Введение

Жизнь устроена так, что далеко не всё и далеко не до конца понятно. Вследствие этого естественны ошибки, не оптимальные или ненужные действия и поступки. Стремление к успеху и развитию, что соответствует фундаментальной нацеленности Вселенной, при таких условия реализовывать сложно. Нужны конструктивные ориентиры и алгоритмы поведения и действий, которые не могут быть достигнуты только на личном опыте. Важны опыт и практика других людей, но еще более важно знать законы, которые найдены и подтверждены практикой, законы, гарантирующие развитие и успех. Понятно, что исполнение законов может быть сложным делом, но даже понять и принять законы бывает трудно. Иногда хочется жить по своим, не проверенным и придуманным законам. Исполнение законов почти всегда связано с преодолением собственной инерции и собственных привычек. Но еще больше на реализацию замыслов и планов обычно влияет ближнее и дальнее окружение, у которого своя инерция и свои привычки.

Надёжной и долговременной опорой человеку во всех действиях и делах всегда была, есть и будет математика. Может быть, хотя этот тезис кажется неправильным, что подчинение законам, которые генерирует математика, есть главное правило жизни. Чем это обусловлено? Математика, с одной стороны, даёт общие и частные законы жизни. С другой стороны, она содержит алгоритмы расчета структуры и поведения объектов. По этой причине в начале и по ходу любых действий желательно всё «посчитать», потом, при успехе расчета, подчиниться полученным законам, реализовать их на практике.

Практика, понятно, не исчерпывается математикой, однако именно математика может и должна быть истоком и критерием действий. Новая математика даст новую практику, поэтому нужно стремиться овладевать тем новым, что генерирует математика.

Математические эксперименты тем хороши, что выполнить их могут только профессионалы и обычно они могут быть реализованы при минимуме материальных вложений.

Объем и качество знаний, которые уже достигнуты, не так значим и велик, как кажется, когда приступаешь к их овладению…Система обучения и воспитания способна исказить и запутать истины в некий клубок с системой узлов, представить их в форме бесконечного лабиринта с системой непреодолимых препятствий.

Нужно понимать, что знания в любом разделе науки есть аналог нового языка со своими звуками, морфологией, смыслом…Язык этот может быть достаточно сложен для восприятия и для пользования. По этой причине бывает сложно специалисту из одной области знания понять и принять специалиста из другой области знания. Если же создаётся новое знание, естественно формируется новый язык. Он имеет истоки в системе известных языков, но он только частично открыт и понятен для тех, кто является создателем нового знания. Он может быть долгое время непонятен и неприемлем для сторонников и последователей уже достигнутого, достоверного знания.

Реальности сейчас понятна для нас в её общем виде: это система трансфинитно структурных объектов с трансфинитно активными отношениями. Принимая эту точку зрения, мы вправе принять главное правило жизни: каждый объект в рамках своих возможностей обязан гармонично и оптимально функционировать вне и внутри себя. При отказе или при нарушении оптимальности и гармоничности функционирования генерируются неоправданные сложности и проблемы. Поэтому цель и смысл жизни состоит в том, чтобы обеспечить условия и реализовать гармоничное и оптимальное применение и изменение системы структурных объектов в системе трансфинитных активностей. Средствами для достижения цели жизни являются условия воспитания и обучения. Понятно, что воспитывать и обучать нужно прежде всего себя. Таковы контуры ожидаемого успеха.

Из того факта, что Ваши условия жизни внешне не идеальны, вовсе не следует, что не идеальны Ваши внутренние условия. В рассматриваемом случае следует больше учитывать и применять внутренние условия и возможности. Их границы и значимость устанавливаются только практикой.

В монографии рассмотрены «подсказки» к анализу структуры и активности разных объектов, ассоциированные с анализом алгебраических уравнений. Специфика их структуры и решений находит продолжение в свойствах и проявлениях физических объектов, заданных матрицами. Дополнение системы матриц, замкнутых по некоторой операции, новыми операциями генерирует систему новых законов. Они имеют связи с исходной системой законов, которые получены до расширения операций.

Сплетения и деформации конформаций, удобных для анализа структур и активностей, естественны с позиции физического моделирования, так как они генерируют новые элементы для искомых систем уравнений

В монографии принята точка зрения, что фундаментальными объектами материи, которая нам доступна и реализуется в нашей практике, являются 2 пары объектов, названных предзарядами. Одна пара есть система из отрицательных и положительных «гравитационных» предзарядов. Вторая пара есть система из отрицательных и положительных «электрических» предзарядов. Тогда фундаментальная система матриц образована матрицами размерности 4.

Предзаряды образованы из объектов линейного типа, которые могут быть замкнуты «на себе» и на других аналогичных объектах. По этой причине тонкая материя способна создавать базовые объекты на разных уровнях материи не только для Тел, но также для Сознаний и Чувств, описываемых чаще всего неассоциативной математикой. Математическая реализация указанных возможностей и вариантов продолжает исследование, выполненное ранее в работах $[1-7]$.

Математика отношений с физической точки зрения

Следуя длительной и надежно проверенной практике, система матриц отображает систему отношений между объектами. Размерность квадратных матриц указывает на количество объектов, между которыми возможны отношения. Строка матрицы указывает, следуя расположению значимых элементов, какие влияния на этот объект оказывают другие объекты рассматриваемой совокупности.

Примем точку зрения, что фундаментальными объектами материи, которая нам доступна и реализуется в нашей практике, являются 2 пары объектов, названных предзарядами. Одна пара есть система из отрицательных и положительных «гравитационных» предзарядов. Вторая пара есть система из отрицательных и положительных «электрических» предзарядов. Тогда фундаментальная система матриц образована матрицами размерности 4. Поскольку отношения могут быть положительными или отрицательными, они будут заданы положительными или отрицательными величинами в строках матриц. Примем точку зрения, что элементы на главной диагонали матриц задают отношение, того или другого вида, к себе. Тогда другие элементы задают отношения других объектов к данному в столбце, соответствующем расположению данного элемента на диагонали.

Проанализируем, следуя принятой концепции, систему матриц, на основе которой частично описываются гравитационные явления. Она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Представим морфологическое описание этих матриц. Согласно первой матрице, мы имеем две пары отношений. Первый объект отрицательно влияет на четвертый объект, четвертый объект отрицательно влияет на первый объект. Второй объект положительно влияет на третий объект, третий объект положительно влияет на второй объект. Согласно второй матрице, отношения изменены. Первый объект положительно влияет на третий объект, третий объект положительно влияет на первый объект. У второго и четвертого объектов взаимные отношения отрицательные. Четвертая матрица описывает ситуацию, согласно которой каждый из рассматриваемых объектов влияет на себя положительно.

Заметим, что отношения между объектами согласно симметричным матрицам «гравитационного» типа принципиально отличаются от отношений, присущих матрицам антисимметричного типа, которые принято ассоциировать с электрическими свойствами материи. У антисимметричных матриц выполняется аналог закона Ньютона: сила действия равна силе противодействия.

В этом случае матрицы «электрического» типа таковы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подчиняясь правилу положительного воздействия на себя, матрицы выражают «компенсационные» законы взаимного воздействия.

Поскольку у нас достаточно оснований для понимания факта, что гравитация и электромагнетизм едины, мы обязаны принять точку зрения, что данный «фундамент» свойств присущ каждому объекту. По этой причине Человек и всё Человечество проявляет в своей структуре и поведении аналоги гравитационных и электрических свойств материи. Поскольку есть отрицательные и положительные стороны и свойства отношений у материи, они есть и обязаны быть в нашей структуре и нашем поведении.

Согласованное изменение конформаций и расчетных моделей

Изменив структуру одного объекта конформации, мы обязаны, в силу согласованности системы объектов конформации, изменить другие объекты. Пусть, например, нам задана конформация

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть изменен один элемент конформации

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Конформативность генерирует новую структуру других объектов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно новой структуре элементов конформации индуцируется частично деформированная система структурных операций (задающая свойства взаимодействия), что меняет, как известно, функциональные условия равновесия в системе объектов.

Другими словами, изменение одного объекта в системе согласованных объектов генерирует систему новых законов.

Поскольку объекты имеют внутренние степени свободы и внешние условия, рассматриваемые изменения прямо или косвенно связаны с этими факторами перемен.

В расчетной модели к объектам конформации присоединены величины, а также дифференциальные и кодифференциальные операторы, образуя согласованный комплекс величин. Динамика явления обусловлена указанными элементами, в системе которых согласующие элементы играют важную роль. В частности, согласование может быть выполнено компонентами четырехметрики.

Симметрия есть лишь часть свойств и условий взаимодействия в системе объектов. Она не обязана быть фундаментальной. Алфавит можно рассматривать как пример морфологической конформации. Атомы есть пример конформации электронов и протонов.

Возможна линейная суперпозиция конформаций. Объединим элементы пары канонических (простейших) конформаций в новую систему:

$$
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}
$$

$$+$$

$$
\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}
$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$
\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.
$$

Модель на суперпозиции конформаций в данном случае кажется моделью вырожденного типа, так как включает в себя только первый и третий элементы новой конформации

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Однако она не так проста, как кажется на первый взгляд, если модель конструируется на основе комбинированного матричного произведения элементов конформации на волновую функцию.

Содержательный вариант получится, если первый элемент конформации по каждой строке умножается на первую строку волновой функции, второй элемент умножается на вторую строку и т.д.

В реальной практике ситуации могут самые разные. В частности, волновые функции могут быть дополнены внутренними и внешними переменными, реализующими изменение по самостоятельной динамике. Модель может содержать скрытые параметры, прямо или косвенно учтенные в расчете.

Получим, например, заготовку модели вида

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_\tau\right\}\begin{pmatrix}\varphi_x&\varphi_y&\varphi_z&\varphi_\tau\\\varphi_y&\varphi_x&\varphi_\tau&\varphi_z\\\varphi_z&\varphi_\tau&\varphi_x&\varphi_y\\\varphi_\tau&\varphi_z&\varphi_y&\varphi_x\end{pmatrix}=0.$$

Нелинейная суперпозиция конформаций основана на наложении нескольких конформаций, когда один из элементов меняется под действие разных других элементов. Проиллюстрируем слова примером:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$+$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$+$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

К этим элементам конформации добавились элементы новой конформации

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сплетение и деформация конформаций естественны с позиции физического моделирования, так как они генерируют новые элементы для искомых систем уравнений.

Скрытая неассоциативность в уравнениях электродинамики

Неассоциативность в рамках развиваемой модели Сознаний и Чувств есть свидетельство в пользу наличия у исследуемых объектов средств и алгоритмов приема и передачи информации. При рассмотрении электродинамики в форме системы физических объектов анализ ее информационных свойств и способностей представляется фундаментальной задачей. Примем во внимание практику моделирования неассоциативности на основе таблицы произведений, ассоциированной со структурой объектов конформации. В частности, возможна запись уравнений электродинамики на основе пары кватернионов.

Представим уравнения электродинамики в матричном виде. Он базируется на матрицах

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы a^i, b^i согласованы между собой посредством знаковой группы с элементами

$$\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\+\\-\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\-\\-\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\-\\+\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\+\\+\\-\end{pmatrix}.$$

Уравнения в алгебраической форме

$$\left(a^1\partial_x + a^2\partial_y + a^3\partial_z + \frac{(-i)}{c}\partial_t\right)\varphi + \left(b^1\partial_x + b^2\partial_y + b^3\partial_z + \frac{i}{c}\partial_t\right)\overline{\varphi} = 0,$$

$$\varphi = \begin{pmatrix}E_x - iB_x\\ E_y - iB_y\\ E_z - iB_z\\ 0\end{pmatrix}, \overline{\varphi} = \begin{pmatrix}E_x + iB_x\\ E_y + iB_y\\ E_z + iB_z\\ 0\end{pmatrix}.$$

имеют векторный вид

$$\partial_y E_z - \partial_z E_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}, \partial_z E_x - \partial_x E_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}, \partial_x E_y - \partial_y E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}, div\vec{B} = 0.$$

Первая знаковая конформация представлена матрицами

$$a^1 = \begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}, a^0 = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

С ней ассоциирована таблица частично антисимметричных структурных произведений

$\times_{st}$	1	2	3	4
1	4	3	–2	–1
2	–3	4	1	–2
3	2	–1	4	–3
4	1	2	3	4

.

Она ассоциативна. Например, получим

$$2(34) = 2(-3) = -1, (23)4 = 1\cdot 4 = -1,$$
$$4(32) = 4(-1) = -1, (43)2 = 3\cdot 2 = -1.$$

Четырехметрика, связывающая элементы данной конформации, псевдоевклидова при евклидовости трехмерия:

$$g^{ij} = diag(1,1,1,-1).$$

Тонкость в применении данной конформации для моделирования расчетных дифференциальных уравнений состоит в том, что частные производные согласованы с расположением элементов в последнем столбце.

Ситуация может измениться, если функции такого «опорного» столбца передать другому столбцу. В общем случае, как легко видеть, это может быть первый, второй или третий столбец. Задача состоит в том, чтобы исследовать эту возможность, применяя в качестве «лакмусовой бумажки» стандартную модель уравнений электродинамики. Другими словами, мы можем по-другому соединить с частными производными рассматриваемые элементы конформаций и внести изменения в четырехметрику таким образом, чтобы уравнения электродинамики остались неизменными.

Пусть в качестве «опорного столбца» расчетной модели принят третий столбец. Тогда матрицы распределятся следующим образом:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Объединим их в расчетную модель согласно четырехметрике, псевдоевклидовой в трехмерии: $g^{ij} = diag(1,-1,1,-1)$.

Получим деформированную конформацию для евклидового четырехмерия

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её элементы схожи с матрицами, которые получатся при умножении слева исходных матриц на матрицу, принадлежащую группе перестановок:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку правая часть рассматриваемых уравнений электродинамики равна нулю, новая конформация генерирует правильные уравнения для полей.

Эта конформация характеризуется таблицей структурных произведений

$\times_{st}$	1	2	3	4
1	3	–4	–1	2
2	4	3	–2	–1
3	1	2	3	4
4	–2	1	–4	3

.

Она неассоциативна. Например, получим

$$2(34) = 2\cdot 4 = -1, (23)4 = -2\cdot 4 = 1, 4(32) = 4\cdot 2 = 1, (43)2 = -4\cdot 2 = -1, \ldots$$

Конформация с опорным третьим столбцом неассоциативна без внесения дополнительных, знаковых изменений. Действительно, ей соответствует таблица произведений

$\times_{st}$	1	2	3	4
1	3	4	–1	–2
2	–4	3	2	–1
3	1	–2	3	–4
4	2	1	4	3

.

Она неассоциативна. Например, получим

$$2(34) = 2\cdot(-4) = 1, (23)4 = 2\cdot 4 = -1, 4(32) = 4\cdot(-2) = -1, (43)2 = 4\cdot 2 = 1, \ldots$$

Нарушение евклидовости трехметрики на конформации с кватернионом не нарушает ассоциативности структурного произведения. Так, например, таблица произведений

$\times_{st}$	1	2	3	4
1	4	3	2	–1
2	–3	4	1	2
3	–2	–1	4	–3
4	1	–2	3	4

.

Она ассоциативна. Например, получим

$$2(34) = 2(-3) = -1, (23)4 = 1\cdot 4 = -1,$$
$$4(32) = 4(-1) = -1, (43)2 = 3\cdot 2 = -1.$$

Анализ позволяет сделать такие *выводы*:

а) поля в электродинамике могут быть рассчитываться как по модели ассоциированных конформаций, так и по модели неассоциированных конформаций,
б) расчетная модель для полей в электродинамике базируется на системе четырехметрик, ассоциированных с разными конформациями, допуская неевклидовость в трехмерии.

По этой причине стандартная, линейная электродинамика имеет систему скрытых свойств и возможностей, допуская, в частности, проявления некоторых базовых элементов для приема и передачи информации, интерпретируемых как форма Сознаний и Чувств объектов, которые формируют сущность, называемую электромагнитным полем.

Скрытые отношения ассоциативности и неассоциативности

Согласно принятой точке зрения, законы взаимодействия в системе объектов базируются на таблицах их сумм и произведений, которые могут быть прямо или косвенно связаны со структурой анализируемых объектов. При этом проявляются некоторые скрытые свойства ассоциативности и неассоциативности. Проиллюстрируем этот тезис примерами.

Проанализируем таблицу произведений

$\times$	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	c	d	a	b
c	b	c	d	a
d	a	b	c	d

.

