Барыкин В.Н.

Обобщение теоремы Фробениуса

Минск
«Ковчег»
2017

УДК 51
ББК 22.1
Б26

Барыкин, В.Н.
Б26 **Обобщение теоремы Фробениуса** / Виктор Барыкин. – Минск : Ковчег, 2017. – 20 с.

ISBN 978-985-7185-45-0.

Предложен алгоритм действия с реперами, следуя которому возможно расширение комплексного поля над действительными числами до алгебры с делением в пространстве произвольной размерности.

Работа предназначена для математиков, специализирующихся на теории алгебр и их приложениях. Она доступна широкому кругу читателей, имеющих интерес с указанной проблеме.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-985-7185-45-0

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Из решения квадратного уравнения $x^2+1=0$ следует пара корней в форме комплексных единиц

$$x_{1,2}=\pm i, i^2=-1.$$

Удобный алгоритм анализа чисел, ассоциированных с обычной числовой единицей и комплексной единицей предложил Гаусс. Обе единицы генерируют гиперплоскость, которую можно условно представлять в форме стандартной плоскости, генерируя визуальную картину расположения комплексных чисел и действий с ними.

Формально была принята модель коммутативной операции произведения для действительного и мнимого реперов следующего вида:

$$1\cdot 1=1, 1\cdot i=i, i\cdot 1=i, i\cdot i=-1.$$

Соответственно определены комплексные числа

$$z=a+ib.$$

Операция суммирования для них аналогична операции суммирования для чисел. Общеизвестно, что комплексные числа образуют математический объект, названный полем.

Напомним, что поле – это алгебра в форме системы элементов, подчиненной некоторым операциям сложения, вычитания, умножения и деления (не на нуль). Структура и сущность применяемых операций определяют форму и сущность анализируемых многообразий или множеств. Дополнительные условия в форме ограничений типа ассоциативности и коммутативности детализируют структуру алгебры [1,2].

Комплексные числа широко применяются не только в математике, но и в самых разных расчетных моделях в физике, химии, биологии, психологии.

Естественна задача расширения модели комплексных чисел на пространства более высоких размерностей. Длительное время решить эту задачу пытался Гамильтон. Его подход и метод не дал удовлетворительных результатов для пространства размерности 3.

Однако ему удалось изобрести модель комплексных чисел для размерности 4. Реперы i, j, k данного четырехмерия подчинены некоммутативным условиям:

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i, ki = -ik = j,$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Так была получена алгебра кватернионов, которую Максвелл успешно применил для математической записи вакуумных уравнений электродинамики.

Позже кватернионы получили представление через вещественные числа. Например, есть единицы кватерниона вида

$$i \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На их основе удобно записывать не только дифференциальные уравнения Максвелла, но и кодифференциальные уравнения для движущихся сред. На паре кватернионов сконструирована группа матриц, достаточная для записи любой физической теории в 4-мерном пространстве [3].

Естественные попытки расширить теорию кватернионов реализованы в форме октонионов согласно алгоритму Кэли-Диксона. Однако отсутствуют модели расширения комплексного поля на пространства с нечетными размерностями. Более того, в 1877 году Фробениус доказал, что невозможно расширить комплексное поле до поля с двумя комплексными единицами.

Новые модели произведения и суммирования

Рассмотрим новую модель произведения и суммирования «векторных» элементов множества, принимая которую мы получаем возможность расширения комплексного поля до поля с произвольным количеством комплексных единиц.

На начальной стадии анализа в качестве базисных векторных элементов над полем комплексных чисел в пространстве двух измерений введем пару реперов:

$$1 \rightarrow (1 \quad 0), \tau_1 \rightarrow (0 \quad i), i^2 = -1.$$

Пусть элементы алгебры задаются величинами над полем действительных чисел:

$$(a1 \quad 0), (0 \quad bi), i^2 = -1.$$

Определим комбинаторную операцию произведения $\overset{k}{\times}$ для указанных реперов на основе произведения их числовых множителей, обеспечив их расположение согласно месту, задаваемому формулой $n = k + 1,$ где k есть число «шагов», которые нужно сделать, чтобы перейти вправо с места второго элемента на место первого элемента [4].

Следуя указанному алгоритму, получим таблицу произведений для этих базовых реперов, формально аналогичную таблице со стандартной операцией произведения обычной и комплексной единиц:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \overset{k}{\times} & 1 & \tau_1 \\ \hline 1 & 1 & \tau_1 \\ \hline \tau_1 & \tau_1 & -1 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline \times & 1 & i \\ \hline 1 & 1 & i \\ \hline i & i & -1 \\ \hline \end{array}.$$

Вторая таблица произведений соответствует числовой модели, предложенной Гауссом. Мы имеем дело с полем на общепринятой операции произведения обобщенных чисел, если дополнительно применять стандартную операцию суммирования.

