УДК 531.15 : 530.12

БАРЫКИН В. Н.

НОВЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СИММЕТРИИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СРЕД

Найдены новые пространственно-временные симметрии в электродинамике инерциально движущихся, изотропных в системе покоя сред. Показано, что они могут быть единообразно описаны локальной группой Лоренца с матричнозначными параметрами. Определена алгебра дифференциальных операторов первого порядка для этой группы.

Известно [1, 2], что максимальной группой симметрии для уравнений электромагнитного поля в вакууме является шестнадцатипараметрическая группа $C(1, 3) \otimes H$, где $C(1, 3)$ — группа конформных преобразований, H — однопараметрическая группа преобразований Хевисайда—Лармора—Райнича. В последние годы описаны также скрытые (негеометрические) симметрии в электродинамике [3].

Значительно меньше исследована симметрия уравнений Максвелла для среды. В частности, это обусловлено большей сложностью рассматриваемой системы, а также тем обстоятельством, что конструирование материальных уравнений для среды представляет собой отдельную проблему. Следуя идеологии работы [4], роль материальных уравнений в структуре симметрийных свойств уравнений электродинамики еще необходимо выяснить.

Анализ, проведенный в данной работе, показывает, что симметрийные свойства электродинамики сред определяющим образом зависят от структуры материальных уравнений. Рассмотрим аргументы в пользу такого вывода.

Будем рассматривать изотропную инерциально движущуюся среду. Пусть ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, $\boldsymbol{u}$ — скорость движения среды. Получим материальные уравнения для этого случая, требуя, чтобы в покоящейся среде $\boldsymbol{u}=0$ они имели вид

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ — индукции электрического и магнитного полей.

В качестве отправной точки анализа используем известное в лоренц-инвариантной теории выражение для тензора Тамма—Мандельштама ε^{ikmn}, с помощью которого записываются материальные уравнения электродинамики

$$H^{ik} = \varepsilon^{ikmn} F_{mn}.$$

Тензор ε^{ikmn} в этом случае имеет вид

$$\varepsilon^{ikmn} = \Omega^{im} \Omega^{kn},$$

где

$$\Omega^{lm} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} [\eta^{lm} + (\varepsilon\mu - 1) u^l u^m]. \tag{2}$$

Входящие в (2) величины определены следующим образом:

$$d\eta^2 = \eta_{lm} dx^l dx^m, \quad u^l = \frac{dx^l}{d\eta}.$$

Тензор η^{lm} в галилеевских координатах

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^0 = ict$$

имеет вид $\eta^{im} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1)$, а η_{im} определен выражением

$$\eta_{im}\eta^{mj} = \delta_i^j.$$

Тензоры F_{mn}, H^{ik} зависят от полей и индукций:

$$F_{mn} = F_{mn}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}), \ \boldsymbol{H}^{ik} = \boldsymbol{H}^{ik}(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}).$$

Постулируем существование тензора $\theta^{im} \neq \eta^{im}$ и рассмотрим (из соображений простоты) случай алгебраической зависимости Ω^{im} от θ^{im} и четырехскоростей $u^i = dx^i/d\theta$

$$\Omega^{im} = \Omega^{im}(\theta^{im}, u^i, u^m, \varepsilon, \mu), \tag{3}$$

где

$$\theta_{i\kappa}\theta^{\kappa j} = \delta_i^j, \quad d\theta^2 = \theta_{i\kappa}dx^i dx^\kappa.$$

Согласно (3) имеем:

$$\Omega^{im} = \alpha(\theta^{im} + \beta u^i u^m), \tag{4}$$

где α, β — скалярные функции. Использование условий (1), (2) дает для θ^{im} систему нелинейных алгебраических уравнений. Согласно анализу, она имеет единственное решение в силу специфики полученных уравнений. Тензор θ^{im} определится равенствами

$$\theta^{11} = \theta^{22} = \theta^{33} = A(x, y, z, t), \ \theta^{ij} = 0, \ i \neq j, \ \theta^{00} = B(x, y, z, t). \tag{5}$$

Тогда $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{1}{A}$. Поскольку $u^0|_{u=0} = \sqrt{B}$, из условия $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ определим $\beta = \frac{\varepsilon\mu}{B}A - 1$. Обозначим

$$\frac{B(x, y, z, t)}{A(x, y, z, t)} = w.$$

Тензор Ω^{im} в явном виде запишется так:

$$\Omega^{im} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[g^{im} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{w} - 1\right)u^i u^m\right], \tag{6}$$