Она неассоциативна. Например, получим

$$a(cd) = aa = d, (ac)d = bd = b,$$
$$c(db) = cb = c, (cd)b = ab = a, \ldots$$

Строки таблицы произведений представим рисунками:

d	$\rightarrow$	a
		$\downarrow$
c	$\leftarrow$	b

,

d	$\rightarrow$	a
$\uparrow$		$\downarrow$
c		b

,

d	$\rightarrow$	a
$\uparrow$		
c	$\leftarrow$	b

,

d		a
$\uparrow$		$\downarrow$
c	$\leftarrow$	b

.

Матрицы, генерирующие данную таблицу в форме структурного произведения при согласовании элементов a,b,c,d по расположению элементов в последней строке, таковы:

$$a\to\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},b\to\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},c\to\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},d\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Система матриц есть группа на матричной операции, ассоциативное множество. Следовательно, есть скрытое согласование ассоциативного и неассоциативного множеств. Матрицы, задающие группу, можно рассматривать как программу управления указанной системой объектов без связи со структурой данных объектов. Мы имеем модель формального ассоциативного управления, генерирующего неассоциативные свойства.

Проанализируем другую таблицу произведений для 4 объектов вида

$\times$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

.

Она ассоциативна

$$a(cd)=ab=b,(ac)d=cd=b,$$
$$c(db)=ca=c,(cd)b=bb=c,...$$

Рисунок, характеризующий расположение элементов в строках, имеет вид

d	$\to$	a
		$\downarrow$
c	$\leftarrow$	b

,

d	$\to$	a
$\uparrow$		$\downarrow$
c		b

,

d	$\to$	a
$\uparrow$		
c	$\leftarrow$	b

,

d		a
$\uparrow$		$\downarrow$
c	$\leftarrow$	b

.

Он аналогичен предыдущему рисунку для неассоциативного множества. Согласование элементов в рамках модели структурного произведения генерирует матрицы

$$a\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},b\to\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},c\to\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},d\to\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Они не образуют группу на матричной операции. Иная ситуация складывается на других операциях. Примем в качестве бинарной операции трансформацию пары объектов в новый объект из этой же совокупности, суммируя индексы их мест по модулю числа, равного размерности многообразия, добавляя к сумме единицу.

Получим формальную таблицу взаимных превращений, индуцированных данной операцией:

$$m(xy) = m(x) + m(y) + 1 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \hat{+} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Легко убедиться, что мы имеем дело с группой, функцию единицы в которой выполняет элемент, обозначенный цифрой 3.

Следовательно, конформация, которая ничем не примечательна с точки зрения матричной операции, комбинаторной операции, операции суммирования мест значимых элементов и т.д. становится «уважаемым» членом семейства групп на новой «иерархической» операции (в которой числовая иерархия в форме совокупности чисел может быть сконструирована по-разному), деформированной внешним фактором.

Те, что были «ничем» в системе общепринятых операций (алгоритмов анализа, оценок, взаимодействий) стали «всем» на числовой «иерархической» операции с внешним фактором.

Ситуация меняется принципиально, если в числовой, иерархической системе объектов операция зависит от того, какой элемент выполняет функцию управляющего элемента в форме внешнего фактора. В указанном выше случае роль внешнего фактора выполнял элемент с индексом 1. Рассмотрим модель отношений $m(xy) = m(x) + m(y) + m(x)$. Получим таблицу произведений:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \hat{\times} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Она частично ассоциативна. Например, получим

$$2(3 \cdot 4) = 2 \cdot 2 = 2, (2 \cdot 3)4 = 3 \cdot 4 = 2,$$
$$3(4 \cdot 1) = 3 \cdot 1 = 3, (3 \cdot 4)1 = 2 \cdot 1 = 1, \ldots$$

Та система элементов в форме конформации, которая была «ничем» в рамках стандартных, общепринятых, привычных оценок и операций, на данной операции образовала «коллектив», в котором свойства тел (описываемых ассоциативно) дополнены свойствами Сознаний и Чувств (описываемых неассоциативно).

Следовательно, изменение операций можно рассматривать в качестве важного элемента, управляющего свойствами системы объектов вплоть до их нового качества.

С физической точки зрения введенные операции индуцированы внутренними свойствами системы объектов, реализующих не только иерархию отношений, но и подчинение функции управления (операции).

Одной таблице произведений модель ставит в соответствие 4 таблицы суммирований:

$$m(xy)=m(x)+m(y)+1 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \hat{+}_1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}, m(xy)=m(x)+m(y)+2 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \hat{+}_2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline \end{array},$$

$$m(xy)=m(x)+m(y)+3 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \hat{+}_3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, m(xy)=m(x)+m(y)+4 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \hat{+}_4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Имеет место дублирование свойств. Объединяются четные внешние факторы и нечетные внешние факторы. Например, получим

$$1 \to (23)4 = 3, 3 \to (23)4 = 3,$$
$$2 \to (23)4 = 1, 4 \to (23)4 = 1, \ldots$$

Согласование элементов в рамках концепции структурного произведения во всех этих случаях генерирует одну модель конформации:

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наличие пар операций позволяет генерировать алгебры. Рассмотрим, например, пару операций

$\hat{\times}$	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	1	2	3	4
3	3	4	1	2
4	1	2	3	4

,

$\hat{+}_1$	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

.

Специфика этой пары в наличии условия $2\times x = 3 + x.$ Система подчинена зеркальному закону $f(x,y,z) = f(z,y,x),\ f(x,y,z) = x(yz) + y(zx) + z(xy).$

Тритернионы

Основные физические модели базируются, прямо или косвенно, на комплексных числах, а также кватернионах и антикватернионах. В первом случае есть пара чисел $1, i \to i^2 = -1.$ Во втором случае, например, на кватернионах, есть четыре базовых числа $1, i, j, k \to i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1.$ Таблицы произведений указанных чисел ассоциативны. Такая модель удовлетворяет потребности взаимного обмена телами или энергией.

У информационного обмена есть специфика, состоящая в том, что возможна передача информации от объекта к объекту при сохранении начальной информации у передающего объекта. С математической точки зрения таким процессам соответствуют неассоциативные и недистрибутивные модели. В настоящее время имеется совокупность таких моделей, сконструированных на общепринятых свойствах чисел. Естественно возникает вопрос: возможна ли неассоциативности и не дистрибутивность при обобщении свойств чисел? Проанализируем в этой связи возможность конструирования системы, состоящей из трех чисел

$$1, \beta, \gamma \to \beta^2 = -1, \gamma^2 = -1.$$

В качестве примера рассмотрим три числа

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, i^2 = -1.$$

Назовем их *тритернионами.*

Введем многоуровневую, построчную операцию произведения этих чисел. Выполним сначала произведения значимых чисел, расположенных в строках.

Расположим их в строке, задающей произведение, в соответствии с обобщенной суммой их мест в строке, дополненной функциональным законом, ассоциированным со статусом рассматриваемых чисел. Пусть верхние числа задают внутренний статус числа, проявляющийся при произведении чисел одного элемента конформации на себя. Пусть нижние числа задают внешний статус числа, проявляющийся при произведении не совпадающих чисел. К сумме мест в строке добавляются статусы мест, рассматриваемые по модулю числа, равного размерности анализируемых матриц.

Пусть статусы первого варианта будут таковы:

$$1\to\begin{array}{|c|}\hline \mathit{in}\\ \hline \mathit{out}\\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline 2\\ \hline 2\\ \hline\end{array},\beta\to\begin{array}{|c|}\hline \mathit{in}\\ \hline \mathit{out}\\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline 0\\ \hline 2\\ \hline\end{array},\gamma\to\begin{array}{|c|}\hline \mathit{in}\\ \hline \mathit{out}\\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline 4\\ \hline 3\\ \hline\end{array}.$$

Второй вариант подчиним статусам

$$1\to\begin{array}{|c|}\hline \mathit{in}\\ \hline \mathit{out}\\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 1\\ \hline\end{array},\beta\to\begin{array}{|c|}\hline \mathit{in}\\ \hline \mathit{out}\\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline 0\\ \hline 1\\ \hline\end{array},\gamma\to\begin{array}{|c|}\hline \mathit{in}\\ \hline \mathit{out}\\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline -1\\ \hline 1\\ \hline\end{array}.$$

Таблица расположения элементов на двух системах статусов получается одинаковой. Укажем её, например, для первой системы статусов, добавляя к сумме мест значимых элементов статус первого элемента в произведении:

$$1\times1\to1+1+2=1,1\times\beta\to1+2+2=2,1\times\gamma\to1+3+2=3,$$

$$\beta\times1\to2+1+2=2,\beta\times\beta=2+2+0=1,\beta\times\gamma\to2+3+2=1,$$

$$\gamma\times1\to3+1+2=3,\gamma\times\beta=3+2+2=1,\gamma\times\gamma=3+3+4=1.$$

Таблица произведений получит вид

$\times$	1	β	γ
1	1	β	γ
β	β	-1	-1
γ	γ	-1	-1

.

Она частично ассоциативна:

$$\beta(\gamma1)=\beta\gamma=-1,(\beta\gamma)1=-1\cdot1=-1,$$

$$\beta(\beta\gamma)=\beta(-1)=-\beta,(\beta\beta)\gamma=(-1)\gamma=\gamma.$$

Для второй системы статусов получается аналогичная таблица, если дополнять сумму мест значимых элементов суммой статусов рассматриваемых чисел. Например, получим

$$1\times 1\to 1+1+1+1=1, 1\times\beta\to 1+2+1+1=2, 1\times\gamma\to 1+1+1+3=3,$$

$$\beta\times 1\to 2+1+1+1=2, \beta\times\beta\to 2+2+0+0=1, \beta\times\gamma\to 2+3+1+1=1,$$

$$\gamma\times 1\to 3+1+1+1=3, \gamma\times\beta\to 3+2+1+1=1, \gamma\times\gamma\to 3+3-1-1=1.$$

Следовательно, одинаковая таблица произведений получается на разных системах статусов мест при разном их функциональном применении.

Другими словами, есть разные механизмы генерации неассоциативности, ассоциированные с расширением концепции чисел. Они обусловлены более «тонкой» системой отношений между объектами, представленными числами.

Ключевую роль в произведении играет «различие ощущений» «своих» и «чужих» чисел в форме системы статусов, фиксирующей пару механизмов для реализации произведений. В общепринятых моделях «числа» не различали «своих» и «чужих». Теперь это обстоятельство математически принято во внимание. У него, как легко видеть, много разных граней и возможностей.

При конструировании алгебр можно принять во внимание возможность расширения операции суммирования. В стандартной практике применяется суммирование элементов, характеризующихся одинаковым статусом мест. Из общих соображений, базирующихся на концепции трансфинитности операций, мы вправе выполнить, например, «сдвиговую» сумму. Для этого компоненты вектора можно суммировать с компонентами другой размерности, реализуя «сдвиг» на определенное число мест. При «сдвиге» на одно место для трехмерного «вектора» получим систему отношений:

$$A\overset{*}{+}B=\left(a_1,a_2,a_3\right)\overset{*}{+}\left(b_1,b_2,b_3\right)=\left(a_1b_2,a_2b_3,a_3b_1\right),$$

$$\left(A\overset{*}{+}B\right)\overset{*}{+}C=\left(a_1b_2,a_2b_3,a_3b_1\right)\overset{*}{+}\left(c_1,c_2,c_3\right)=\left(a_1b_2c_2,a_2b_3c_3,a_3b_1c_1\right),$$

$$B\overset{*}{+}C=\left(b_1,b_2,b_3\right)\overset{*}{+}\left(c_1,c_2,c_3\right)=\left(b_1c_2,b_2c_3,b_3c_1\right),$$

$$A\overset{*}{+}\left(B\overset{*}{+}C\right)=\left(a_1,a_2,a_3\right)\overset{*}{+}\left(b_1c_2,b_2c_3,b_3c_1\right)=\left(a_1b_2c_3,a_2b_3c_1,a_3b_1c_2\right).$$

В этом варианте объединения компонент вектора нарушается дистрибутивность

$$\left(A\overset{*}{+}B\right)\overset{*}{+}C\neq A\overset{*}{+}\left(B\overset{*}{+}C\right).$$

С обычной точки зрения рассматриваемый вариант некорректен, так как «овцы» объединяются с «пастухами». С философской точки зрения стандартный вариант базируется на сознательном сужении свойств векторов: отрицании возможности объединения компонент разной размерности.

Аналогично можно складывать компоненты матриц, «сдвигая» строки или столбцы. В этом варианте анализируется более общая система отношений между объектами. Ничего принципиально невозможного в этом подходе нет. Там, где ранее во внимание принималась только одна возможность, теперь обнаруживается система возможностей.

Она не выходит за рамки модели деформации операций, отрицать которую нет оснований.

Операционное расширение матричных полей

Поле, согласно определению математиков, есть совокупность объектов, которые задают коммутативную группу по суммированию, содержащую «нулевой» элемент, а также, если не принимать во внимание «нуль», они задают коммутативную группу по умножению.

Если имеет место некоммутативность, поля называют телами. Если на множестве действует только группа по суммированию, мы имеем кольцо. В стандартной практике математиков данные объекты различаются принципиально, поэтому им даны разные названия. Если будет найден вариант их объединения в одно многообразие с разными гранями, можно упростить терминологию. Могут быть некоммутативные поля и полуполя.

Обычно анализируются и предлагаются вниманию поля на основе системы чисел, суммируемых и умножаемых с оценкой полученных выражений по модулю некоторого числа. Их расширение проводится на основе задания системы неприводимых многочленов, ассоциированных с исходным полем. Обычно такой алгоритм связывают с идеями Галуа, предназначенными для нахождения необходимых и достаточных условий для решения алгебраических уравнений высокого порядка.

В рамках развиваемого подхода, когда математическим объектам ставятся в соответствие физические объекты, желательно задавать поле матрицами. Они прямо или косвенно характеризуют систему отношений между объектами, число которых равно размерности исследуемых матриц.

В современной физике постепенно утверждается точка зрения, что фундаментальные физические явления основаны на отношениях 4 объектов: пары электрических предзарядов с разными знаками и пары гравитационных предзарядов с разными знаками.

Физические теории конструируются в рамках данного допущения на системе кватернионов и антикватернионов. Их можно рассматривать как объекты, генерируемые на основе группы знаков из группы перестановок Клейна

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, 3 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 4 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дополним эту систему нулевой матрицей

$$0 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проанализируем возможность превращения данной совокупности матриц в поле с матричными элементами.

Анализируемая система матриц есть коммутативная группа на стандартной матричной операции. Первое условие для моделирования поля выполнено.

Реализуем теперь второе условие: зададим операцию суммирования для всей совокупности матриц. Для этого сопоставим паре матриц новую матрицу согласно суммированию чисел, ассоциированных с матрицами, названных статусом матриц в рассматриваемом множестве. Примем правило, что первое число суммы статусов указывает на количество перестановок в «цикле» из 5 цифр, начатых со второго элемента суммы.

Для пяти объектов получим таблицу суммирования:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Она коммутативна. Теперь все условия, определяющие модель поля, выполнены.

Мы имеем поле с матричными элементами с матричной операцией произведения и операцией суммирования статусов матриц.

Заметим, что операция суммирования статусов матриц может быть применена для любой совокупности матриц.

Она неоднозначна, так как числа для статусов мест можно задавать произвольно, генерируя модель многообразия иерархического типа. Этот подход дополняет информацию об открытом ранее свойстве существования системы суммирований в каждом конечном множестве.

Неоднозначность обусловлена учетом дополнительных свойств, ассоциированных с системой объектов.

В силу указанных причин *проблема расширения матричных полей сведена к моделированию совокупности матриц на основе применения к исходной совокупности новых операций умножения.*

Применим к элементам группы Клейна комбинаторную операцию произведения строк на строки. Сущность её состоит в том, что под строкой первой матрицы располагается аналогичная строка второй матриц с последующей генерацией значимого элемента новой матрицы в форме произведения значимых элементов, располагая его на месте, равном количеству шагов до совпадения.

Например, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{u}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \frac{0\ \ 1\ \ 0\ \ 0}{0\ \ 0\ \ 0\ \ 1}\ \frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{0\ \ 0\ \ 1\ \ 0}\ \frac{0\ \ 0\ \ 0\ \ 1}{0\ \ 1\ \ 0\ \ 0}\ \frac{0\ \ 0\ \ 1\ \ 0}{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{u}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \frac{0\ \ 1\ \ 0\ \ 0}{0\ \ 0\ \ 1\ \ 0}\ \frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{0\ \ 0\ \ 1\ \ 0}\ \frac{0\ \ 0\ \ 0\ \ 1}{0\ \ 0\ \ 1\ \ 0}\ \frac{0\ \ 0\ \ 1\ \ 0}{0\ \ 0\ \ 1\ \ 0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ldots$$

Операция генерирует на основе группы Клейна новое конечное множество:

$$\begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это множество замкнуто как на рассматриваемой операции, так и на стандартной матричной операции. Обе операции ассоциативны.

