Барыкин В.Н.

Вывод уравнения Шрёдингера

Минск
«Ковчег»
2017

УДК 530.145.6
ББК 22.1
Б26

Барыкин, В.Н.
Б26 **Вывод уравнения Шрёдингера** / Виктор Барыкин.
– Минск : Ковчег, 2017, – 16 с.

ISBN 978-985-7185-80-1.

Уравнение Шрёдингера выведено на основе четырехмерной модели уравнений гидродинамики типа Навье-Стокса для гипотетической тонкой материи, трехмерные скорости которой равны нулю. Четырёхмерное пространство базируется на скалярно деформированной канонической метрике Минковского, эффективной в релятивистской электродинамике без ограничения скорости.

УДК 530.145.6
ББК 22.1

ISBN 978-985-7185-80-1

Содержание

Введение

Шрёдингер выдвинул идею рассматривать проблему квантования как задачу на собственные значения для комплекснозначной функции. Для её иллюстрации он предложил уравнение, решения которого позволили описать спектральные состояния атома водорода [1].

Общеизвестно [2], что уравнение Шрёдингера для описания микроявлений не выводится, а постулируется на основе системы предположений с условием, что можно обеспечить некий предельный переход к динамике Ньютона.

Примем во внимание, что это уравнение для скаляра, и оно не содержит скоростей. По этой причине естественно считать, что мы имеем дело с частным случаем некоторой динамической модели, полученной при условии, что равны нулю возможные в ней скорости. Это предположение реализовано в работе [3] на гипотетической модели гидродинамики для праматерии. Получен аналог уравнения Щрёдингера с нелинейными дополнительными слагаемыми.

Поскольку обычную трехмерную модель гидродинамики легко расширить на четырехмерие, приняв в качестве четвертой компоненты скаляр, появляются основания для простого вывода уравнения Шрёдингера из гидродинамических моделей.

Пара четырёхметрик в гидродинамике

На начальной стадии анализа запишем в четырехмерном виде уравнения движения идеальной жидкости. Применим для этого в координатах

$$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^0 = ic_g t$$

четырёхметрику Минковского $g_{ij} = diag(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$.

Получим выражения

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2 = -c_0^2 dt^2 \left(1 - \frac{1}{c_0^2} \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right),$$

$$ds = ic_0 dt \left(1 - \frac{u^2}{c_0^2}\right)^{1/2}, u^k = \frac{1}{ic_0} \frac{dx^k}{dt} \left(1 - \frac{u^2}{c_0^2}\right)^{-1/2}.$$

При условии $\frac{u^2}{c_0^2} \approx 0$ получим

$$u^k = \frac{-i}{c_0} v^k, k = 1, 2, 3, v^k = \frac{dx^k}{dt}, u^0 = 1.$$

Отсюда следуют, например, условия

$$u^1 \partial_1 u^1 + u^2 \partial_2 u^1 + u^3 \partial_3 u^1 + u^0 \partial_0 u^1 =$$

$$=\frac{-1}{c_0^2}\left(v^1\partial_1 v^1+v^2\partial_2 v^1+v^3\partial_3 v^1+\frac{\partial v^1}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c_0^2}\frac{dv^1}{dt},...$$

В силу связей указанного вида легко выполнить формальное обобщение уравнений динамики идеальной жидкости или газа, описывающих инерциальные слагаемые их динамики.

Систему уравнений, описывающую движения идеальной жидкости, запишем в четырехмерии на базе метрики Минковского в матричном виде:

$$\rho\begin{pmatrix} u^1\partial_1 u^1 & u^2\partial_2 u^1 & u^3\partial_3 u^1 & u^0\partial_0 u^1 \\ u^1\partial_1 u^2 & u^2\partial_2 u^2 & u^3\partial_3 u^2 & u^0\partial_0 u^2 \\ u^1\partial_1 u^3 & u^2\partial_2 u^3 & u^3\partial_3 u^3 & u^0\partial_0 u^3 \\ u^1\partial_1 u^0 & u^2\partial_2 u^0 & u^3\partial_3 u^0 & u^0\partial_0 u^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_0\end{pmatrix}.$$

Слагаемые, учитывающие вязкость, так же запишем в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 u^1 & \partial_2\partial_2 u^1 & \partial_3\partial_3 u^1 & \partial_0\partial_0 u^1 \\ \partial_1\partial_1 u^2 & \partial_2\partial_2 u^2 & \partial_3\partial_3 u^2 & \partial_0\partial_0 u^2 \\ \partial_1\partial_1 u^3 & \partial_2\partial_2 u^3 & \partial_3\partial_3 u^3 & \partial_0\partial_0 u^3 \\ \partial_1\partial_1 u^0 & \partial_2\partial_2 u^0 & \partial_3\partial_3 u^0 & \partial_0\partial_0 u^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Изучим компоненты четырехскоростей для более сложной четырехметрики, которая индуцирована анализом релятивистской электродинамики. В обобщенной модели, свободной от ограничений на скорость света, одна компонента четырехметрики есть скалярная функция [4].

