния.

Литература

1. Коноплева Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля. - М.: Атомиздат, 1980.
2. Тамм И.Е. Основы теории электричества. - М.: Гостехиздат, 1946.
3. Родичев В.И. Теория тяготения в ортогональном репере. - М.: Наука, 1974.
4. Барыкин В.Н. Изменение параметров электромагнитного поля в процессе измерения, обусловленное движением инерциальной системы отсчета. - Физика и техника аэротермооптических методов управления и диагностики лазерного излучения. - Минск: ИТМО АН БССР, 1981, 36 - 61.
5. Барыкин В.Н. О взаимодействии света с инерциально движущейся нерезкой границей. - Препринт № 2. - Минск, ИТМО АН БССР, 1981,26с.
6. Buonomano V. A new Interpretation of the Special Theory of Relativity. - Int. J. Theor. Phys., 1975, v.13, №.2, 213-226.
7. Schlegel R. An Interaction Interpretation of Special Relativity Theory. Part I. - Foundations of Physics, 1973, v.3, №.2, 169-184.
8. Тоннела М.А. Основы электромагнетизма и теории относительности. - М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
9. Барыкин В.Н. Об увлечении света инерциально движущейся системой отсчета. - Физика и техника аэротермооптических методов управления и диагностики лазерного излучения. - Минск, ИТМО АН БССР, 1981, 62 - 70.

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Сборник научных трудов

Редактор Т.Г. Михалева. Худ. редатор Э.Б. Гуцева.
Технический редактор З.В. Шейбак. Корректор С.И. Сауляк.

Подписано в печать 23.II.81 . АТ 16891.
Формат 60х84 1/16. Бум. тип. № 2. Печать офсетная.
Печ. л. 9,4. Уч.-изд. л. 8,3. Тираж 300. Заказ 332.
Цена 1 р. 30 к.

Редакционно-издательский отдел Института тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова АН БССР

Отпечатано на ротапринте Института тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова АН БССР, Минск, Подлесная, 15