По этой причине мы получили двойное операционное расширение исходного матричного поля. Группам по умножению присущи разные единичные элементы. Это обусловлено, конечно, различием применяемых операций.

На матричной операции и комбинаторной операции произведения строк на строки единичные элементы таковы:

$$E\begin{pmatrix} {\scriptstyle m} \\ \times \\ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E\begin{pmatrix} {\scriptstyle k} \\ \times \\ {\scriptstyle ll} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что комбинаторная операция расширила исходное множество, что не могла реализовать матричная операция, относительно которой исходное множество замкнуто. В итоге получилось новое множество, замкнутое на матричной операции.

Заметим, что наличие системы суммирований, обусловленное возможностью конструирования разных иерархических структур в многообразии, изначально свидетельствует о системе матричных полей. В рассматриваемом случае эта система не только расширяется по количеству элементов. Она расширяется также по системе возможных операций, относительно которых она замкнута.

Проанализируем некоторые возможности деформации операций. Пусть, например, деформация операций основана на свойстве «зеркальности» элементов анализируемого множества. Например, «зеркальны» пары

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ldots$$

По этой причине «зеркальность» сохраняет анализируемое множество. По этой причине возможно введение «зеркальной» операции, когда первый элемент произведения умножается не на второй элемент, а на его «зеркальный» двойник.

Фактически так вводится двойная операция произведения: сначала второй элемент превращается в свой аналог, а затем реализуется некоторое произведение.

Анализ свидетельствует, что комбинаторная операция в этом случае сохраняет ассоциативность, а матричная операция становится неассоциативной. Рассмотрим три матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\alpha \overset{k}{\underset{*}{\times}} \left(\beta \overset{k}{\underset{*}{\times}} \gamma \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\alpha \overset{k}{\underset{*}{\times}} \beta \right) \overset{k}{\underset{*}{\times}} \gamma,$$

$$\alpha \overset{m}{\underset{*}{\times}} \left(\beta \overset{m}{\underset{*}{\times}} \gamma \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\alpha \overset{m}{\underset{*}{\times}} \beta \right) \overset{m}{\underset{*}{\times}} \gamma.$$

«Зеркальная» деформация матричной операции придает анализируемому множеству новое качество – неассоциативность.

Комбинаторная операция в форме произведения строк на строки, равно как и её «зеркальная» деформация, имеют одинаковые правые единицы.

Мы получили *расщепление пары групп* с умножением на основе деформации операций, реализовав 4 модели произведений. Реальная ситуация шире по своим свойствам. Дело в том, что анализируемая система матриц, как показано ранее, замкнута относительно операции суммирования по модулю статуса значимых мест.

Рассмотрим в новом числовом представлении анализируемую тройку матриц:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to 1111, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to 4242, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to 2341,$$

$$\overset{*}{\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to 1313,\overset{*}{\gamma}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to 3214.$$

Применив операцию «зеркального» суммирования, получим

$$\alpha*(\beta*\gamma)=3214=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=1234=(\alpha*\beta)*\gamma.$$

Сумма становится неассоциативной, она зависит от расстановки скобок. Следовательно, множество способно иметь качественно новые свойства, генерируемые сохраняющей его системой операций.

Тонкости решения алгебраических уравнений методом Лагранжа

Главная идея метода Лагранжа состоит в конструировании по данным, ассоциированным с анализируемым алгебраическим уравнением, нового уравнения, основанного на рациональных функциях от искомых корней, которые получаются перестановками этих корней местами. Коэффициенты нового уравнения выражаются через коэффициенты исходного уравнения. Решения получатся, если решается новое уравнение.

Проиллюстрируем метод на примере квадратного уравнения

$$x^2+mx+n=0.$$

Введем предполагаемые значения корней $x_1=a, x_2=b.$ Применим для построения нового уравнения рациональную функцию $\alpha=a-b.$ В этом случае перестановка корней генерирует функцию $\beta=-\alpha=b-a.$

Модель новой функции задается произведением множителей

$$F(y)=(y-\alpha)(y-\beta)=(y-\alpha)(y+\alpha)=y^2-\alpha^2.$$

Теперь следует выразить величину α^2 через параметры начального уравнения. Учтем свойства корней квадратного уравнения

$$x^2+mx+n=0=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2,$$

$$x_1+x_2=a+b=-m, x_1x_2=ab=n.$$

Тогда

$$\alpha^2 = a^2 - 2ab + b^2 = \left(a+b\right)^2 - 4ab = m^2 - 4n.$$

Следовательно,

$$y_1 = \alpha = a - b = \pm\sqrt{m^2 - 4n}, y_1 = \beta = -a + b = \mp\sqrt{m^2 - 4n}.$$

Так как $a + b = -m,$ получим

$$a = -\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}, b = -\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}.$$

Известные формулы получены другим способом. Он применим к уравнениям более высоких порядков степени 3,4. Для уравнений степени 5 он не дает решений, что косвенно свидетельствует о неразрешимости общего уравнения данного порядка в радикалах.

Проанализируем квадратное уравнение другим методом

$$x^2 + ax + b = \left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) = 0.$$

Учтем известную функциональную зависимость для корней уравнения

$$x_1 + x_2 = -a, x_1 x_2 = b.$$

Примем для корней уравнения выражения вида $x_1, x_2 = x_1 + \alpha.$ Тогда из первой функциональной зависимости получим $x_1 = -\frac{1}{2}\left(a + \alpha\right).$ Вторая функциональная зависимость дает связь $x_1 x_2 = x_1^2 + x_1\alpha + b - b = b,$ генерируя условие $x_1\alpha - 2b = ax_1.$ В другом виде $x_1\left(\alpha - a\right) = 2b.$ Согласование пары выражений для x_1 дает условие $-\frac{1}{2}\left(\alpha^2 - a^2\right) = 2b.$ Следовательно, $\alpha = \pm\sqrt{a^2 - 4b}.$ Для корней уравнения получим известные выражения:

$$x_1 = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}, x_2 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Их согласование с указанными функциональными условиями очевидно. Никакой новой информации или новых следствий данный прием получения решений не дает.

Применим указанный алгоритм решения к уравнениям третьего порядка

$$x^3 + ax^2 + bx + c = \left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right) = 0.$$

Функциональные законы для корней уравнения

$$\begin{aligned}&\alpha) x_1 + x_2 + x_3 = -a,\\ &\beta) x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b,\\ &\gamma) x_1x_2x_3 = -c\end{aligned}$$

на системе условий $x_1 = x_1, x_2 = x_1 + \alpha, x_3 = x_1 + \beta$ преобразуются к виду

$$\begin{aligned}&\alpha) 3x_1 + \alpha + \beta + a = 0,\\ &\beta) 3x_1^2 + 2(\alpha + \beta)x_1 + \alpha\beta = b,\\ &\gamma) x_1^3 + (\alpha + \beta)x_1^2 + \alpha\beta x_1 + c = 0.\end{aligned}$$

Сравнивая последнее условие с исходным выражением, получим законы

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b.$$

Им соответствует алгебраическое уравнение $y^2 - ay + b = 0$ с корнями

$$\alpha, \beta = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \frac{a}{2} \pm \Delta.$$

Каждый «корень» генерирует условие для свободного члена. Для первого «корня» получим

$$x_1 = -\frac{2}{3}a, x_1^2 = \frac{4}{9}a^2, x_1^3 = -\frac{8}{27}a^3,$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = -\frac{8}{27}a^3 + \frac{4}{9}a^3 - \frac{2}{3}ab + c = 0.$$

Из уравнения $4a^3 - 18ab + 27c = 0$ получим условие для величины c в форме складки Уитни

$$c = Aa^3 + Bab \to z = Ax^3 + Bxy,$$

$$A = -\frac{4}{27}, B = \frac{2}{3}.$$

Второй корень $x_2 = -\frac{a}{6} + \Delta$ генерирует

$$x_2^2 = \frac{a^2}{36} - \frac{a}{3}\Delta + \Delta^2, x_2^3 = -\frac{a^3}{216} + \frac{1}{12}a^2\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \Delta^3.$$

Из основного уравнения получим

$$-\frac{a^3}{216}+\frac{1}{12}a^2\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\Delta^3+\frac{a^3}{36}-\frac{a^2}{3}\Delta+\Delta^3-\frac{a}{6}b+b\Delta=-c_2,$$

$$\frac{5}{216}a^3-\frac{1}{4}a^2\Delta-\frac{1}{6}ab+b\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+2\Delta^3=-c_2,$$

После преобразований получим для свободного коэффициента c_2 выражение

$$c_2=-\frac{5}{216}a^3+\frac{1}{4}a^2\left(1-5\Delta\right)+\frac{1}{6}ab-\frac{b}{2}\left(1-6\Delta\right).$$

Для свободного коэффициента c_3 получим выражение

$$c_3=-\frac{5}{216}a^3+\frac{1}{4}a^2\left(1+5\Delta\right)+\frac{1}{6}ab-\frac{b}{2}\left(1+6\Delta\right).$$

Следовательно, модель параметрического задания «корней» уравнения третьего порядка генерирует трехмерное пространство свободных коэффициентов.

Проиллюстрируем метод Лагранжа на примере алгебраического уравнений четвертого порядка $x^4+mx^3+nx^2+px+q=0.$ Обозначим искомые корни уравнения буквами a,b,c,d. На основании формулы для корней четвертой степени из единицы $\sqrt[4]{1}:1,i,-1,-i$ выберем корень $\sqrt[4]{1}=-1=\varepsilon$. Рассмотрим линейную суперпозицию корней с множителями, образованными степенями выбранного корня. Она называется резольвентой, и в данной ситуации имеет вид

$$\sigma=a+\varepsilon b+\varepsilon^2c+\varepsilon^3d=a-b+c-d.$$

Рассмотрим все перестановки корней b,c,d в исходной резольвенте. Получим

$$\alpha=a-b+c-d,$$
$$\beta=a-b-c+d,$$
$$\gamma=a-c+b-d.$$

Им дополнительно сопоставлены резольвенты

$$-\alpha=-a+b-c+d,$$
$$-\beta=-a+b+c-d,$$
$$-\gamma=-a+c-b+d.$$

Рассматривая резольвенты как корни вспомогательного уравнения, получим

$$\Phi(y)=(y-\alpha)(y+\alpha)(y-\beta)(y+\beta)(y-\gamma)(y+\gamma)=\left(y^2-\alpha^2\right)\left(y^2-\beta^2\right)\left(y^2-\gamma^2\right)=0.$$

Новое уравнение содержит только четные степени величины y:

$$\Phi(y)=Ay^6+By^4+Cy^2=0.$$

Коэффициенты выражаются через квадраты резольвент. В частности

$$A=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

Это выражение, как и другие, более сложные коэффициенты, следуя теореме Гаусса относительно структуры симметричных функций, могут быть выражены через основные симметричные функции, ассоциированные с исходным уравнением.

Проиллюстрируем этот тезис расчетом. Имеем выражения:

$$\alpha^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd-2ac-2ad-2cb-2bd,$$

$$\beta^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd-2ab-2ad-2bc-2cd,$$

$$\alpha^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ad+2cb-2ac-2ab-2cd-2db,$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

С другой стороны, получим

$$(a+b+c+d)^2=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Следовательно, первый коэффициент есть

$$A=3m^2-8n.$$

После выполнения расчетов для двух других коэффициентов получим уравнение

$$y^6-\left(3m^2-8n\right)y^4+3\left(m^4-16m^2n-16n^2+16mp-64q\right)y^2-\left(m^2-4m+8p\right)=0.$$

Для переменной $t=y^2$ мы получили квадратное уравнение с корнями t',t'',t'''.

Решения начального уравнения

$$\alpha = a - b + c - d = \sqrt{t'},$$
$$\beta = a - b - c + d = \sqrt{t''},$$
$$\gamma = a - c + b - d = \sqrt{t'''}$$

генерируют выражения

$$a = \frac{1}{4}\left(-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}\right), b = \frac{1}{4}\left(-m + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}\right),$$
$$c = \frac{1}{4}\left(-m - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''}\right), d = \frac{1}{4}\left(-m - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''}\right).$$

Их можно записать в матричном виде через антикватернионы:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \left\{ -m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{t'} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{t''} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{t'''} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты квадратного уравнения задают спектр значений величины m:

$$3m^2 - 8n = 0,$$
$$m^4 - 16m^2 n - 16n^2 + 16mp - 64q = 0,$$
$$m^2 - 4m + 8p = 0.$$

Так можно описывать классы алгебраических уравнений второго порядка, ассоциированные с уравнением четвертой степени. Ассоциативную связь алгебраических уравнений разных степеней можно рассматривать как самостоятельную задачу.

Восемь симметричных матриц

$$(\pm 1)\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

описывающих решения алгебраического уравнения четвертой степени в радикалах, задают группу. Это обстоятельство можно рассматривать в качестве «подсказки» для ответа на вопрос: имеет ли рассматриваемое уравнение решение в радикалах?

Резольвенты, дополненные выражениями, не зависящими от перестановки элементов

$$\sigma_0 = a+b+c+d,$$
$$\sigma_1 = a-b+c-d,$$
$$\sigma_2 = a-b-c+d,$$
$$\sigma_3 = a-c+b-d$$

можно представить группой, состоящей из антисимметричных матриц, задающих кватернион:

$$\begin{pmatrix}\sigma_0\\ \sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{pmatrix} = \left\{ a\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Специфика решения уравнений третьей степени методом Лагранжа.

Общее уравнение третьей степени

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

посредством преобразования $y = x - \frac{1}{3}\frac{b}{a}$ преобразуется к виду

$$x^3 + px + q = 0$$

с коэффициентами

$$p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}, q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}.$$

Функциональные условия для корней

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p,$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = q$$

дополнены условиями:

$$\sqrt{D} = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3) = x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 - x_1x_2^2 - x_2x_3^2 - x_3x_1^2,$$
$$\sigma_1\sigma_2 = x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2 + 3x_1x_2x_3 = 0,$$
$$\sigma_1^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\left(x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1\right) + 3\left(x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2\right).$$

Следуя методу Лагранжа, введем резольвенты

$$(1,x)=x_1+x_2+x_3=0,$$

$$(\rho,x)=x_1+\rho x_2+\rho^2 x_3,$$

$$(\rho^2,x)=x_1+\rho^2 x_2+\rho x_3.$$

По общей теории третья степень любого из этих элементов должна рационально выражаться через дискриминант $\sqrt{D}$ и $\sqrt{-3}$.

Имеем, например, выражение

$$(\rho,x)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\rho\left(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1\right)+3\rho^2\left(x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2\right),$$

$$\rho=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3},\rho\ \ =-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Из него следует связь

$$(\rho,x)^3=-\frac{27}{2}q+\frac{3}{2}\sqrt{-3}\sqrt{D}.$$

Аналогично получим

$$(\rho^2,x)^3=-\frac{27}{2}q-\frac{3}{2}\sqrt{-3}\sqrt{D}.$$

Эти формулы зависимы, так как

$$(\rho,x)(\rho^2,x)=\sigma_1^2-3\sigma_2=-3p.$$

По этой причине следует рассматривать три корня:

$$x_1=\frac{1}{3}\left((\rho,x)+(\rho^2,x)\right),$$

$$x_2=\frac{1}{3}\left(\rho(\rho,x)+\rho^2(\rho^2,x)\right),$$

$$x_3=\frac{1}{3}\left(\rho^2(\rho,x)+\rho(\rho^2,x)\right).$$

Мы получили выражение для корней в форме алгебраического матричного уравнения на симметрической группе S_3:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left\{ k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \rho(x) \\ 0 \\ \rho^2(x) \end{pmatrix},$$

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, kl = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, корни алгебраического уравнения могут быть представлены элементами алгебры, индуцированной некоторой группой. По этой причине возможно некоторое сопоставление каждой алгебре либо алгебраического уравнения, либо системы алгебраических уравнений.

Анализ алгебраических уравнений на основе структуры алгебры или алгебр, которые ассоциированы с уравнением, может быть отдельным направлением анализа. Не исключено, что этот подход имеет более широкую область применения, чем алгоритмы, основанные только на свойствах групп.