Получим для такого случая цепочку формул:

$$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^0 = ic_g t,$$

$$g_{ij} = diag\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dfrac{1}{\psi^2 + \alpha^2} \end{pmatrix},$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{1}{\psi^2 + \alpha^2} c_g^2 dt^2 =$$

$$= -\frac{1}{\psi^2 + \alpha^2} c_g^2 dt^2 \left(1 - \frac{\psi^2 + \alpha^2}{c_g^2} \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right),$$

$$ds = \frac{ic_g dt}{\sqrt{\psi^2 + \alpha^2}} \left(1 - (\psi^2 + \alpha^2) \frac{u^2}{c_g^2} \right)^{1/2},$$

$$u^k = \frac{\sqrt{\psi^2 + \alpha^2}}{ic_g} \frac{dx^k}{dt} \left(1 - (\psi^2 + \alpha^2) \frac{u^2}{c_g^2} \right)^{-1/2}.$$

В рассматриваемом случае мы имеем модель четырехскоростей в простом псевдоевклидовом пространстве, метрика которого нестандартна.

Естественно предположение, что четвертая компонента четырехскорости может стать связующим звеном между макрофизикой и микрофизикой.

Специфика четырехскоростей в том, что при нулевых скоростях движения некоторой гипотетической среды она «аналогична» волновой функции:

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0 \Rightarrow u^o = \sqrt{\psi^2 + \alpha^2} \Rightarrow \psi_{\alpha \to 0}.$$

Проанализируем структуру предлагаемых уравнений на примере модели, аналогичной уравнениям Навье-Стокса в гидродинамике.

Систему уравнений, описывающую движения идеальной жидкости, запишем в четырехмерии в матричном виде, применив новый проектор:

$$A = \begin{pmatrix} u^1\partial_1 u^1 & u^2\partial_2 u^1 & u^3\partial_3 u^1 & u^0\partial_0 u^1 \\ u^1\partial_1 u^2 & u^2\partial_2 u^2 & u^3\partial_3 u^2 & u^0\partial_0 u^2 \\ u^1\partial_1 u^3 & u^2\partial_2 u^3 & u^3\partial_3 u^3 & u^0\partial_0 u^3 \\ u^1\partial_1 u^0 & u^2\partial_2 u^0 & u^3\partial_3 u^0 & u^0\partial_0 u^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \left(\psi^2 + \alpha^2\right)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Этот шаг в моделировании не тривиален. Мы скалярно деформировали четырёхметрику Минковского. Истоки этого шага и его эффективность обоснованы в $[5]$.

Слагаемые, учитывающие «вязкость», при этом четырехмерном обобщении имеют вид

$$B=\begin{pmatrix} \partial_1\partial_1u^1 & \partial_2\partial_2u^1 & \partial_3\partial_3u^1 & \partial_0\partial_0u^1 \\ \partial_1\partial_1u^2 & \partial_2\partial_2u^2 & \partial_3\partial_3u^2 & \partial_0\partial_0u^2 \\ \partial_1\partial_1u^3 & \partial_2\partial_2u^3 & \partial_3\partial_3u^3 & \partial_0\partial_0u^3 \\ \partial_1\partial_1u^0 & \partial_2\partial_2u^0 & \partial_3\partial_3u^0 & \partial_0\partial_0u^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \sigma \end{pmatrix}.$$

Обобщенные проекторы в общем случае могут быть разными. В частном случае они могут совпадать.

Вывод уравнения Шрёдингера

Проанализируем аналог уравнения Навье-Стокса с определенным специальным набором коэффициентов и сил. Конкретной модели соответствует выбор системы коэффициентов перед указанными матрицами.

Рассмотрим модель вида

$$\rho A=\frac{1}{2}\frac{\hbar}{l^3c_g}B-m_0V\frac{1}{\hbar l^3c_g}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^0 \end{pmatrix}.$$

Она согласована по размерности слагаемых уравнения. Понятно, что предлагаемый вариант есть частный случай, нацеленный на микромир.

Умножим уравнение на величину $\hbar l^3 c_g$.