Для расширения комплексного поля на более высокие размерности требуется новая операция $\overset{st}{+}$, которую назовем операцией структурного суммирования.

Применим аналогию с моделью комбинаторного произведения. На первом этапе умножаются значимые элементы реперов. На второй стадии полученный результат располагается на месте, задаваемом суммой мест рассматриваемых элементов по модулю числа, равного размерности пространства. На третьей стадии к данному реперу мультипликативно присоединяется сумма нереперных элементов алгебр [5,6].

В пространстве двух измерений получим для канонических реперов $\sigma_0 = (1 \quad 0), \sigma_1 = (0 \quad 1)$ таблицу суммирований:

$\overset{st}{+}$	$1 \quad 0$	$0 \quad 1$
$1 \quad 0$	$0 \quad 1$	$1 \quad 0$
$0 \quad 1$	$1 \quad 0$	$0 \quad 1$

$\rightarrow$

$\overset{st}{+}$	σ_0	σ_1
σ_0	σ_1	σ_0
σ_1	σ_0	σ_1

.

Так задается модель евклидовой плоскости со свойствами векторов, генерируемыми указанными операциями комбинаторного произведения и структурного суммирования.

Получаемые результаты существенно отличаются от стандартной модели.

Для реперов вида $1 \rightarrow (1 \quad 0), \tau_1 \rightarrow (0 \quad i)$ получим другую таблицу произведения реперов и формулы для произведения элементов анализируемой алгебры:

$$(a \quad 0) \overset{st}{+} (b \quad 0) = (0 \quad -ii(a+b)),$$

$$(a \quad 0) \overset{st}{+} (0 \quad ib) = (i(a+b) \quad 0),$$

$$(0 \quad a) \overset{st}{+} (0 \quad ib) = (0 \quad ii(a+b)), \ldots$$

$\Rightarrow$

$\overset{st}{+}$	1	τ_1
1	$-i\tau_1$	$i1$
τ_1	$i1$	$i\tau_1$

.

Аналогично определяется вычитание:

$$(a \quad 0)\overset{st}{-}(b \quad 0)=(0 \quad -ii(a-b)),$$
$$(a \quad 0)\overset{st}{-}(0 \quad ib)=(i(a-b) \quad 0),$$
$$(0 \quad a)\overset{st}{-}(0 \quad ib)=(0 \quad ii(a-b)),..$$

В этой модели мы имеем в пространстве 2 измерений поле с новыми свойствами, оно не тождественно стандартному комплексному полю.

Поле с двумя комплексными единицами

Применим указанный алгоритм к пространству 3 измерений с двумя мнимыми единицами, генерируя контрпример к теореме Фробениуса.

Введем базисные элементы

$$1 \to (1 \quad 0 \quad 0), \tau_1 \to (0 \quad i \quad 0), \tau_2 \to (0 \quad 0 \quad i).$$

Имеем комбинаторные произведения:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{array} \to 1\overset{k}{\times}1=1, 1\overset{k}{\times}\tau_1=\tau_2, 1\overset{k}{\times}\tau_2=\tau_1,$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & i & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{array} \to \tau_1 \overset{k}{\times} 1 = \tau_1, \tau_1 \overset{k}{\times} \tau_1 = -1, \tau_1 \overset{k}{\times} \tau_2 = i\tau_2,$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & i \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{array} \to \tau_2 \overset{k}{\times} 1 = \tau_2, \tau_2 \overset{k}{\times} \tau_1 = i\tau_1, \tau_2 \overset{k}{\times} \tau_2 = -1$$

Им соответствует таблица:

$\overset{k}{\times}$	1	τ_1	τ_2
1	1	τ_2	τ_1
τ_1	τ_1	-1	$i\tau_2$
τ_2	τ_2	$i\tau_1$	-1

.

Из неё следует новое качество анализируемой системы элементов: частичная ассоциативность базисных элементов. Например, получим

$$\tau_1(\tau_1\tau_2) = \tau_1 i\tau_2 = -\tau_2, (\tau_1\tau_1)\tau_2 = -1\tau_2 = -\tau_2,$$

$$\tau_1(\tau_2\tau_1) = i\tau_1\tau_1 = -i1, (\tau_1\tau_2)\tau_1 = i\tau_2\tau_1 = -\tau_1, \ldots$$

Заметим, что для реперов справедливы выражения

$$(\tau_1(\tau_2\tau_2))\tau_1 = \tau_1^{-1}\tau_1 = 1, (\tau_2(\tau_1\tau_1))\tau_2 = \tau_2^{-1}\tau_2 = 1, \ldots$$

Они свидетельствуют о наличии обратных элементов у анализируемой алгебры.