Изоморфизмы и автоморфизмы на примерах

Взаимно однозначное соответствие при отображении многообразий друг на друга со своими произведениями называется изоморфизмом. Он задается правилом

$$\varphi(x) \overset{1}{\times} \varphi(y) = \varphi\left(x \overset{2}{\times} y \right).$$

Пример:

$$G_1 \Rightarrow \{1, i, -1, -i\}, G_2 \Rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi \Rightarrow 1 \leftrightarrow I, i \leftrightarrow A, -1 \leftrightarrow B, -i \leftrightarrow C,$$

$$\varphi\left(i \overset{1}{\times} i \right) = \varphi(1) = I, \varphi(i) = A, \varphi(-i) = C, A \overset{2}{\times} C = I.$$

Первая группа основана на произведении чисел, вторая группа базируется на стандартном матричном произведении. Изоморфизм в указанной форме учитывает это обстоятельство.

Принятое в указанном порядке соответствие можно отобразить матрицей размерности 4 в форме

$$\varphi \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Она указывает, что первый элемент одной группы сопоставлен с первым элементом второй группы и аналогичная связь задана для других элементов. Совокупность матриц в форме единичных матриц есть группа по матричному произведению.

Аналогично изоморфизму можно определить автоморфизм, когда соответствие устанавливается между элементами одного множества с одной и той же операцией. Например, возможны автоморфизмы

$$\left\{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline I & A & B & C \\ \hline I & A & B & C \\ \hline\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline I & A & B & C \\ \hline I & B & A & C \\ \hline\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline I & A & B & C \\ \hline I & C & B & A \\ \hline\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline I & A & B & C \\ \hline I & A & C & B \\ \hline\end{array}\right\}.$$

Им сопоставлены матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Специфика групп гомологий

Рассмотрим три «точки» A, B, C, соединенные между собой линиями с длинами l_{AB}, l_{BC}, L_{CD} произвольной формы. Введем функцию суммирования структуры этого объекта:

$$\sigma_1 = l_{AB}(AB) + l_{BC}(BC) + l_{CA}(CA).$$

Введем «дифференциал» для структуры объекта в форме действия оператора δ на аргументы этой функции, принимающего разные знаки при действии на них. Например, получим

$$\delta\sigma_1 = l_{AB}(A-B) + l_{BC}(B-C) + l_{CA}(C-A).$$

Примем точку зрения, что оператор δ при действии на «точки» «ликвидирует» их:

$$\delta(\xi)=0,\xi\to A,B,C.$$

Поэтому $\delta^2\sigma_1=0$.

Первый дифференциал может обратиться в ноль, если равны длины сторон в рассматриваемом треугольнике:

$$l_{AB}=l_{BC}=l_{CA}.$$

Аналогично можно рассмотреть более сложные выражения. Например, рассмотрим объект, состоящий из трех треугольников, согласованных между собой. Зададим функцию суммирования его структуры

$$\sigma_2=s_{abc}(abc)-s_{cbd}(cbd)+s_{cea}(cea).$$

Рассмотрим дифференциал, учитывающий тот факт, что он «расщепляет» треугольники на стороны, зависит от пары «точек», что меняет его «поведение». Получим

$$\delta\sigma_2=s_{abc}(ab+bc+ca)-s_{cbd}(cb+bd+dc)+s_{cea}(ce+ea+ac).$$

Тогда второй дифференциал, действующий антисимметрично, обращается в ноль. Получим

$$\delta^2\sigma_2=s_{abc}(a-b+b-c+c-a)-s_{cbd}(c-b+b-d+d-c)+s_{cea}(c-e+e-a+a-c)\equiv 0.$$

Реальные и формальные признаки исследуемого объекта «перепутаны».

Рассмотрим вариант, когда $\delta\sigma_2=0$. В зависимости от того, как расставлены знаки, получатся три возможности

$$s_1+s_2-s_3=0,s_1+s_2-s_3=0,s_2+s_3-s_1=0.$$

Их можно представить несколькими способами в матричной форме:

$$\begin{pmatrix}-s_3 & s_2 & s_1\\ s_1 & -s_3 & s_2\\ s_2 & s_1 & -s_3\end{pmatrix}=-s_3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+s_2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+s_1\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}s_1 & s_2 & -s_3\\ s_2 & -s_3 & s_1\\ -s_3 & s_1 & s_2\end{pmatrix}=s_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+s_2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-s_3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & -s_3 \\ s_1 & s_2 & -s_3 \\ s_1 & s_2 & -s_3 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - s_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

Следовательно, одинаковые, с физической точки зрения, результаты могут быть представлены разными математическими структурами. В соответствии с этим можно получить разную информацию об одних и тех же объектах, учесть их «внутренние» возможности, скрытые при анализе ситуации на одной модели.

Первый набор матриц соответствует группе. Второй набор матриц соответствует дополнению указанной группы до полной симметрической группы S_3.

Функциональная компенсация «зеркальных» циклов на конформациях

Наличие матриц позволяет производить с ними некоторые действия, которые из одной матрицы генерируют систему матриц. Простой алгоритм генерации конформации из одной матрицы состоит в том, что значимые элементы переставляются на одно место влево или вправо от исходного значения.

В итоге будут получены системы, значимые элементы которых заполняют всё матричное пространство. Эти системы названы конформациями. Представляет интерес задача конструирования «зеркальных» конформаций, значимые элементы которых расположены зеркально относительно мест исходной конформации.

Рассмотрим свойства таких конформаций, добавив одно звено: поставим матрицам в соответствие определители этих матриц, полагая, что матрицы согласованы с набором величин, им сопоставленным.

Проиллюстрируем этот тезис примером на матрицах размерности 3.

α^3	β^3	γ^3
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
α	β	γ
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$-\alpha^3$	$-\beta^3$	$-\gamma$

.

Сумма указанных детерминантов матриц равна нулю. С аналогичной ситуацией мы имеем дело для матриц размерности 4.

Получим

α^4	$-\beta^4$	γ^4	$-\delta^4$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
α	β	γ	δ
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$-\alpha^4$	β^4	$-\gamma^4$	δ^4

.

Отсюда следуют законы:

$$\sigma_1 = \alpha^4 - \beta^4 + \gamma^4 - \delta^4, \sigma_2 = -\alpha^4 + \beta^4 - \gamma^4 + \delta^4,$$
$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0.$$

Правило, полученное нами, справедливо для категории разрешимых групп, которые рассмотрены нами. Эти законы антисимметричны. С физической точки зрения они принадлежат «электрическому» типу.

Следует ожидать законов «гравитационного» типа. На самом деле, это возможно. Для этого достаточно рассмотреть матрицы более высоких размерностей.

Например, получим

α^5	β^5	γ^5	δ^5	ε^5
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}$
α	β	γ	δ	ε
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\end{array}$
α^5	β^5	γ^5	δ^5	ε^5

.

$$\sigma_1 = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5, \sigma_2 = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5,$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 0.$$

Аналогичный закон «гравитационного» типа получится для матриц размерности 6.

Продолжение анализа для матриц более высокой размерности даёт такой результат: имеет место «цикл» законов. Зеркальные конформации размерности 7 подчинены закону размерности 3. Зеркальные конформации размерности 8 подчинены закону размерности 4. Зеркальные конформации размерности 9 подчинены закону размерности 5 и т.д.

Следовательно, есть пара моделей функциональной компенсации для зеркальных конформаций. У пары конформаций есть период по размерности с числом 4.

Конформационное расширение коммутативной группы

Обычно операция в группе характеризуется тем, что на её основе группа замкнута. Ситуация меняется, если имеется система операций. Они способны дополнять друг друга, что позволяет из одной конформации генерировать систему конформаций, которая может быть замкнута на несколько операций. По этой причине исследование конформаций неотделимо от решения вопросов расширения конформаций на основе системы операций. В частности, это могут быть операции суммирования мест значимых элементов, а также матричные и комбинаторные операции.

Примем модель, в которой система из 5 объектов, положительно влияющих друг на друга, превращается в коммутативную группу на матричной операции на основе операции сдвига значимых элементов.

Получим исходную систему матриц:

$$C_5 \Rightarrow \begin{array}{ccccc}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array}, &
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\end{array}, &
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array}, &
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array}, &
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}. \\
I, x_1 & a, s, x_2 & b, s^2, x_3 & c, s^3, x_4 & d, s^4, x_5
\end{array}$$

Проверка стандартных условий наличия коммутативной группы на матричной операции тривиальна.

Выполним расширение данной конформации, рассмотрев систему взаимных произведений данных элементов на основе операции суммирования по модулю числа 5 значимых мест элементов.

Получим три конформации:

$$Y_5 \Rightarrow \underset{I+s^4,t,y_1}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}}, \underset{s+s^4,s^3t,y_2}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array}}, \underset{I+s,st,y_3}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\end{array}}, \underset{I+s^2,s^4t,y_4}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array}}, \underset{I+s^3,s^2t}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array}}.$$

$$Z_5 \Rightarrow \underset{I+s+s^2,t^3,z_1}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array}}, \underset{I+s+s^3,s^3t^3,z_2}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}}, \underset{I+s+s^4,s^4t^3,z_3}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array}}, \underset{s+s^2+s^3,st^3,z_4}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\end{array}}, \underset{s+s^2+s^4,s^3t^3,z_5}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array}},$$

$$C_5^* \Rightarrow \underset{\substack{I+s+s^2+s^4\\ st^2,x_1^*}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array}}, \underset{\substack{I+s+s^3+s^4\\ s^4t^2,x_2^*}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array}}, \underset{\substack{I+s^2+s^3+s^4\\ s^3t^2,x_3^*}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}}, \underset{\substack{s+s^2+s^3+s^4\\ s^2t^2,x_4^*}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array}}, \underset{\substack{I+s+s^2+s^3\\ st^2,x_5^*}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\end{array}}.$$

С физической точки зрения такой подход означает, что из одного «материала» можно, применяя разные «инструменты» изготавливать разные изделия. Конечно, эти вопросы интересны с формальной точки зрения. Но они также важны для приложений, так как разным операциям можно сопоставить разные модели взаимодействий. Получение максимально полной системы операций позволит по-новому подойти к проблеме генерации материи и разных видов энергий, а также к проблеме эволюции и динамики объектов Вселенной.

Суммирование мест значимых элементов каждой из указанных конформаций по модулю размерности матриц генерирует единую матрицу

$$\underset{\sigma_4}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array}}.$$

В итоге мы получаем коммутативную группу на операции суммирования мест значимых элементов. Роль единичной матрицы в этом случае выполняет матрица σ_4. Группа содержит 21 элемент, представляющий собой произведение простых чисел $21 = 3 \cdot 7$. Группа из 5 элементов на матричной операции расширена до группы из 21 элемента на операции суммирования значимых мест. Применение к полученной новой системе матриц матричной операции генерирует дальнейшее расширение с появлением четырёх матриц:

$$\underset{\sigma_1}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\end{array}},\ \underset{\sigma_2}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array}},\ \underset{\sigma_3}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array}},\ \underset{\sigma_4}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}}.$$

Эти матрицы замкнуты также относительно операции суммирования значимых мест. Легко видеть, что есть также «замыкание» по комбинаторной операции произведения строк на строки. Обозначения, введенные выше, иллюстрируют пару операций: операцию суммирования по модулю размерности матриц мест значимых элементов, а также операцию матричного произведения базовых матриц s, t. Другими словами, одинаковые множества могут быть получены как на операции суммирования, так и на операции произведения.

Проиллюстрируем полученные совокупности матриц с физической точки зрения. Рассмотрим исходную конформацию

$$C_5 \Rightarrow \underset{I, x_1}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array}},\ \underset{a, s, x_2}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\end{array}},\ \underset{b, s^2, x_3}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array}},\ \underset{c, s^3, x_4}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array}},\ \underset{d, s^4, x_5}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}}.$$

Дополним её столбцы строками из 5 элементов $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$C_5 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\hline x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\hline x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\hline x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\hline x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\hline x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\\\hline\end{array}.$$

В соответствии с расположением значимых элементов в матрицах запишем функциональные «циклы» в форме пары произведений рядом расположенных элементов. Получим уравнения

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 = \theta,$$

$$x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 + x_1x_2 = \theta,$$

$$x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 = \theta,$$

$$x_4x_5 + x_5x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 = \theta,$$

$$x_5x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 = \theta.$$

Расположение элементов в этой системе уравнений соответствует структуре

$$C_5^* \Rightarrow \underset{x_1x_2}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array}}, \underset{x_2x_3}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array}}, \underset{x_3x_4}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}}, \underset{x_5x_4}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array}}, \underset{x_5x_1}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\end{array}}.$$

С конформацией

$$C_5^* \Rightarrow \underset{\substack{I+s+s^2+s^4\\ st^2,\, x_1^*}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array}}, \underset{\substack{I+s+s^3+s^4\\ s^4t^2,\, x_2^*}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array}}, \underset{\substack{I+s^2+s^3+s^4\\ s^3t^2,\, x_3^*}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}}, \underset{\substack{s+s^2+s^3+s^4\\ s^2t^2,\, x_4^*}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array}}, \underset{\substack{I+s+s^2+s^3\\ st^2,\, x_5^*}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\end{array}}$$

по указанному алгоритму ассоциирована *единая система* уравнений

$$x_1x_5 + x_5x_4 + x_4x_3 + x_3x_2 + x_2x_1 = \theta,$$
$$x_2x_1 + x_1x_5 + x_5x_4 + x_4x_3 + x_3x_2 = \theta,$$
$$x_3x_2 + x_2x_1 + x_1x_5 + x_5x_4 + x_4x_3 = \theta,$$
$$x_4x_3 + x_3x_2 + x_2x_1 + x_1x_5 + x_5x_4 = \theta,$$
$$x_5x_4 + x_4x_3 + x_3x_2 + x_2x_1 + x_1x_5 = \theta.$$

Расположение элементов в системе уравнений согласовано с конформацией

$$C_5 \Rightarrow \underset{x_1x_5}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline\end{array}},\ \underset{x_5x_4}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline\end{array}},\ \underset{x_4x_3}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline\end{array}},\ \underset{x_3x_2}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline\end{array}},\ \underset{x_2x_1}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\\hline\end{array}}.$$

Такая возможность ассоциирована со свойствами решения алгебраических уравнений в радикалах, рассматриваемых со стандартной точки зрения в рамках формализма Галуа. Алгебраические уравнения степени 5 классифицируются по своим решениям на основе данной пары конформаций и уравнений указанного вида. В расширенном варианте анализ базируется на полученной системе из 4 конформаций. Следовательно, модель конформаций может применяться в качестве «инструмента» для решения вопроса о разрешимости алгебраических уравнений с одной переменной в радикалах. Операция суммирования по модулю значимых мест эффективна для получения системы конформаций из одной базовой конформации.

Аналогично анализируются функциональные связи вида

$$x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_2 + x_2x_4 + x_4x_1 = \pi.$$

При анализе алгебраических уравнений степени 5, как известно, прежде всего требуется найти дискриминант уравнения. Если он не является полным квадратом, то группа Галуа либо совпадает с симметрической группой S_5, либо сопряжена с указанной выше системой, состоящей из 4 конформаций, которые можно обозначить B_5'. Величина $g = h^2$ «принадлежит» этой группе, если

$$h = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 - \left(x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_2 + x_2x_4 + x_4x_1\right).$$

Если дискриминант является полным квадратом, то группа Галуа сопряжена с одной из трёх групп:

$$C_5, B_5 = C_5 + C_5^*, A_5.$$

Величина A_5 обозначает знакопеременную группу. Группа B_5 называется метациклической. Все указанные группы разрешимы, что, по критерию Галуа, свидетельствует, что они имеют решение в радикалах. Конечно, его ещё надо найти.

Конформационный подход к структурному анализу проблемы разрешимости алгебраических уравнений прост и нагляден. Первичным элементом алгоритма является единичная матрица. С физической точки зрения она отображает систему объектов, формально объединенных между собой и подчиненных воздействию на себя. Так математически признается и описывается исходная *внутренняя функциональность* рассматриваемой системы объектов. Генерация конформации основана на механизме ближнего «замыкания» взаимных влияний в форме «глобального» сдвига значимых элементов по своей строке: первый объект влияет на второй, второй объект влияет на первый и т.д. Операцией другого типа в форме суммирования мест значимых элементов по модулю числа объектов (размерности матриц) реализуется расширение исходной конформации до системы конформаций.