Здесь $\hbar$--постоянная Планка, l -- характерный размер, c_g--характерная скорость. Исходное уравнение преобразуется к виду

$$\rho\hbar l^3 c_g A = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{l^3}\hbar l^3 B - m_0 V \frac{1}{\hbar l^3}\hbar l^3 \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^0 \end{pmatrix} \to \hbar c_g A = \frac{\hbar^2}{2m} B - \frac{m_0}{m} V \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^0 \end{pmatrix}.$$

При равных нулю компонентах трехмерной скорости из него следует связь

$$i\hbar \frac{\partial\left(\psi^2+\alpha^2\right)^{1/2}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\left(\psi^2+\alpha^2\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{m_0}{m}V\left(\psi^2+\alpha^2\right)^{1/2} + \frac{2\sigma}{c_g^2}\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\psi^2+\alpha^2\right)^{1/2}.$$

Условие $\alpha \to 0$ генерирует уравнение Шрёдингера с дополнительным слагаемым временного типа:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi + \frac{2\sigma}{c_g^2}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi.$$

При условии $\psi \to 0$ получим аналогичный результат:

$$i\hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \alpha + V\alpha + \frac{2\sigma}{c_g^2}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\alpha.$$

Поскольку предельные переходы в рассматриваемом случае можно выполнять при разных значениях характерных параметров, общее уравнение содержит две согласованные модели, каждая из которых «способна» внести свой вклад в полную волновую функцию вида

$$\Omega = \sqrt{\psi^2 + \alpha^2}.$$

Два «мира» могут динамично и скрытно объединяться для достижения некоторого единого результата.

Выполним размерностный анализ слагаемых полученных уравнений. Легко видеть их согласованность в размерности энергии, так как

$$[\hbar] = \frac{кг \cdot м^2}{сек}, \left[\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right] = \left[\frac{\hbar^2}{m}\nabla^2\right] = \left[\frac{\sigma}{c_g^2}\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] = \frac{кг \cdot м^2}{сек^2}.$$

Величина σ безразмерна. Различие проекторов в развиваемом подходе дает дополнительную, творческую степень свободы для моделирования экспериментальных ситуаций.

В частности, естественна модель, когда пара проекторов одинакова, например, имеем

$$\sigma = \sqrt{\psi^2 + \alpha^2}.$$

В общем случае нет оснований ограничивать анализ моделью гидродинамики Навье-Стокса. Теперь каждая физическая модель, доказавшая эффективность в макромире, получает шанс для проявления своих свойств в микромире. Обобщение уравнений в трехмерном пространстве основано на моделях четырехмерного псевдоевклидова многообразия, конструктивные свойства которых следует дополнить механизмами деформации метрики

Во всех случаях для скалярной функции, которая простейшим способом учитывает деформацию псевдоевклидова пространства скоростей, эффективно уравнение вида

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi.$$

Ниоткуда не следует, что это уравнение пригодно только для микроявлений, если не принято числовое выражение для величин, входящих в уравнение, в частности, для значения $\hbar$. Микромир «подсказывает», что аналоги его свойств есть также и в макромире.

Уравнения микродинамики со скоростями, из которых в частном случае выводится уравнение Шрёдингера, имеют вид:

$$\hbar c_g \begin{pmatrix} u^1\partial_1 u^1 & u^2\partial_2 u^1 & u^3\partial_3 u^1 & u^0\partial_0 u^1 \\ u^1\partial_1 u^2 & u^2\partial_2 u^2 & u^3\partial_3 u^2 & u^0\partial_0 u^2 \\ u^1\partial_1 u^3 & u^2\partial_2 u^3 & u^3\partial_3 u^3 & u^0\partial_0 u^3 \\ u^1\partial_1 u^0 & u^2\partial_2 u^0 & u^3\partial_3 u^0 & u^0\partial_0 u^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \varphi \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 u^1 & \partial_2\partial_2 u^1 & \partial_3\partial_3 u^1 & \partial_0\partial_0 u^1 \\ \partial_1\partial_1 u^2 & \partial_2\partial_2 u^2 & \partial_3\partial_3 u^2 & \partial_0\partial_0 u^2 \\ \partial_1\partial_1 u^3 & \partial_2\partial_2 u^3 & \partial_3\partial_3 u^3 & \partial_0\partial_0 u^3 \\ \partial_1\partial_1 u^0 & \partial_2\partial_2 u^0 & \partial_3\partial_3 u^0 & \partial_0\partial_0 u^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \sigma \end{pmatrix} - \frac{m_0}{m} V \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi = \left(\psi^2 + \alpha^2\right)^{-1/2},$$

$$u^k = \frac{\sqrt{\psi^2 + \alpha^2}}{i c_g} \frac{dx^k}{dt} \left(1 - (\psi^2 + \alpha^2)\frac{u^2}{c_g^2}\right)^{-1/2}.$$

Перспективы динамики

К полученному результату можно подойти с другой точки зрения: рассматривать дифференциальное уравнение микродинамики как алгебраический объект, который естественно назвать структурой Шрёдингера.