где $g^{im} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, w)$, а четырехскорости определены по dg, где $dg^2 = g_{im}dx^i dx^m$. Заметим, что тензор (6) не имеет особенности при $w = 0$, так как $u^i \sim \sqrt{w}$. Согласно (6), тензор Тамма—Мандельштама определяется по уравнениям в покоящейся среде с точностью до скалярной функции w. Полученное выражение при $w = 1$ совпадает с известным в лоренц-инвариантной теории. При других значениях w, как будет отмечено, полная система уравнений инвариантна относительно разных групп. Тензор $\varepsilon^{i\kappa mn}$ должен иметь симметрийные свойства, обусловленные антисимметричностью $H^{i\kappa}$ и F_{mn}:

$$\varepsilon^{i\kappa mn} = -\varepsilon^{i\kappa nm} = -\varepsilon^{\kappa imn}. \tag{7}$$

В работе [4] $\varepsilon^{i\kappa mn}$, с точностью до скалярной функции Y_0, записывается так:

$$\varepsilon^{i\kappa mn} = Y_0(g^{im}g^{\kappa n} - g^{in}g^{\kappa m}). \tag{8}$$

Простой проверкой легко убедиться, что свойствами (7) в рассматриваемом случае обладает выражение

$$\varepsilon^{i\kappa mn} = {}^1/_2(\Omega^{im}\Omega^{\kappa n} - \Omega^{in}\Omega^{\kappa m}). \tag{9}$$

Множитель $^1/_2$ появляется из-за условия (1). Использование (9) позволяет дополнить дифференциальные уравнения Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}, \ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \ \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho \tag{10}$$

материальными векторными уравнениями

$$D+w\left[\frac{u}{c},\ H\right]=\varepsilon\left(E+\left[\frac{u}{c}\ B\right]\right),\ B+w\left[E,\ \frac{u}{c}\right]=\mu\left(H+\left[D,\ \frac{u}{c}\right]\right). \tag{11}$$

В [5] показано, что система уравнений (10), (11) инвариантна для $w=\mathrm{const}$ относительно преобразований Игнатовского—Франка—Ротта

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w}},\ y'=y,\ z'=z,\ t'=\frac{t-x\frac{v}{c^2}w}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w}}. \tag{12}$$

В частности, при $w=0$ имеем систему, инвариантную относительно преобразований Галилея, при $w=1$ — относительно преобразований Лоренца. Недостатком преобразований (12) является то, что они не являются групповыми, хотя образуют группу для произвольного $w=\mathrm{const}$. Покажем, что объединение групп, соответствующих различным фиксированным значениям w_i, описывается приближенно локальной группой Лоренца с матричнозначными параметрами.

Заметим, что тензору g_{ab} соответствует метрика

$$g_{ab}=\mathrm{diag}\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{w}\right) \tag{13}$$

общего вида. Действительно, по теореме Лагранжа [6] любая квадратичная форма $Q=g_{ab}dx^a dx^b$ может быть невырожденными преобразованиями приведена к каноническому виду

$$Q=(dx^1)^2+(dx^2)^2+\ldots+\delta(dx^n)^2, \tag{14}$$

где $\delta=\det|Q|$. Для квадратичной формы гиперболического типа в четырехмерном пространстве из (14) получим метрику $g_{ab}=\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 1,\ \delta)$, что с точностью до обозначений соответствует (13).

Покажем, что существуют дифференциальные операторы первого порядка, зависящие от Q_{ab} и образующие алгебру. Определим

$$L_{ab}=g_{ac}x^c\frac{\partial}{\partial x^b}-g_{bc}x^c\frac{\partial}{\partial x^a}. \tag{15}$$

В декартовых координатах имеем:

$$L_{12}=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x},\ L_{10}=x\frac{\partial}{\partial x^0}-\frac{1}{w}x^0\frac{\partial}{\partial x}$$

и т. д. Коммутационные соотношения можно записать в виде

$$[L_{ab},\ L_{cd}]=-g_{ac}L_{bd}+g_{bc}L_{ad}-g_{bd}L_{ac}+g_{ad}L_{bc}.$$

Обозначим индексы:

$$[12]=1,\ [13]=2,\ [23]=3,\ [10]=4,\ [20]=5,\ [30]=6.$$

Структурные постоянные f^i_{jk} сведутся в таблицу:

$$\begin{array}{cccccc} (-1)^1_{23} & 1^2_{13} & (-1)^3_{12} & 1^4_{15} & (-1)^5_{14} & (-1)^6_{24} \\ \left(-\frac{1}{w}\right)^1_{45} & \left(-\frac{1}{w}\right)^2_{46} & \left(-\frac{1}{w}\right)^3_{56} & 1^4_{26} & 1^5_{36} & (-1)^6_{35} \end{array} \tag{16}$$

Найдем метрику Киллинга, используя (16): $g_{ls}=f^i_{lk}\cdot f^k_{si}$. Получим