Так коммутативная (абелева) конформация превращается в систему неабелевых конформаций, если подчинить её стандартной матричной операции. Другими словами, введение в практику работы с системой объектов новых операций способно изменить качество данной системы.

Принятый подход к системе конформаций позволяет рассматривать её элементы в качестве физических объектов. В данном случае это будут матрицы. Обозначим их буквами, стоящими под матрицами. Тогда на матричной операции генерируется система связей. Они характеризуют, прямо или косвенно, некоторые свойства взаимодействия в системе рассматриваемых объектов.

Заметим, что есть связь этих свойств с функциональными уравнениями, которые применяются при анализе вопросов разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Получим условия

$$\begin{aligned}
0&: x_1x_1^* + x_2x_2^* + x_3x_3^* + x_4x_4^* + x_5x_5^* = 5x_1^*,\\
1&: x_1x_2^* + x_2x_3^* + x_3x_4^* + x_4x_5^* + x_5x_1^* = 5x_2^*,\\
2&: x_1x_3^* + x_3x_5^* + x_5x_2^* + x_2x_4^* + x_4x_5^* = 5x_3^*,\\
3&: x_1x_4^* + x_4x_2^* + x_2x_5^* + x_5x_3^* + x_3x_1^* = 5x_4^*,\\
4&: x_1x_5^* + x_5x_4^* + x_4x_3^* + x_3x_2^* + x_2x_1^* = 5x_5^*.
\end{aligned}$$

Матричные уравнения указанного вида аналогичны тем уравнениям, которые применяются при анализе алгебраических уравнений, записанным для их корней. Цифра перед функциональным условием указывает на интервал между рассматриваемыми объектами по их «циклу». Имеют место новые функциональные связи:

$$x_1^*x_2 + x_2^*x_3 + x_3^*x_4 + x_4^*x_5 + x_5^*x_1 = x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* + x_5^*,$$

$$x_1x_2^*x_1 + x_2x_3^*x_2 + x_3x_4^*x_3 + x_4x_5^*x_4 + x_5x_1^*x_5 = x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* + x_5^*,$$

$$y_1x_2^* + y_2x_3^* + y_3x_4^* + y_4x_5^* + y_5x_1^* = 5z_2,$$

$$z_1x_2^* + z_2x_3^* + z_3x_4^* + z_4x_5^* + z_5x_1^* = 5y_2.$$

На данной стадии их трудно интерпретировать. Понятно только, что отношения между корнями алгебраического уравнения и некоторыми свойствами реальных объектов, представленных матрицами, могут быть разными. Связи не только инициируют взаимные отношения, но они их дополняют.

Системе конформаций присуща система нелинейных функциональных соотношений. Покажем некоторые из них:

$$\left(s^3t^3\right)\left(s^4t^2\right)=t,\left(s^3t^3\right)\left(s^3t^2\right)=s^3t,$$

$$\left(s^3t^2\right)\left(s^3t^3\right)=st,\left(s^3t^3\right)\left(st^2\right)=s^4t,\left(s^4t^2\right)\left(s^3t^3\right)=s^2t.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,\\
&ax^3+bx^2+cx+d+ex^4=0,\\
&ax^2+bx+c+dx^4+ex^3=0,\\
&ax+b+cx^4+dx^3+ex^2=0,\\
&a+bx^4+cx^3+dx^2+ex=0.
\end{aligned}$$

Она содержит не только исходное базовое уравнение, но и другие уравнения, которые следуют из расширенных алгебраических уравнений на исходных конформациях.

Рассмотрим две модели:

$$\left\{a\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}x^4\\x^3\\x^2\\x\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix},$$

$$\left\{a\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}x^4\\x^3\\x^2\\x\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}.$$

Они генерируют указанную систему уравнений. Просуммируем их. Получим

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Его можно рассматривать как конформационное следствие, основанное на возможности анализа исходного алгебраического уравнения как элемента более общей системы, базирующейся на конформационной алгебре указанного вида. Тогда получает новый «оттенок» известное условие Гаусса

$$x^5-1=(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)=0.$$

Круговой полином имеет систему корней. Корни, отличающиеся от единицы, задаются уравнением, следующим из конформационной алгебры. Рассматриваемое уравнение можно преобразовать к виду

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

При замене переменных $u=x+\frac{1}{x}$ получим $u^2+u-1=0\to u_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, корни рассматриваемого уравнения таковы:

$$\varepsilon_i, i=1,2,3,4\to x_{1,2}=\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}, x_{3,4}=-\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Основные свойства алгебраического уравнения второй степени

Примем точку зрения, что без уважения и внимания к простым результатам и фактам сложно или даже невозможно понять и принять сложные результаты и факты.

Желая понять и принять теорию решений алгебраических уравнений, следует сначала проанализировать «простейшие» варианты и возможности. Поэтому можно «начать» анализ с алгебраических уравнений второй степени. На основе простых преобразований они имеют несколько форм:

$$z=a\sigma^2+b\sigma+c, a\neq 0\to y=\frac{z}{a}\to y=\sigma^2+\beta\sigma+\gamma\to$$

$$\to x=-\sigma-\alpha\to\alpha=\frac{\beta}{2}, x^2+\hat{c}=0, \hat{c}=-\frac{\beta^2}{4}+\gamma,$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\gamma}, \sigma_{1,2}=-\frac{\beta}{2}\mp\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\gamma}.$$

Рассмотрим их с «физической» точки зрения. В этом подходе мы имеем дело с объектами, которые представляют собой согласованную систему. В системе присутствует элемент x, которому присуще самовоздействие согласно операции произведения. Другими словами, есть объект, способный на основе самовоздействия генерировать новый объект. Мы имеем дело с объектом с определенной способностью генерации, это аналог «живого» объекта. Уравнение, анализируемое нами, есть условие равновесия в системе, состоящей из 5 объектов: x, x^2, a, b, c. Объекты a, b, c естественно рассматривать в качестве условий существования для элементов x, x^2. Для этого следует принять факт взаимного «ощущения» в системе, представленной числами или какими-либо другими объектами. Более того, реализация равновесия обеспечивается, с формальной, визуальной, субъективной точки зрения, только условиями существования, элементами a, b, c. Понятно, конечно, что не последнюю роль играет операция суммирования. Условия равновесия не только структурны, они также операционны.

Задача нахождения корней анализируемого уравнения является частным случаем анализа кривой на плоскости, для которой мы ищем условия пересечения её к осью координат Ox. На уравнении канонического вида получаем три варианта решений. Они соответствуют уравнениям

$$x^2 - 1 = 0, x^2 = 0, x^2 + 1 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x_{1.2} = \pm 1, x_{1.2} = \pm 0, x_{1.2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Решения показывают, что есть скрытые условия существования. Они представлены в данном случае комплексной единицей. По этой причине решение более сложных задач с наличием системы генерируемых объектов следует рассматривать в пространстве параметров, которые «выходят за рамки» коэффициентов анализируемого уравнения. Эти условия желательно получить в общем виде, что будет реализовано далее.

С геометрической, наглядной точки зрения анализ представляет, соответственно, три возможные ситуации: кривая $y = f(x)$ пересекает ось координат Ox в двух точках, кривая касается оси координат, кривая не пересекает ось координат (есть «мнимые» точки). Все эти ситуации наглядны и полноценны с физической точки зрения. Аналогичные свойства, если принять аналогию, присущи алгебраическим кривым с высокими степенями.

С топологической точки зрения квадратное алгебраическое уравнение своими решениями «подсказывает», что анализируемые объекты имеют явные, «видимые» свойства, а также «скрытые» свойства, которые могут не проявлять себя на основе доступных условий существования. Это легко понять, заменив плоскую картину анализируемого явления на объемную картину. Примем точку зрения, что плоскость XY имеет обратную сторону. На видимой стороне располагаются «видимые», действительные числа. На «невидимой стороне» располагаются мнимые числа. Тогда понятно, что решения квадратного уравнения проявляют разные возможности условий существования: при одних условиях генерируются только действительные числа, при других условиях генерируются скрытые числа. Этот фундаментальный факт интересен в разных аспектах и проявлениях. Ведь аналогично реализуются действия и поведения людей, а также реализуются и проявляются их Чувства и Сознание.

Известные решения уравнения $\sigma^2 + \beta\sigma + \gamma = 0$ по формуле Виета

$$\sigma_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

генерируют детерминант, который следует из преобразования к канонической форме уравнения, представленного в общем виде, задавая свободную переменную $\hat{c} = -\frac{\beta^2}{4} + \gamma$. Следовательно, элементы решения алгебраического уравнения могут присутствовать в модели рациональных преобразований этих уравнений. С другой стороны, рассматриваемая величина, называемая дискриминантом, получается в форме разности двух корней уравнения

$$\Lambda_2 = \sigma_1 - \sigma_2 = 2\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \gamma} = \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}.$$

Данное условие легко обобщается на случай алгебраических уравнений высших порядков, генерируя произведение разностей корней, последовательно следующих друг за другом

$$\Lambda_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3), \ldots$$

Дискриминант антисимметричен по перестановке корня местами (меняет знак). Его легко вычислить, если корни известны. Однако, следуя анализу Гаусса, симметричные функции можно выразить через основные симметричные функции, которые получаются при суммировании корней и их произведений. Для уравнения второго порядка основные симметричные функции таковы:

$$x_1 + x_2 = -a, x_1 \cdot x_2 = b.$$

Они следуют из разложения уравнения на множители

$$x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2.$$

Из этих условий следует, что

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 =$$

$$= a^2 - 4b \to \beta^2 - 4\gamma.$$

Тогда

$$x_1 + x_2 = -a, x_1 - x_2 = \sqrt{a^2 - 4b} \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Так на простом примере иллюстрируется закон Виета.

Дискриминант алгебраического уравнения можно рассматривать как фундаментальную связь условий, которым подчинены независимая переменная и её целые степени. Свободная переменная, относительно которой группируются корни уравнения, в данном случае получается суммированием корней. Условие их равенства можно трактовать как фундаментальное свойство корней квадратного уравнения: оба корня «начинаются» в равной мере с одного значения, ассоциированного с числом, на которое умножена независимая переменная. Естественно ожидать, что для уравнений более высокого порядка «опорная точка» может функционально зависеть от всех чисел, которые предшествуют старшему члену уравнения и ассоциированы с их степенями от рассматриваемого неизвестного. Поскольку число таких неизвестных равно порядку уравнения, будет иметь место некоторая «картина распределения» опорных точек, а также соответствующих функциональных зависимостей.

Заметим, что поскольку рассматривается простая система, не исключена, а, более того, из общих соображений о переходе количества в качество, ожидается возможность дополнения найденных свойств новыми свойствами. Они могут иметь также некоторую периодичность по своим внешним и внутренним проявлениям.

Каноническая форма уравнения $x^2 + ax + b = 0$ содержит перед первым элементом число единицу. Их система на операции произведения образует группу.

Принимая условие функциональной аналогии коэффициентов, мы вправе ожидать, что другие коэффициенты, рассматриваемые совместно и согласованно с единицей, также образуют группу. Если это так, то условие равновесия, рассматриваемое в форме алгебраического уравнения, есть условие на элементы группы. Кроме этого, представляется естественным рассматривать независимую переменную и её степени как элементы группы. В этом случае, естественно, симметрические функции «подсказывают» фундаментальное свойство системы корней: есть функциональные зависимости между корнями, которые остаются неизменными при взаимной перестановке корней. Симметрические функции гарантируют «сохранение» коэффициентов уравнения. Следовательно, они есть законы сохранения для алгебраических уравнений с целыми степенями.

Если принять дополнительные условия на систему корней, они ограничат возможности в системе перестановок этих корней, выделяя, возможно некоторую подгруппу в полной группе перестановок. Понятно, что условия могут быть либо совместимы с группой перестановок, либо несовместимы с ней. Решение уравнений в радикалах есть дополнительное условие. Оно алгоритмически может быть реализовано на основе некоторых симметрических функций, так как допустимо их выражение через основные симметрические функции, а потому и через коэффициенты уравнения. Однако «скрытость» решений предполагает также рассмотрение дополнительных величин, от которых зависит или может зависеть решение уравнений в некоторой предполагаемой форме.

Естественно возникает вопрос: из каких соображений, и каким образом можно получить дополнительные величины?

Для ответа на него примем точку зрения, что следует анализировать более общую систему: систему, в которой коэффициенты уравнения могут меняться циклическим образом. Мы реализуем таким образом расширение спектра возможностей отдельного уравнения. Это расширение может иметь формальный характер. Но может быть и другой ответ: так учитывается новое глубинное, фундаментальное свойство отдельного уравнения всегда чувствовать систему уравнений, которой оно принадлежит.

В определенном смысле мы так пытаемся учесть не все свойства уравнения второго порядка при данных условиях «существования», а только некоторый их класс, реализующийся при циклической перестановке коэффициентов.

В анализируемом случае из уравнения второго порядка следуют две системы уравнений:

$$\begin{aligned} &ax^2+bx+c=0,\\ &cx^2+ax+b=0,\\ &bx^2+cx+a=0,\\ &ax^2+bx+c=0,\\ &bx^2+cx+a=0,\\ &cx^2+ax+b=0. \end{aligned}$$

Представим их в алгебраической форме:

$$\left\{a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x^2\\x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\left\{a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x^2\\x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

В системе уравнений естественно «заложена» симметрическая группа S_3. Это обстоятельство дополнительно указывает на потребность и необходимость применения групповых свойств при анализе алгебраических уравнений.

Просуммируем анализируемые уравнения. Из каждой тройки получим

$$(a+b+c)\left(x^2+x+1\right)=0 \Rightarrow \left(x^2+x+1\right)=0.$$

Первая система уравнений генерируется нормальной подгруппой группы перестановок из 3 элементов. Вторая система генерируется абелевым фактором группы перестановок из трех элементов. В данном случае эти три элемента есть система коэффициентов, задающая условия существования независимых переменных и их второй степени.

Мы видим, что предложенная система уравнений естественно генерирует аналог уравнения Гаусса для кругового полинома третьего порядка

$$\left(x^3-1\right)=(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0.$$

Другими словами, скрытые свойства уравнения проявляют себя через свойства системы коэффициентов, генерирующих другие уравнения в форме системы, частью которой является анализируемое уравнение.

Уравнение $x^2+x+1=0$ даёт два корня алгебраического уравнения третьей степени в форме выражений, опорное значение корней равно половине коэффициента, стоящего перед независимой переменной

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, алгебраическое уравнение второй степени фундаментально согласовано со свойствами алгебраических уравнений предыдущей и последующей степени. Это свойство также является общим для алгебраических уравнений других степеней.

Представим теперь пару исходных уравнений, разлагая их на множители, через их корни. Получим известные условия

$$z_1+z_2=0 \to x_1+x_2=-\beta,$$

$$z_1 \cdot z_2=\hat{c} \to x_1 \cdot x_2=\gamma.$$

Специфика их в том, что они указывают на возможность анализа связей между корнями на более сложных или более «простых» уравнениях.

Заметим, что связи между корнями можно представить в матричном виде:

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}x_2\right\}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=0,$$

$$\left\{x_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}x_2\right\}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}-\gamma\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=0.$$

Следовательно, корни уравнения второй степени подчинены групповой алгебре с группой перестановок 2 элементов. Подгрупп у такой группы нет. Поэтому можно предположить, что решения алгебраических уравнений в радикалах базируется на свойствах корней, которые генерируют алгебру некоторой простой группы. Последующий анализ показал, что эта «подсказка» эффективна для ответа на вопрос: какие алгебраические уравнения могут быть решены в радикалах.

В рассматриваемом случае группа состоит из двух элементов

$$G\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Такова группа Галуа алгебраического уравнения второй степени.

Не следует думать, что нахождение корней и их свойств, равно как и исследование условий, при которых это возможно, «исчерпывает» все стороны и свойства алгебраического уравнения.

Из рассмотрения выпадают общие свойства кривых второго порядка, что представляет собой самостоятельную задачу. Кроме этого, имеются новые возможности, генерируемые рассмотрением системы уравнений. Покажем это.

Рассмотрим определитель системы уравнений:

$$Det\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}=a\left(a^2-bc\right)-b\left(ac-b^2\right)+c\left(c^2-ab\right)=a^3+b^3+c^3-3abc=\Omega.$$

Коэффициенты расширенной системы уравнений подчинены известному условию для уравнений третьего порядка на проективной плоскости. Следовательно, есть связь алгебраических уравнений с объектами, «живущими» в проективном пространстве. Мы имеем дело с «кубикой», на которой можно ввести группу.