Тогда уравнение Шрёдингера можно рассматривать как частный случай уравнений гидродинамики в форме уравнений Навье-Стокса для случая нулевых трехмерных скоростей, но ненулевой четвертой компоненты скорости и частного случая выбора «плотности» среды и «вязкости».

По этой причине можно вывести новые системы уравнений микродинамики, применяя в качестве базовых, опорных моделей эффективные на практике системы уравнений макродинамики. Речь может идти об учете «вязкости» и «сжимаемости» микроматерии, а также о её турбулентности, возможны разные аналоги известных кинетических теорий.

Естественно расширить микродинамику до уровня, на котором учитываются не только скорости анализируемой микросреды, но и более высокие ранговые движения, например, скорость изменения ускорений.

Заметим, что единое описание электродинамики и массодинамики ранее выполнено на системе дифференциальных уравнений третьего порядка [3].

По этой причине желательно рассматривать микродинамику, учитывая не только производные первого и второго порядка, но и уравнения третьего порядка и более высоких порядков.

Структура уравнений гидродинамики в матричной форме позволяет ввести априорное их обобщение на основе математических структур вида

$$B^* = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1\partial_1 u^1 & \partial_2\partial_2\partial_2 u^1 & \partial_3\partial_3\partial_3 u^1 & \partial_0\partial_0\partial_0 u^1 \\ \partial_1\partial_1\partial_1 u^2 & \partial_2\partial_2\partial_2 u^2 & \partial_3\partial_3\partial_3 u^2 & \partial_0\partial_0\partial_0 u^2 \\ \partial_1\partial_1\partial_1 u^3 & \partial_2\partial_2\partial_2 u^3 & \partial_3\partial_3\partial_3 u^3 & \partial_0\partial_0\partial_0 u^3 \\ \partial_1\partial_1\partial_1 u^0 & \partial_2\partial_2\partial_2 u^0 & \partial_3\partial_3\partial_3 u^0 & \partial_0\partial_0\partial_0 u^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \xi \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 u^1 u^1 & \partial_2\partial_2 u^1 u^1 & \partial_3\partial_3 u^1 u^1 & \partial_0\partial_0 u^1 u^1 \\ \partial_1\partial_1 u^2 u^2 & \partial_2\partial_2 u^2 u^2 & \partial_3\partial_3 u^2 u^2 & \partial_0\partial_0 u^2 u^2 \\ \partial_1\partial_1 u^3 u^3 & \partial_2\partial_2 u^3 u^3 & \partial_3\partial_3 u^3 u^3 & \partial_0\partial_0 u^3 u^3 \\ \partial_1\partial_1 u^0 u^0 & \partial_2\partial_2 u^0 u^0 & \partial_3\partial_3 u^0 u^0 & \partial_0\partial_0 u^0 u^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Эти обобщения со своими коэффициентами и системой четырехметрик относятся к простейшему виду. В частности, деформационные степени свободы явлений представлены здесь только на основе динамических проекторов. В общем случае следует проанализировать и применить на практике всё многообразие возможных соединений не только указанных факторов, но и качественно новых аспектов и граней физической и интеллектуальной реальности.

Желательно нацелить поиск на достижение принципиально новых возможностей практики, скрытых от применения системой ограничений.

Заключение

Вывод уравнения Шрёдингера из уравнений гидродинамики в четырехмерной форме генерирует систему гипотез. Сейчас понятно, что возможна система скалярных динамик. Она многогранна, и могут быть получены самые различные ее обобщения. В частности, на скалярную динамику можно перенести аналоги «сжимаемости», «турбулентности», передачи «тепла». Кроме этого, для решения задач такого класса требуются уравнения состояний анализируемых «веществ», форма и сущность которых могут выходить далеко за пределы достигнутой практики.

Литература

1.Шрёдингер Э. Избранные труды по квантовой механике. – Москва : Наука, 1976. – 352 с.
2. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. – М : «Высшая школа», 1963.—620 с.
3.Барыкин В.Н. Уроки света. – Минск: Ковчег,2013.—172 с.
4. Барыкин В.Н. Электродинамика Максвелла без относительности Эйнштейна. –Москва: Эдиториал УРСС, 2003. – 164 с.
5.Барыкин В.Н. Атом света. – Минск : изд. Скакун В.М.,2001. – 277 с.

Научное издание

БАРЫКИН Виктор Николаевич

Вывод уравнения Шрёдингера

Подписано в печать 27.12. 2017 г.
Формат 60 x 84 $^{1/16}$.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1.16. Уч.-изд. л. 0.25.
Тираж 99 экз. Заказ 328.

ООО «Ковчег»
Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий
№1/381 от 01 07 2014 г.
Пр. Независимости, 68-19, 220072 г. Минск.
Тел./факс: (017) 284 04 33
e-mail: kovcheg_info@tut.by

ISBN 978-985-7185-80-1