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-4,\ g_{14}=g_{55}=g_{66}=-\frac{4}{w}.$$

Остальные компоненты обращаются в ноль. К аналогичным результатам мы придем, если рассмотрим

$$g_{ab,cd} = \text{const}\,(g_{ad}\cdot g_{bc} - g_{ac}\cdot g_{bd}).$$

Значение константы в последнем выражении следует находить отдельно. Непосредственная проверка доказывает выполнение тождеств Якоби

$$[L_i\,[L_jL_\kappa]] + [L_j\,[L_\kappa L_i]] + [L_\kappa\,[L_iL_j]] = 0,$$

откуда следует отношение для структурных констант

$$f^p_{is}\cdot f^s_{j\kappa} + f^p_{js}\cdot f^s_{\kappa i} + f^p_{\kappa s}\cdot f^s_{ij} = 0. \tag{17}$$

Следовательно, операторы (15) образуют алгебру для $w = \text{const}$. Базис алгебры задается следующими матрицами:

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad -M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{w} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{w} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$M_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{w} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В частном случае при $w = 1$ имеем из (18) базисные элементы алгебры для группы Лоренца. Обозначим $M_s|_{w=1} = I_s$. Заметим, что

$$M_s = D(w)\cdot I_s,$$

где

$$D(w) = \text{diag}\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{w}\right) = g_{ab}.$$

Определим инфинитезимальное преобразование

$$x'_\mu = (I + I_sD(w)\cdot\omega^s)^\nu_\mu x_\nu, \tag{19}$$

где ω^s — скалярные параметры группы Лоренца. Выражение (19) задает преобразование Лоренца с матричнозначными параметрами

$$\Omega^s(w) = D(w)\cdot\omega^s. \tag{20}$$

Покажем, что (19) локально, в окрестности единицы, с точностью до членов более высокого порядка по параметру $\Omega^s(w)$, не выводит за пределы группы. Действительно, пусть заданы

$$g_1 = I + I_s\cdot\Omega^s_1,\quad g_2 = I + I_s\cdot\Omega^s_2.$$

Закон композиции дает $\Omega_{12}^s = \Omega_1^s \cdot \Omega_2^s$. Тогда

$$g_3 = g_1 \cdot g_2 \simeq I + I_s \cdot \Omega_{12}^s.$$

Покажем, с другой стороны, что из (19) следуют преобразования (12). Действительно, для ω^{10} имеем:

$$x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ x_1' = x_1 + \frac{1}{\sqrt{\varpi}}\theta x_0,\ x_0' = -\sqrt{\varpi}\theta x_1 + x_0, \tag{21}$$

где θ — некоторый угол. Соотношения (21) определяют несимметричный инфинитезимальный поворот в плоскости (x_0, x_1). Ему соответствуют преобразования

$$x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ x_1' = x_1 \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{\varpi}} x_0 \sin\theta,$$

$$x_0' = -x_1 \sqrt{\varpi} \sin\theta + x_0 \cos\theta. \tag{22}$$

Отсюда, требуя, чтобы $x_1' = 0$ соответствовало началу системы координат, инерциально движущейся со скоростью v, получим из (22) преобразования (12).

Рассмотрим группу Лоренца с матричнозначными параметрами как калибровочную. Следуя [7], получим тензор напряженности калибровочного поля A_ν^a в виде

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{\partial A_\nu^a}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} f_{bc}^a (A_\mu^b A_\nu^c - A_\nu^b A_\mu^c).$$

Лагранжиан свободного калибровочного поля L_0 зависит от $F_{\mu\nu}^a$, A_ν^a и должен удовлетворять дополнительному условию

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L_0}{\partial F_{\mu\nu}^a} (f_{cb}^a \cdot F_{\mu\nu}^b + 2 f_{cb,\nu}^a \cdot A_\mu^b) = 0.$$

В заключение выражаю благодарность участникам теоретического семинара кафедры теоретической физики МГУ, принявшим участие в обсуждении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов Н. Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1967.
2. Фущич В. И., Никитин А. Г. В кн.: Теоретико-групповые методы математической физики. Институт математики АН УССР, 1978, 45.
3. Фущич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений Максвелла. — Киев: Наукова думка, 1983.
4. Post E. J. Ann. of Phys., 1972, **71**, 497.
5. Барыкин В. Н. К электродинамике движущихся сред. Минск, АН БССР, ИТМО. Препринт, № 1, 1982, 56 с.
6. Постников М. М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1979.
7. Utiyma R. Phys. Rev., 1956, **101**, 1597.

Институт тепло- и массообмена
АН БССР
им. А. В. Лыкова

Поступила в редакцию 24.09.84.