Дополнительные свойства мы получаем, допуская частичное изменение коэффициентов исходного уравнения. Например, рассмотрим модель

$$\left\{a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x^2\\ x\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Эти элементы выходят «за границы» группы перестановок.

Полином коэффициентов получает вид

$$Det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = b^3 + a^2\left(c-b\right) + c^2\left(a-b\right) - abc.$$

На этом основании можно ввести систему преобразования коэффициентов, которая не является циклической. Они не исчерпывают всех возможностей. Реально так рассматриваются преобразования, которые выходят за рамки группы преобразований. Допускается объединение объектов в форме их расположения «в одной ячейке», что ассоциировано с кратными корнями.

В частности, получим модели

$$1\to\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}, 2\to\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}, 3\to\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ a & c & b \end{pmatrix}, 4\to\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, 5\to\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix}, 6\to\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Они представлены конформациями, между которыми есть связи. Таковы определители этих матриц, в сумме компенсирующие друг друга:

$$Det\left(3\right) = c^3 + a^2\left(b-c\right) + b^2\left(a-c\right) - abc = -Det\left(1\right),$$

$$Det\left(2\right) = b^3 + a^2\left(c-b\right) + c^2\left(a-b\right) - abc = -Det\left(4\right),$$

$$Det\left(6\right) = a^3 + b^2\left(c-a\right) + c^2\left(b-a\right) - abc = -Det\left(5\right).$$

Их можно рассматривать как предкубики, потому что 2 суммы троек дают 2 кубики:

$$\begin{gathered} Det\left(6\right) + Det\left(2\right) + Det\left(3\right) = \\ = a^3 + b^2\left(c-a\right) + c^2\left(b-a\right) - abc + \\ + b^3 + a^2\left(c-b\right) + c^2\left(a-b\right) - abc + \\ + c^3 - a^2\left(c-b\right) - b^2\left(c-a\right) - abc = \Omega. \\ \Omega = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc. \end{gathered}$$

Есть связи системы алгебраических кривых с неассоциативными моделями. Мы знаем, что кубика ассоциирована с группой перестановок 3 элементов на стандартной матричной операции. Матричная операция в данном случае замыкает множество на себя ассоциативным способом. Ситуация меняется, если применить другие операции. В частности, применим к данной матричной группе комбинаторную операцию произведения строк на строки. Прямым расчетом убеждаемся в том, что данная операция реализует расширение исходного множества. Получим неассоциативную систему, состоящую из 9 матриц:

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, [1]=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, [2]=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, [3]=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$d=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, e=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, f=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Она подчинена некоммутативной, неассоциативной таблице:

$\overset{k}{\times}$	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f
a	$[1]$	$[3]$	$[2]$	a	c	b	d	f	e
b	$[2]$	$[1]$	$[3]$	b	a	c	e	d	f
c	$[3]$	$[2]$	$[1]$	c	b	a	f	e	d
$[1]$	d	f	e	$[1]$	$[3]$	$[2]$	a	c	b
$[2]$	e	d	f	$[2]$	$[1]$	$[3]$	b	a	c
$[3]$	f	e	d	$[3]$	$[2]$	$[1]$	c	b	a
d	a	c	b	d	f	e	$[1]$	$[3]$	$[2]$
e	b	a	c	e	d	f	$[2]$	$[1]$	$[3]$
f	c	b	a	f	e	d	$[3]$	$[2]$	$[1]$

.

Выполним суммирование указанных элементов на основе операции суммирования мест значимых элементов в строках при анализе сумм по модулю числа, равного размерности матриц. Получим таблицу:

$\overset{m}{+}$	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f
a	e	f	d	b	c	a	$[2]$	$[3]$	$[1]$
b	f	d	e	c	a	b	$[3]$	$[1]$	$[2]$
c	d	e	f	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[1]$	b	c	a	$[2]$	$[3]$	$[1]$	e	f	d
$[2]$	c	a	b	$[3]$	$[1]$	$[2]$	f	d	e
$[3]$	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f
d	$[2]$	$[3]$	$[1]$	e	f	d	b	c	a
e	$[3]$	$[1]$	$[2]$	f	d	e	c	a	b
f	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f	a	b	c

.

Анализируемая система конформаций замкнута относительно комбинаторной операции по строкам матриц и относительно операции суммирования значимых мест по модулю размерности матриц. Легко показать систему законов, которым она подчинена. Среди законов есть структурно зеркальный и операционно анти зеркальный закон:

$$b\overset{m}{+}\left(a\overset{k}{\times}b\right)=\left(b\overset{m}{+}a\right)\overset{k}{\times}b.$$

Он выполняется в обычном числовом множестве со стандартными операциями произведения и суммирования только для чисел 0,1 и для числа, равного бесконечности.

В рассматриваемом случае он выполняется для более широкого набора и справедлив для любой конечной размерности.

Заметим, что найденное свойство вытекает из анализа конформаций, ассоциированных с перестановкой коэффициентов алгебраического уравнения второго порядка. Следовательно, данное уравнение имеет скрытые свойства. Более того, эти свойства таковы, что расширяется концепция поля, так как система матриц некоммутативна и неассоциативна.

Проанализируем закон вида

$$a^3+b^3+c^3-3abc=[3].$$

Поскольку

$$a^3=b^3=c^3=[1],-[3]=[3],$$

$$[1]+[1]+[1]=[3],[2]+[2]+[2]=[3],[3]+[3]+[3]=[3],-[3]=[3],$$

требуется выполнение условий

$$abc=[\xi],\xi=1,2,3.$$

Они очевидны, если элементы равны. Они справедливы, если для элементов одного класса выбирается

$$c=ba\to abc=(ab)(ba).$$

Поскольку анализируемое условие есть условие «равновесия» в системе объектов, мы замечаем пару законов на данной системе операций:
а) равновесна «тройка», состоящая из одинаковых объектов,
б) равновесна «тройка», в которой к паре ab , принадлежащей одному классу, присоединен объект $c=ba$.

Есть также закон равновесия вида

$$\overset{k}{\xi}\times\overset{m}{\eta+\eta}\times\overset{k}{\xi}=[\theta],\theta=1,2,3.$$

Тот факт, что неассоциативность в этой модели имеет место для любой конечной размерности матриц, не позволяет установить влияние и роль неассоциативности в проблеме нахождения решений в радикалах. Ситуация имеет общие свойства. Они аналогичны общим свойствам основных симметрических функций. Поэтому следует ожидать, что есть некоторые функциональные свойства рассматриваемых систем, которые выполняются для уравнений, разрешимых в радикалах и не выполняются в других случаях. Может быть также обратная ситуация.

Проанализируем функциональные законы анализируемого множества. В качестве базовой функции применим выражение

$$f(x,y,z)=x(yz)+y(zx)+z(xy).$$

Выполняется «зеркальный» по аргументам закон

$$f(x,y,z)=f(z,y,x).$$

Например, получим

$$f(a,b,f)=a(bf)+b(fa)+f(ab)=af+bc+f[3]=e+[3]+d=c,$$

$$f(f,b,a)=f(ba)+b(af)+a(fb)=f[2]+be+ab=e+d+[3]=c...$$

Определим систему функции:

$$\varphi(x,y,z)=f(xy,yz,zx),$$
$$\psi(x,y,z)=f(xyz,yzx,zxy),$$
$$\pi(x,y,z)=f(x+y,y+z,z+x).$$

Они подчинены законам:

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(z,y,x),$$
$$\psi(x,y,z)=\psi(z,y,x),$$
$$\pi(x,y,z)=\pi(z,y,x).$$

Следовательно, неассоциативное, некоммутативное множество имеет систему законов, которые не выполняются в ассоциативных множествах и которые достаточно необычны.

Например, получим закон

$$x \times y + y \times x = [2].$$

С физической точки зрения практическая реализация найденных законов «равновесия» предполагает наличие системы внутренних свойств анализируемых объектов, представленных нами матрицами и парой операций. Заметим, что рассматриваемое конечное множество имеет частные законы, справедливые для трёх объектов. Например, есть законы:

$$x(yz)(zy)x + y(zx)(xz)y + z(xy)(yx)z = xy + yz + zx,$$

$$(xyz)x + (yzx)y + (zxy)z = x + y + z,$$

$$x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = x + y + z + xy + yz + zx =$$

$$= (xyz)x + (yzx)y + (zxy)z + x(yz)(zy)x + y(zx)(xz)y + z(xy)(yx)z.$$

Анализ показал, что 4-циклы имеют систему свойств. В частности, имеем условие

$$xyzt + yztx + ztxy + txyz = tzyx + zyxt + yxtz + xtzy.$$

В этом случае меняется в обратном «прочтении» порядок элементов, генерируемых каждой четверкой элементов:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \delta + \gamma + \beta + \alpha.$$

По аналогии с едиными уравнениями электромагнетизма и гравитации, а также с функциональными условиями когомологий Хохшильда получим условие

$$\tau(x, y, z, t) = xyf(z, t) + yzf(t, x) + ztf(x, y) + txf(y, z) = \hat{0} = [3],$$

$$f(\alpha, \beta) = \alpha\beta + \beta\alpha.$$

Это функциональное условие требуется полиномиально усложнить:

$$3\tau(x, y, z, t) = \tau^3(x, y, z, t),$$

если функцию определить условием $f(\alpha, \beta) = \alpha\beta - \beta\alpha.$

Моделирование группы перестановок

Группа перестановок задается системой мономиальных матриц, согласно структуре которых в каждой строке и каждом столбце есть один значимый элемент, равный единице. Подходы для решения этой задачи могут быть разными. Однако алгоритм един для матриц разной размерности. Из модели конструирования группы перестановок можно сделать ряд заключений о свойствах анализируемых матриц и системы матриц. Сравнение разных алгоритмов конструирования может оказаться полезным с физической точки зрения, если анализируемых матрицам можно поставить в соответствие некоторые физические объекты, а операциям произведения можно сопоставить физические взаимодействия.

Эти матрицы размерности 4 проще всего сконструировать из 9 матриц, в которых есть один значимый элемент в первой строке или в первом столбце. Другие матрицы получаются на основе матричного произведения этих исходных матриц. Имеем таблицу значений, из которой следует на основе операции суммирования любая матрица:

$$x_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad x_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad x_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad x_{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$x_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad x_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad x_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad x_{24}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$x_{31}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad x_{32}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad x_{33}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad x_{34}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$x_{41}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad x_{42}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad x_{43}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad x_{44}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Обозначения матриц, полученных произведением элементов первого столбца на элементы первой строки, следуют на основе компенсации внутренних индексов для системы последовательно расставленных индексов исходных матриц. Матрицы группы перестановок в данном случае имеют базис размерности $7=1+2\cdot 3$. Общая формула для любого мономиального элемента образована почти единым образом: суммированием элементов из первой строки и первого столбца, и пары произведений исходных элементов.

Ситуация меняется, если принять модель, согласно которой есть некоторые переменные $s_1, s_2, \ldots s_n$, а также их композиции

$$s_1 s_2,\, s_1 s_2,\, \ldots s_1 s_n,\, s_2 s_3,\, s_2 s_4,\, \ldots s_2 s_n,\, \ldots s_{n-1} s_n,$$
$$s_1 s_2 s_3,\, s_1 s_2 s_3,\, \ldots s_{n-2} s_{n-1} s_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_1 s_2 s_3 \ldots . s_n.$$

Рассмотрим алгоритм конструирования с переменными и их степенями:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underset{x_1 x_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(x_1 x_2)^2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{x_1 x_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(x_1 x_3)^2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_1 x_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(x_1 x_4)^2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{x_2 x_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(x_2 x_3)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_2 x_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(x_2 x_4)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{x_3 x_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(x_3 x_4)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_1 x_2 x_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(x_1 x_2 x_3)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(x_1 x_2 x_3)^3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{x_1 x_2 x_4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(x_1 x_2 x_4)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(x_1 x_2 x_4)^3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}},$$

$$\begin{matrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\\ x_1x_3x_4 & (x_1x_3x_4)^2 & (x_1x_3x_4)^3 & x_2x_3x_4 & (x_2x_3x_4)^2 & (x_2x_3x_4)^3\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.\\ x_1x_2x_3x_4 & (x_1x_2x_3x_4)^2 & (x_1x_2x_3x_4)^3 & (x_1x_2x_3x_4)^4\end{matrix}$$

Они «проясняют» структуру матриц группы перестановок из 4 элементов. Получим аналитические выражения с двойными или тройными «циклами»:

$$(x_1x_2)^2+(x_3x_4)^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=a_1,\quad x_1x_2+x_3x_4=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=a_2,$$

$$x_1x_3+x_2x_4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=a_3,\quad x_1x_4+x_2x_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=a_4,$$

$$x_1+x_2x_3x_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}=e_1,\quad x_3+x_1x_2x_4=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=e_2,$$

$$x_4+(x_1x_2x_3)^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=e_3,\quad x_2+(x_1x_3x_4)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=e_4,$$

$$x_1+(x_2x_3x_4)^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=f_1,\quad x_4+x_1x_2x_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=f_2,$$

$$x_2 + x_1x_3x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = f_3, x_3 + \left(x_1x_2x_4\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = f_4.$$

Они задают нормальную подгруппу группы перестановок 4 элементов. Все рассматриваемые подстановки четные.

Другие элементы группы подстановок из четырех элементов получаются по более сложным алгоритмам:

$$b_1 = x_1 + x_3 + x_2x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = x_1x_2x_3x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = x_2 + x_4 + x_1x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b_4 = \left(x_1x_2x_3x_4\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = x_1 + x_4 + x_2x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c_2 = x_1\left(x_1x_2\right) + x_2\left(x_2x_4\right) + x_3\left(x_3x_1\right) + x_4\left(x_4x_3\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c_3 = x_1\left(x_1x_3\right) + x_2\left(x_2x_1\right) + x_3\left(x_3x_4\right) + x_4\left(x_4x_2\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_4 = x_1x_4 + (x_2x_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d_1 = x_3x_4 + x_1x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, d_3 = x_1\left(x_1x_3\right) + x_2\left(x_2x_4\right) + x_3\left(x_3x_2\right) + x_4\left(x_4x_1\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d_2 = x_1x_2 + x_3x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d_4 = x_1\left(x_1x_4\right) + x_2\left(x_2x_3\right) + x_3\left(x_3x_1\right) + x_4\left(x_4x_2\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложенная модель иллюстрирует некоторые функции, прямо или косвенно ассоциированные с анализируемыми алгебраическими уравнениями.

С аналогичной ситуацией мы имеем дело при анализе группы перестановок из 5 элементов. В новой модели получим систему матриц:

$$\underset{x_1}{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_2}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_3}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_4}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_5}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_1x_2=x_2x_1}{\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_1x_3=x_3x_1}{\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_1x_4=x_4x_1}{\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_1x_5=x_5x_1}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_2x_3=x_3x_2}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_2x_4=x_4x_2}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_2x_5=x_5x_2}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_3x_4=x_4x_3}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_3x_5=x_5x_3}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_4x_5=x_5x_4}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},$$

Эти матрицы «зеркальны» относительно главной диагонали. Их квадраты дают матрицы с парой элементов, расположенных на главной диагонали.

Сложнее «ведут себя» матрицы с тремя значимыми элементами

$$\underset{x_1x_2x_3}{\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{(x_1x_2x_3)^2}{\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{(x_1x_2x_3)^3}{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_1x_2x_4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_2x_4\right)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_2x_4\right)^3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_1x_2x_5}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_2x_5\right)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_2x_5\right)^3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_1x_3x_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_3x_4\right)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_3x_4\right)^3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_1x_3x_5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_3x_5\right)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_3x_5\right)^3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_1x_4x_5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_4x_5\right)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_4x_5\right)^3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_2x_3x_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_2x_3x_5\right)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_2x_3x_5\right)^3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_2x_3x_5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_2x_3x_5\right)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_2x_3x_5\right)^3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_2x_4x_5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_2x_4x_5\right)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_2x_4x_5\right)^3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_3x_4x_5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_3x_4x_5\right)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_3x_4x_5\right)^3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Матрицы с четырьмя элементами переводят значимые элементы на главную диагональ при возведении в четвертую степень:

$$\underset{x_1x_2x_3x_4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_2x_3x_4\right)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_2x_3x_4\right)^3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\left(x_1x_2x_3x_4\right)^4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_1x_2x_3x_5}{\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_2x_3x_5\right)^2}{\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_2x_3x_5\right)^3}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_2x_3x_5\right)^4}{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_1x_2x_4x_5}{\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_2x_4x_5\right)^2}{\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_2x_4x_5\right)^3}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_2x_4x_5\right)^4}{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_1x_3x_4x_5}{\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_3x_4x_5\right)^2}{\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_3x_4x_5\right)^3}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_3x_4x_5\right)^4}{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}},$$

$$\underset{x_2x_3x_4x_5}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_2x_3x_4x_5\right)^2}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_2x_3x_4x_5\right)^3}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_2x_3x_4x_5\right)^4}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}}.$$

Матрица с пятью элементами превращается в матрицу с диагональными элементами при возведении её в пятую степень:

$$\underset{x_1x_2x_3x_4x_5}{\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_2x_3x_4x_5\right)^2}{\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_2x_3x_4x_5\right)^3}{\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_2x_3x_4x_5\right)^4}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}},\underset{\left(x_1x_2x_3x_4x_5\right)^5}{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}}.$$

Есть система алгебраических соотношений между данными элементами, которые в сумме дают единичную матрицу.