Структурное суммирование для реперов определено в несколько шагов: сначала выполняется произведение значимых элементов реперов, а затем это значение располагается на месте, равном сумме мест анализируемой пары реперов, взятой по модулю числа, равного размерности этих реперов. Если репер имеет весовые множители, произведение учитывает их. Аналогично выполняется вычитание. Легко видеть, что во всех случаях генерируются элементы алгебры.

Выполним суммирование реперов:

$$(1 \quad 0 \quad 0)\overset{st}{+}(1 \quad 0 \quad 0) = (0 \quad 1 \quad 0) = -i(0 \quad i \quad 0) = -i\tau_1,$$

$$(1 \quad 0 \quad 0)\overset{st}{+}(0 \quad i \quad 0) = (0 \quad 0 \quad i) = \tau_2,$$

$$(1 \quad 0 \quad 0)\overset{st}{+}(0 \quad 0 \quad i) = (i \quad 0 \quad 0) = i(1 \quad 0 \quad 0) = i1,$$

$$(0 \quad i \quad 0)\overset{st}{+}(1 \quad 0 \quad 0) = (0 \quad 0 \quad i) = \tau_2,$$

$$(0 \quad i \quad 0)\overset{st}{+}(0 \quad i \quad 0) = (-1 \quad 0 \quad 0) = -1,$$

$$(0 \quad i \quad 0)\overset{st}{+}(0 \quad 0 \quad i) = (0 \quad -1 \quad 0) = i(0 \quad i \quad 0) = i\tau_2,$$

$$(0 \quad 0 \quad i)\overset{st}{+}(1 \quad 0 \quad 0) = (i \quad 0 \quad 0) = i1,$$

$$(0 \quad 0 \quad i)\overset{st}{+}(0 \quad i \quad 0) = (0 \quad -1 \quad 0) = i\tau_1,$$

$$(0 \quad 0 \quad i)\overset{st}{+}(0 \quad 0 \quad i) = (0 \quad 0 \quad -1) = i(0 \quad 0 \quad i) = i\tau_2.$$

Ему соответствует таблица:

$\overset{st}{+}$	1	τ_1	τ_2
1	$-i\tau_1$	τ_2	$i1$
τ_1	τ_2	-1	$i\tau_1$
τ_2	$i1$	$i\tau_1$	$i\tau_2$

.

Получим, например, сумму и разность вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{st}{+} \begin{pmatrix} 0 & ia_1 & 0 \end{pmatrix} \overset{st}{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ia_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ii(a_0 + a_1 + a_2) \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{st}{-} \begin{pmatrix} 0 & ia_1 & 0 \end{pmatrix} \overset{st}{-} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ia_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ii(a_0 - a_1 - a_2) \end{pmatrix},\ldots$$

Ноль алгебры соответствует модели с нулевым значимым элементом.

Психологически сложно принять указанный алгоритм суммирования. Однако для всего нового сомнения и неуверенности естественны. В свое время сложно было принять некоммутативность произведения. А о частичной ассоциативности почти нет информации.

Легко видеть, что предложенный алгоритм генерирует качественно новые результаты.

Вывод: возможно расширение стандартного комплексного поля до поля с размерностью в 2 комплексные единицы.

Пространство с размерностью 4

Аналогично выполним расчеты в случае, когда есть пространство большого числа измерений. В пространстве 4 измерений имеем, в частности, базовые элементы

$$1 \to (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$

$$\tau_1 \to (0 \quad i \quad 0 \quad 0), \tau_2 \to (0 \quad 0 \quad i \quad 0),$$

$$\tau_3 \to (0 \quad 0 \quad 0 \quad i)$$

и таблицу произведений

$\overset{k}{\times}$	1	τ_1	τ_2	τ_3
1	1	τ_3	τ_2	τ_1
τ_1	τ_1	-1	$i\tau_3$	$i\tau_2$
τ_2	τ_2	$i\tau_1$	-1	$i\tau_3$
τ_3	τ_3	$i\tau_2$	$i\tau_1$	-1

.

Она неассоциативна. Например, получим

$$\tau_1(\tau_1\tau_3) = \tau_1 i\tau_2 = -\tau_3,$$
$$(\tau_1\tau_1)\tau_3 = (-1)\tau_3 = -\tau_1, \ldots$$

С суммированием и нахождением обратного элемента ситуация аналогична моделям с меньшей размерностью.

В данном случае есть обобщение модели кватернионов.

Заметим, что расположение элементов в таблице комбинаторных произведений (с точностью до числовых множителей) соответствует модели, согласно которой места значимых элементов последовательно сдвигаются вправо относительно начальной единичной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы задают группу на матричном произведении. Похожая ситуация получается при сдвиге элементов влево.

Аналогичные базисные элементы можно сформировать на любой конечной размерности, что позволяет простыми средствами составить таблицу комбинаторных произведений базисных реперов алгебр более высокой размерности.