Фактически мы имеем дело с системой конформаций. Их свойства в представленном виде не имеют функционального выражения. Непонятна их роль в структуре алгебраических уравнений и их решений. Не указана их связь с другими подходами по конструированию математических моделей и структуре их внешних и внутренних свойств. Однако уже теперь ясно, что структура и сущность математических свойств конформаций не так проста, как кажется на первый взгляд. Суть дела не только в том, что возможно разделение матриц на четные и нечетные перестановки. Ситуация выглядит иначе с физической точки зрения: разные матрицы могут по-разному конструироваться из «подготовительных» матриц. Суперпозиция свойств матриц и подматриц может рассматриваться как совокупность внутренних свойств матриц. В определенном смысле можно говорить о предистории матриц. Тогда внешний анализ уравнений нужно дополнить внутренним анализом.

О разрешимости в радикалах алгебраического уравнения порядка 5

Феррари в 1545 году предложил рассматривать общее алгебраическое уравнение степени 4 как элемент однопараметрической системы уравнений. Накладывая дополнительные условия на этот параметр, можно превратить решаемое уравнение в более простое. Соотношение уравнений имеет такую форму

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\to\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{a^2}{4}-\lambda+b\right)x^2+\left(\frac{a}{2}\lambda-c\right)x+\left(\frac{\lambda^2}{4}-d\right)\right]=0.$$

Параметр подбирается таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках было полным квадратом. Оно получается, если дискриминант квадратного уравнения в скобках равен нулю:

$$\left(\frac{a}{2}\lambda-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-\lambda+b\right)\left(\frac{\lambda^2}{4}-d\right)=0.$$

Это вспомогательное уравнение называется резольвентой. Заметим, что так можно решить не любое уравнение. В частности, этим способом не решается неразложимое уравнение

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Метод Феррари «подсказывает» модель представления общего алгебраического уравнения степени 5 в форме произведения линейного множителя и уравнения степени 4.

Получим систему соответствий:

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=\left(\alpha^{-1}x+1\right)\left(\sigma_4x^4+\sigma_3x^3+\sigma_2x^2+\sigma_1x+\sigma\right)=$$

$$=\alpha^{-1}\sigma_4x^5+\left(\alpha^{-1}\sigma_3+\sigma_4\right)x^4+\left(\alpha^{-1}\sigma_2+\sigma_3\right)x^3+\left(\alpha^{-1}\sigma_1+\sigma_2\right)x^2+\left(\alpha^{-1}\sigma+\sigma_1\right)x+\sigma,$$

$$\alpha^{-1}\sigma_4=a,\alpha^{-1}\sigma_3+\sigma_4=b,\alpha^{-1}\sigma_2+\sigma_3=c,\alpha^{-1}\sigma_1+\sigma_2=d,\alpha^{-1}\sigma+\sigma_1=e,\sigma=f,$$

$$\sigma_4=a\alpha,\sigma_3=b\alpha-a\alpha^2,\sigma_2=c\alpha-b\alpha^2+a\alpha^3,\sigma_1=d\alpha-c\alpha^2+b\alpha^3-a\alpha^4,$$

$$\sigma=e\alpha-d\alpha^2+c\alpha^3-b\alpha^4+a\alpha^5=f.$$

Предложенный прием генерирует систему функций:

$$\begin{gathered}ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0,\\ a\alpha^5-b\alpha^4+c\alpha^3-d\alpha^2+e\alpha-f=0.\end{gathered}$$

Просуммируем и вычтем эти уравнения. Получим систему уравнений

$$\begin{gathered}ax^5+cx^3+ex=\left(ax^4+cx^2+e\right)x=0,\\ bx^4+dx^2+f=0.\end{gathered}$$

Уравнения совместны, если выполнены условия

$$\frac{c}{a}=\frac{d}{b},\frac{e}{a}=\frac{f}{b}\to cb=ad,eb=af.$$

Им сопоставлены две графические диаграммы:

●	*	*	●	○	○
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*

,

●	*	○	○	*	●
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*

.

Следовательно, решение общего уравнения степени 5 в радикалах возможно, если определенным образом подобраны коэффициенты.

Результат интересен с физической точки зрения: он косвенно свидетельствует о возможности создания устойчивых изделий при определенной пропорции составляющих, из которых образовано это изделие. Другими словами, решения в радикалах есть косвенное подтверждение устойчивости физических объектов определенного типа: в рассматриваемом случае при самогенерации и дополнительных условиях, устанавливаемых коэффициентами алгебраического уравнения. Следовательно, элементы неустойчивости физических систем имеют место всегда и везде при порядке генерации объектов с числом более 4. В простейшем случае речь может идти о структуре и динамике семьи. Этому закону могут подчиняться идеи и решения, генерируемые отдельным объектом.

При конструировании симметричных функций для нахождения решений алгебраических уравнений могут также применяться геометрические аналогии. Например, при решении уравнений порядка 4 применяются функции от корней, допускающие эти аналогии:

$$\theta_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \to \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \circ & \circ \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \end{array},$$

$$\theta_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \to \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \circ & \bullet & \circ \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \end{array},$$

$$\theta_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) \to \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \circ & \circ & \bullet \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \end{array}.$$

Иллюстрация идеи Галуа на примерах

Рассмотрим уравнение степени 4, корни которого известны:

$$(x^2 - 5)^2 - 24 = 0,$$
$$a = \sqrt{2} + \sqrt{3}, b = \sqrt{2} - \sqrt{3}, c = -\sqrt{2} + \sqrt{3}, d = -\sqrt{2} - \sqrt{3},$$
$$a + b \neq 0, a + c \neq 0, a + d = 0, b + c = 0, b + d \neq 0, c + d \neq 0.$$

Рассмотрим перестановки элементов, которые сохраняют эти функциональные связи:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перестановки представлены матрицами, которые содержат значимый элемент в форме числа 1 на том месте, которое обозначается второй строкой перестановки. В данном случае получена четверная группа Клейна, которая является подгруппой знакопеременной группы перестановок из 4 элементов.

Так можно конструировать группу Галуа на основе модели перестановок, если корни анализируемого алгебраического уравнения известны.

Решение уравнения степени 4, не зная корней, следуя изложению Вардена, можно искать на основе исходного выражения вида

$$\theta_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4).$$

Оно не меняется при перестановках, указанных выше, а также при перестановках, задаваемых матрицами

$$(12) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (34) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (1324) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (1423) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако их не «поддерживают» выражения

$$\theta_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4), \theta_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3).$$

Четверной группы Клейна достаточно для всей тройки рассматриваемых величин. В то же время матрицы группы перестановок «подсказывают» структуру симметричных выражений, которые можно использовать для решения данного алгебраического уравнения. Один из вариантов состоит в том, что первый элемент последовательно объединяется с каждым последующим, а остальные объединяются после первого объединения, копируя его.

Понятно, что другой, нелинейный вариант объединения состоит в том, что операции меняются местами:

$$\theta_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \to \vartheta_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4, \ldots$$

Наличие такой симметричной связи свидетельствует, что есть скрытые свойства алгебраических уравнений. Они частично обнаруживаются на функциональном уровне, однако их значение и сущность пока не раскрыты.

Функциональные выражения рассматриваемого вида можно получить на основе конструирующей группы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to (x_1 + x_2)(x_3 + x_4),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to x_1 \to x_1, x_2 \to x_3, x_3 \to x_4, x_4 \to x_2 \Rightarrow (x_1 + x_3)(x_4 + x_3),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to x_1 \to x_1, x_2 \to x_4, x_3 \to x_2, x_4 \to x_3 \Rightarrow (x_1 + x_4)(x_2 + x_3).$$

Анализ выполнен на основе циклического изменения значимых элементов в единичной матрице, первый элемент которой оставлен неподвижным. Другими словами, предыдущая группа перестановок генерирует функции для решения уравнений более высокого порядка, выступает в роли функциональной ступень для новых решений.

Это замечание приоткрывает возможности мультипликативной генерации симметрических функций для уравнения порядка 5, следуя алгоритму модели порядка 4.

Для этого обратимся к алгоритму графического вывода рассматриваемых симметрических выражений, применив комбинаторику мультипликативного соединения элементов. Пусть заданы четыре элемента. Пусть они подчинены системе аддитивно-мультипликативных связей в непосредственной «близости» или «через один элемент». Получатся уравнения с одни «кручением», когда пара элементов переставлена местами:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x_4 & & x_1 \\ \hline \uparrow & & \downarrow \\ \hline x_3 & & x_2 \\ \hline \end{array} \to (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), (x_1 x_2) + (x_3 x_4),$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x_4 & \leftarrow & x_1 \\ \hline & & \\ \hline x_3 & \rightarrow & x_2 \\ \hline \end{array} \to (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), (x_1 x_2) + (x_3 x_4),$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x_4 & & x_1 \\ \hline \uparrow & & \downarrow \\ \hline x_2 & & x_3 \\ \hline \end{array} \to (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), (x_1 x_2) + (x_3 x_4).$$

Именно так можно действовать из формальных соображений, расположив в форме замкнутой цепочки 5 элементов.

Получим мультипликативные функции, которые применяются при решении уравнений порядка 5:

$$\theta_1 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1,$$
$$\theta_2 = x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_2 + x_2x_4 + x_4x_1,$$
$$\theta_3 = x_1x_4 + x_4x_2 + x_2x_5 + x_5x_3 + x_3x_1.$$

Они дополняются другими уравнениями, генерируя полную систему. Если группа алгебраического уравнения порядка 5 разрешима, рассматриваемое уравнение разрешимо в радикалах.

Для уравнений порядка 6 «подсказывается» модель функций

$$\theta_1 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_4 + x_5)(x_5 + x_1),$$
$$\theta_2 = (x_1 + x_3)(x_3 + x_5)(x_5 + x_2)(x_2 + x_4)(x_4 + x_1),$$
$$\theta_3 = (x_1 + x_4)(x_4 + x_2)(x_2 + x_5)(x_5 + x_3)(x_3 + x_1).$$

Эти три функции на пяти элементах имеют, с точностью до ориентации связей, 2 диаграммы. На шести элементах аналогично получим 3 диаграммы.

Во всех случаях имеет место постоянство отношения числа графических диаграмм к числу функций:

$$\eta = 2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots$$

Группы с малым числом элементов способны генерировать группы с большим числом элементов. Рассматриваемые симметричные функции для 5 элементов сохраняются при перестановках пары групп

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_1 \leftrightarrow x_2, x_3 \leftrightarrow x_5, x_4 = inv,$$

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x_1 \leftrightarrow x_3, x_4 \leftrightarrow x_5, x_2 = inv.$$

Следовательно, симметричные функции можно конструировать на основе группы с минимальным числом элементов. Для этого «подходят» разные группы на матричном произведении. В рассматриваемом случае мы имеем дело с простыми группами.

Можно выполнить взаимное произведение указанные элементов, не равных единичной матрице. Получаем новую группу на матричном произведении с элементами

$$AB \to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Эта группа может быть получена однократным перемещением значимых элементов единичной матрицы на единицу вправо и второй раз на единицу влево. Их произведение, естественно, коммутативно и генерирует единичную матрицу.

Другие пары матриц с аналогичными свойствами получаются при сдвигах элементов влево и вправо на 2,3,4 шага от их исходных значений:

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Имеет место дублирование пар матриц, «неразличимость» сдвигов на четное число перестановок и сдвигов на нечетное число перестановок. Это обстоятельство может иметь определенные физические приложения, так как энергетически «легче» реализовать сдвиги на меньшее число шагов.

Следовательно, анализируемые симметрические функции могут быть получены на основе группы, генерируемой единичной матрицей при сдвиге элементов влево и вправо на несколько одинаковых шагов. Во всех случаях мы получим инвариантность симметрических функций относительно условий, задаваемых этими матрицами. Имеет место их инвариантность относительно количества «шагов» значимых элементов. Есть, понятно, цикличность этих шагов с периодом, равным размерности анализируемых матриц. По этой причине количество «шагов» может рассматриваться как некоторая внутренняя переменная, что важно с физической точки зрения, если физические эффекты зависят от этой переменной.

Аналогичные свойства инвариантности симметрических функций получатся на основе группы, состоящей из 10 элементов, которые можно трактовать как «зеркальные» элементы. Они получаются при сдвиге значимых элементов единичной матрицы вправо и зеркальной к ней матрице влево. Получим 10 матриц:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Они «подсказывают» происхождение матриц, анализируемых ранее. Понятно, что для разных алгебраических уравнений могут применяться разные группы. Одинаковые функции следуют при малом количестве элементов групп и при их разном количестве. С физической точки зрения это обстоятельство конструктивно, так как свидетельствует о том, что одинаковый результат можно получить на малом «материале» и минимальными средствами. Но можно получить тот же результат на большом «материале» и после значительных усилий.

Алгебраические числовые уравнения на основе анализа их решений «подсказывают» специфику и черты практики людей.

Физические аспекты решения алгебраических уравнений

Анализ алгебраических уравнений на системе чисел имеет, как показал анализ, скрытые фундаментальные свойства, а также аналогию с практикой людей. Понятно, что значительно больше информации содержат матричные алгебраические модели, особенно если учесть, что операции произведения и суммирования могут быть самыми разными. От ручейка, питающего истинами, мы переходим к океану творчества и прогресса.

Однако на первой стадии такого перехода желательно понять, почему, с физической точки зрения, все алгебраические уравнения размерности 2,3,4 решаются в радикалах, а на более высоких размерностях решения возможны только в частных случаях?

Для косвенного и начального ответа на этот вопрос укажем новое условие равновесия, присущее системе корней. Начнем анализ с кубического уравнения, генерирующего три корня. Представим их графической диаграммой, располагая корни на вершинах правильного треугольника. Введем уравнение, тождественно равное нулю, в качестве характеристики рассматриваемой системы:

$$(x_1 - x_2)x_3 + (x_2 - x_3)x_1 + (x_3 - x_1)x_2 \equiv 0.$$

Оно выполняется на любой начальной точке «треугольника» и меняет знак при изменении ориентации обхода контура. Другими словами, уравнение инвариантно относительно любой перестановки точек в треугольнике. С физической точки зрения это означает, что есть одно уравнение, не зависящее от расположения треугольника. Другими словами, ситуация не меняется от того, как расположен треугольник.

Аналогично рассмотрим алгебраическое уравнение степени 4. Расположим корни на вершинах квадрата. Аналогично предыдущему случаю генерируются 4 уравнения:

$$(x_1 - x_2)x_3 + (x_2 - x_3)x_1 + (x_3 - x_1)x_2 \equiv 0,$$

$$(x_1 - x_2)x_4 + (x_2 - x_4)x_1 + (x_4 - x_1)x_2 \equiv 0,$$

$$(x_1 - x_2)x_4 + (x_2 - x_4)x_1 + (x_4 - x_1)x_2 \equiv 0,$$

$$(x_2 - x_3)x_4 + (x_3 - x_4)x_2 + (x_4 - x_2)x_3 \equiv 0.$$

Эта система уравнений инвариантна относительно группы перестановок из 4 элементов. В данном случае мы имеем возможность наложения одинаковых треугольников друг на друга, что соответствует переходу от одного функционального уравнения к другому. Другими словами, есть физический аспект данной задачи: рассматриваемые треугольники одинаковы, и они совмещаются при наложении друг на друга.

С математической точки зрения, скрывающей эти движения, мы применяем группу перестановок к системе функциональных уравнений, которые, в определенном смысле, функционально неотличимы друг от друга, так ка каждое уравнение есть ноль. Заметим, что группа перестановок всегда ассоциировалась с симметриями правильных многогранников.