Таблица суммирования канонических реперов (когда значимые элементы равны единице) получается из аналогичного последовательного сдвига вправо значимых элементов от элементов, расположенных на второй диагонали.

Она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В модели канонических, евклидовых реперов получим таблицу структурных сумм:

$\overset{st}{+}$	1000	0100	0010	0001
1000	0100	0010	0001	1000
0100	0010	0001	1000	0100
0010	0001	1000	0100	0010
0001	1000	0100	0010	0001

.

В модели кватернионного типа получим таблицу структурного суммирования вида

$\overset{st}{+}$	1000	$0i00$	$00i0$	$000i$
1000	$(-i)0i00$	$00i0$	$000i$	$(i)1000$
$0i00$	$00i0$	$(i)000i$	$(-1)1000$	$(i)0i00$
$00i0$	$000i$	$(-1)1000$	$(i)0i00$	$(i)00i0$
$000i$	$(i)1000$	$(i)0i00$	$(i)00i0$	$(i)000i$

.

В другой форме она выглядит так:

$\overset{st}{+}$	1	τ_1	τ_2	τ_3
1	$(-i)\tau_1$	τ_2	τ_3	$i1$
τ_1	τ_2	$i\tau_3$	$(-1)1$	$i\tau_1$
τ_2	τ_3	$(-1)1$	$i\tau_1$	$i\tau_2$
τ_3	$i1$	$i\tau_1$	$i\tau_2$	$i\tau_3$

При наличии весовых множителей у реперов указанные выражения будут дополнены «весами» в форме сумм пары элементов алгебры. Например, имеем выражения

$$(a)0i00\overset{st}{+}(b)00i0=0ia00\overset{st}{+}00ib0=(a+b)(-1)1000,\rightarrow$$
$$\rightarrow a\tau_1\overset{st}{+}b\tau_2=-(a+b)1,$$

$$(a)000i\overset{st}{+}(b)000i=000ia+000ib=(a+b)(i)000i,\rightarrow$$
$$\rightarrow a\tau_3+b\tau_3=i(a+b)\tau_3,...$$

$$(a)0i00\overset{st}{-}(b)00i0=0ia00\overset{st}{-}00ib0=(a-b)(-1)1000,\rightarrow$$
$$\rightarrow a\tau_1\overset{st}{-}b\tau_2=-(a-b),$$

$$(a)000i\overset{st}{-}(b)000i=000ia-000ib=(a-b)(i)000i,\rightarrow$$
$$\rightarrow a\tau_3-b\tau_3=i(a-b)\tau_3,...$$

Наличие новых элементов и новых операций позволяет получить обобщение стандартных моделей полей.

Кроме этого, алгоритм не противоречит полученным ранее результатам и не отменяет их, когда применяются другие величины и другие операции.

Заключение

Теорема Фробениуса о невозможности расширения комплексного поля до пространства с размерностью 3 с двумя базовыми единицами базируется на свойствах чисел и операциях с ними. В рассматриваемом случае применяются элементы, ассоциированные с числами. Кроме этого, приняты качественно новые операции произведения и суммирования. Эти операции более сложны по сравнению с теми операциями, которые приняты для чисел. Принятое и обоснованное ранее ограничение расширения на размерности 2,4 обусловлено не элементами алгебры, а свойствами применяемых стандартных операций с числами и матрицами. Новый алгоритм позволяет выполнить расширение комплексных чисел на пространства любого конечного числа измерений.

Не отрицается также модель расширения на пространства с бесконечной размерностью.

Литература

1. Конвей Д.К., Дерек Ф.С. О кватернионах и октавах. – М. : МЦНМО, 2009. – 184 с.
2. Бахтурин Ю.А. Основные структуры современной алгебры. – М. : Наука, 1990. – 320 с.
3. Барыкин В.Н. Атом света. – Минск : изд. Скакун В.М., 2001. – 277 с.
4. Барыкин В.Н. Неассоциативность на комбинаторной операции. – Минск : Ковчег, 2011. – 234 с.
5. Барыкин В.Н. Новые математические операции. – Минск : Ковчег, 2014. – 176 с.
6. Барыкин В.Н. Новая неассоциативность множеств. – Минск : Ковчег, 2017. – 252 с.

Научное издание

БАРЫКИН Виктор Николаевич

Обобщение теоремы Фробениуса

Ответственный за выпуск *Владимир Кузьмин*

Подписано в печать 18.09. 2017 г.
Формат 60 x 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1.16. Уч.-изд. л. 0.25.
Тираж 99 экз. Заказ 290.

ООО «Ковчег»
Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий
№1/381 от 01 07 2014 г.
Пр. Независимости, 68-19, 220072 г. Минск.
Тел./факс: (017) 284 04 33
e-mail: kovcheg_info@tut.by

ISBN 978-985-7185-45-0