Следовательно, для алгебраических уравнений степеней 2,3 имеет место тождественность геометрических элементов, ассоциированная с системой треугольников, на которые комбинаторно разбивается правильный многоугольник.

Иная ситуация складывается при аналогичном рассмотрении правильных многоугольников высших размерностей. Проанализируем алгебраическое уравнение степени 5. Расположим корни уравнения на вершинах правильного пятиугольника. Составим функциональные уравнения, применяемые нами для правильных многоугольников меньшей размерности.

Получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_2)x_3 + (x_2 - x_3)x_1 + (x_3 - x_1)x_2 \equiv 0,\\
&(x_1 - x_2)x_4 + (x_2 - x_4)x_1 + (x_4 - x_1)x_2 \equiv 0,\\
&(x_1 - x_2)x_5 + (x_2 - x_5)x_1 + (x_5 - x_1)x_2 \equiv 0,\\
&(x_1 - x_3)x_4 + (x_3 - x_4)x_1 + (x_4 - x_1)x_3 \equiv 0,\\
&(x_1 - x_3)x_5 + (x_3 - x_5)x_1 + (x_5 - x_1)x_3 \equiv 0,\\
&(x_1 - x_4)x_5 + (x_4 - x_5)x_1 + (x_5 - x_1)x_4 \equiv 0,\\
&(x_2 - x_3)x_4 + (x_3 - x_4)x_2 + (x_4 - x_2)x_3 \equiv 0,\\
&(x_2 - x_3)x_5 + (x_3 - x_5)x_2 + (x_5 - x_2)x_3 \equiv 0,\\
&(x_2 - x_4)x_5 + (x_4 - x_5)x_2 + (x_5 - x_2)x_4 \equiv 0,\\
&(x_3 - x_4)x_5 + (x_4 - x_5)x_3 + (x_5 - x_3)x_4 \equiv 0.
\end{aligned}$$

Она инвариантна относительно группы перестановок из 5 элементов. С математической точки зрения мы имеем аналогию с предыдущими моделями. Однако ситуация принципиально меняется с физической точки зрения, если в рассмотрение ввести алгоритм наложения анализируемых «треугольников» друг на друга. Легко видеть, что у нас есть два типа треугольников. Но не все треугольники могут быть наложены друг на друга с совпадением, так как их размеры разные. Следовательно, появляются не только варианты совпадения, которые характерны для уравнений, имеющих решение в радикалах, но и варианты их несовпадения, что можно рассматривать как аргумент неразрешимости уравнения в радикалах.

Заметим, что эта ситуация имеет общее значение. С увеличением размерности увеличивается количество классов треугольников, а потому и количество типов уравнений, неразрешимых в радикалах в рамках модели, основанной на группе перестановок корней.

Система из четырех корней подчинена не только системе «продольных» условий равновесия, но и «поперечным», циклическим условиям равновесия

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_2)x_3 + (x_2 - x_3)x_1 + (x_3 - x_1)x_2 \equiv 0,\\
&(x_2 - x_3)x_4 + (x_3 - x_4)x_2 + (x_4 - x_2)x_3 \equiv 0,\\
&(x_3 - x_4)x_1 + (x_4 - x_1)x_3 + (x_1 - x_3)x_4 \equiv 0,\\
&(x_4 - x_1)x_2 + (x_1 - x_2)x_4 + (x_2 - x_4)x_1 \equiv 0,
\end{aligned}$$

$$(x_1 - x_3)x_4 + (x_2 - x_4)x_1 + (x_3 - x_1)x_2 + (x_4 - x_2)x_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_2)x_3 + (x_2 - x_3)x_4 + (x_3 - x_4)x_1 + (x_4 - x_1)x_2 -\\
&-(x_2 - x_1)x_4 - (x_1 - x_4)x_3 - (x_4 - x_3)x_2 - (x_3 - x_2)x_1 = 0.
\end{aligned}$$

Проанализируем аналогично систему, состоящую из 5 корней. Получим «продольные» условия равновесия:

$$(x_1 - x_2)x_3 + (x_2 - x_3)x_1 + (x_3 - x_1)x_2 \equiv 0,$$

$$(x_2 - x_3)x_4 + (x_3 - x_4)x_2 + (x_4 - x_2)x_3 \equiv 0,$$

$$(x_3 - x_4)x_5 + (x_4 - x_5)x_3 + (x_5 - x_3)x_4 \equiv 0,$$

$$(x_4 - x_5)x_1 + (x_5 - x_1)x_4 + (x_1 - x_4)x_5 \equiv 0,$$

$$(x_5 - x_1)x_2 + (x_1 - x_2)x_5 + (x_2 - x_5)x_1 \equiv 0.$$

Система имеет, аналогично предыдущему случаю, пару циклических «поперечных» условий равновесия.

Рассмотрим систему линий, которые соединяют между собой вершины правильных многоугольников. Заметим различие в системе фигур, образованных внутренними линиями. В паре и в треугольнике внутренних линий нет и потому нет внутренних фигур. В квадрате внутренние линии при пересечении формируют треугольники. Внешние и внутренние фигуры в нём не совпадают. У многоугольников более высокой размерности при пересечении внутренних линий образуется фигура, аналогичная внешнему контуру. Следовательно, есть геометрическое различие анализируемых многоугольников. Введем новый параметр, который задаёт отношение числа внутренних фигур, образованных внутренними линиями многоугольника, аналогичных внешним фигурам, заданным числом единица. Получим таблицу:

$\dim M$	2	3	4	5	6	...
$\xi = n_{in}$	0	0	0	1	1	

Следовательно, есть геометрическое различие многообразий разной размерности, которое можно охарактеризовать новым параметром.

Вероятно, оно тоже может давать свой эффект в решения алгебраических уравнений. Внутренние фигуры, образованные пересечением внутренних линий многоугольников, выполняют функцию скрытых параметров, проявляющихся при учете дополнительных условий.

Наличие внешних и внутренних линий можно рассматривать как тему для формирования матриц, соответствующих этим линиям. Примем последовательность цифр, задающих связи между точками при последовательном движении по внешним или внутренним линиям. Поставим им в соответствие матрицы, полагая, что цифра, следующая за рассматриваемой, указывает место значимого элемента в строке, обозначенной предыдущей цифрой.

Получим соответствия:

$$a_{out} \Rightarrow 12345 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a, a^{-1} \Rightarrow 15432 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a^{-1},$$

$$b_{in} \Rightarrow 13524 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b, {b^{-1}}_{in} \Rightarrow 14253 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b^{-1}.$$

Дополним их единичной матрицей размерности 5. Получим таблицу произведений:

$\times$	E	a	b	a^{-1}	b^{-1}
E	E	a	b	a^{-1}	b^{-1}
a	a	b	b^{-1}	E	a^{-1}
b	b	b^{-1}	a^{-1}	a	E
a^{-1}	a^{-1}	E	a	b^{-1}	b
b^{-1}	b^{-1}	a^{-1}	E	b	a

.

Таблица коммутативна, поэтому данная группа, ассоциированная с внешними и внутренними линиями, разрешима. Согласно подходу Галуа, уравнения, которым соответствует эта группа, разрешимы.

Заметим, что группу образуют матрицы, ассоциированные только с внешними или только с внутренними линиями, которые соединяют между собой все вершины.

Мы имеем систему «физических циклов» с разной их ориентацией. С физической точки зрения им могут соответствовать реальные связи между системой атомов или молекул.

Соответственно обнаруживаются два типа возможных «циклических» связей.

Для системы, состоящей из 6 корней, ситуация описывается тремя группами, которые совместно задают группу, которая их объединяет.

Получим матрицы

$$a \Rightarrow (123456) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^{-1} \Rightarrow (165432) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b \Rightarrow (135)(246) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b^{-1} \Rightarrow (153)(264) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c \Rightarrow (14)(25)(36) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow (41)(63)(52) \Leftarrow c^{-1}.$$

Совместно с единичной матрицей они образуют конформацию, генерируемую этой матрицей при перестановке значимых элементов вправо на несколько шагов. Конформация «содержит» три группы.

Мы имеем дело с тройкой графических диаграмм. С физической точки зрения им можно поставить в соответствие три типа устойчивых связей между атомами или молекулами. При анализе систем, образующихся из углерода, физики экспериментально подтвердили наличие трех типов материалов: алмаз, графит и карбин.

Так в простейшей форме подтверждается полезность математического анализа законов, которым подчиняются алгебраические уравнения. Чистая математика всегда находит приложения. Однако, более того, она указывает на новые возможности.

Ведь рассматриваемые три типа соединений в Природе могут быть присущи молекулам или более сложным объектам.

Аналогично, математические данные могут быть применены для анализа коллективов.

Геометрическая неассоциативность

При анализе правильных многоугольников мы получаем «циклы» на трёх элементах, которые геометрически представляются треугольниками. На меньших размерностях эти треугольники идентичны. На больших размерностях получается система разных треугольников.

В частности, на размерности 5 получаются два типа треугольников. У них две стороны равны, а третья сторона иная. Мы имеем дело с двухбуквенной системой, состоящей, например, из букв a,b . Поэтому получаются два типа треугольников: aba,bab. При анализе геометрических фигур, образованных из них, ситуация будет зависеть от того, по какому алгоритму мы их объединяем. Алгоритм объединения базовых многоугольников можно рассматривать в качестве операции на них. Операцию объединения многоугольников можно назвать геометрической операцией. В зависимости от того, как она задана, результаты будут разные. По этой причине возможна аналогия геометрического объединения со стандартными математическими объектами. В частности, можно определить геометрическую коммутативность и ассоциативность, если при объединении фигур «слева» и «справа» результаты будут одинаковы.

Примем операцию объединения геометрических фигур, имеющих разные стороны, по линии, количество которых минимально. Примем модель «прочтения» операции, располагая сходные элементы рядом и «компенсируя» их. Тогда, например, получим на одинаковых элементах модели:

$$aab+baa=aaaa, aab+\left(aab+baa\right)=\left(aab+baa\right)+aab,$$
$$bba+abb=bbbb, abb+\left(bba+abb\right)=\left(bba+abb\right)+abb.$$

Имеет место коммутативность и ассоциативность.

Ситуация меняется, если «суммируются» разные элементы. Например, получим

$$aab+bba=aaab, bba+aab=abbb,$$
$$\left(aab+baa\right)+abb=aaabb,$$
$$aab+\left(baa+abb\right)=aaaaa.$$

Полученные фигуры будут разными, что отображено обозначениями. С математической точки зрения мы имеем геометрическую неассоциативность.

С коммутативной и ассоциативной ситуацией мы имеем дело при рассмотрении многоугольников с размерностью, меньшей или равной 4. На размерностях, больших 4, имеет место геометрическая некоммутативность и геометрическая неассоциативность.

Математическое различие ситуаций является аргументом в пользу физического обоснования различия решений алгебраических уравнений.

Зависимость информации от алгоритма её восприятия

Рассмотрим правильный многоугольник в форме квадрата с внешними и внутренними линиями. Выполним «обход» квадрата, располагая числа, соответствующие вершинам, в порядке их «обхода», меняя начальную точку. Получим последовательность чисел, которые обозначим буквами:

$$a = 1234, b = 2341, c = 3412, d = 4123.$$

Выполним «прочтение», полагая, что предыдущее число указывает строку, а последующее число указывает место значимого элемента в этой строке. Выберем в качестве значимого элемента число 1. Получим одну матрицу

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что она достаточна для генерации группы, если выполнить единые сдвиги значимых элементов последовательно влево или вправо до завершения циклов.

Выполним второе прочтение, полагая, что числа указывают положение значимого элемента в строках, соответствующих месту числа в последовательности. Получим группу с элементами

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что получится одинаковый результат при «прочтении» последовательно как слева направо, так и в обратном порядке.

Выполним третье «прочтение», полагая, что значимый элемент в соответствующих строках получается суммированием по модулю 4 числа в соответствующей строке с последующим числом. Получим последовательность матриц

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c = a, d = b.$$

Они генерируют конформацию при единых сдвигах значимых элементов.

Функциональные связи уравнений разных порядков

Уравнения степени 3 вида

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$$

имеет три корня x_1,x_2,x_3. Найдем их, сведя задачу к решению системы линейных уравнений.

Предварительно известно, что неприводимое уравнение второй степени

$$x^2+x+1=0$$

генерирует корни

$$\rho=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\rho^2=\bar{\rho}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\rho^3=1.$$

Корни уравнения третьей степени подчинены формулам Виета

$$-a_1=x_1+x_2+x_3,a_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,a_3=x_1x_2x_3.$$

Идея решения состоит в том, чтобы первое линейное уравнение для корней дополнить еще двумя уравнениями, правые части которых выражаются через коэффициенты первичного уравнения. Алгоритм Лагранжа реализует эту идею на основе введения новых переменных

$$y_1=x_1+\rho x_2+\rho^2x_3,y_2=x_1+\rho^2x_2+\rho x_3,$$

которые сами по себе, или в некоторой функциональной связи, являются корнями нового уравнения. Например, это может быть уравнение

$$\left(y^3\right)^2+b_1y^3+b_2=0.$$

Его коэффициенты выражаются через корни:

$$-b_1=y_1^3+y_2^3,b_2=y_1^3y_2^3.$$

Поскольку решения квадратного уравнения найти легко, задача сводится к вычислению указанных выражений и записи их через коэффициенты исходного уравнения.

Получим выражения

$$y_1^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3\rho\left(x_1x_3^2 + x_2x_1^2 + x_3x_2^2\right) + 3\rho^2\left(x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2\right),$$

$$y_1^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3\rho^2\left(x_1x_3^2 + x_2x_1^2 + x_3x_2^2\right) + 3\rho\left(x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2\right),$$

$$y_1y_2 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right),$$

$$y_1^3 + y_2^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 12x_1x_2x_3 - 3\left(x_1x_3^2 + x_2x_1^2 + x_3x_2^2\right) - 3\left(x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2\right).$$

Они легко выражаются через коэффициенты исходного уравнения.

Можно поступить иначе: выразить через коэффициенты исходного выражения величины y_1^3, y_2^3. Тогда получается система уравнений

$$\begin{aligned}
-a_1 &= x_1 + x_2 + x_3,\\
y_1 &= x_1 + \rho x_2 + \rho^2 x_3,\\
y_2 &= x_1 + \rho^2 x_2 + \rho x_3.
\end{aligned}$$

Если упростить исходные уравнения, выражения для левых частей уравнений будут проще.

Аналогичный подход применим к уравнению

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

Введём функциональные выражения

$$z_1 = x_1x_2 + x_3x_4, z_2 = x_1x_3 + x_2x_4, z_3 = x_1x_4 + x_2x_3$$

в качестве корней уравнения третьего порядка

$$z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3 = z^3 - a_2z^2 + \left(a_1a_3 - 4a_4\right)z - a_4\left(a_1^2 - 4a_2\right) - a_3^2 = 0,$$

$$b_1 = -a_2, b_2 = a_1a_3 - 4a_4, b_3 = a_4\left(a_1^2 - 4a_2\right) + a_3^2.$$

Из них получим условия

$$x_1 + x_2 = \sqrt{-z_1}, \left(x_3 + x_4\right) = -\sqrt{-z_1}, x_1 + x_3 = \sqrt{-z_2}, \left(x_2 + x_4\right) = -\sqrt{-z_2}, x_1 + x_4 = \sqrt{-z_3}, \left(x_2 + x_4\right) = -\sqrt{-z_3},$$

$$\sqrt{-z_1}\sqrt{-z_2}\sqrt{-z_3} = x_1^2\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right) + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4.$$

В силу зависимости иррациональностей можно выразить 4 корня через три иррациональности. Например, выполняются условия

$$x_1 + x_4 - (x_2 + x_4) + x_1 + x_2 = 2x_1 = \sqrt{-z_3} + \sqrt{-z_2} + \sqrt{-z_1}, \ldots$$

В итоге получим выражения для корней алгебраического уравнения степени 4 через корни алгебраического уравнения степени 3:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \sqrt{-z_1} + \sqrt{-z_2} + \sqrt{-z_3}, \\ 2x_1 &= \sqrt{-z_1} - \sqrt{-z_2} - \sqrt{-z_3}, \\ 2x_1 &= -\sqrt{-z_1} + \sqrt{-z_2} - \sqrt{-z_3}, \\ 2x_1 &= -\sqrt{-z_1} - \sqrt{-z_2} + \sqrt{-z_3}. \end{aligned}$$

Во всех рассматриваемых вариантах решения алгебраических уравнений имеют место некоторые технические сложности, а также дополнительные связи между функциями и величинами. Это обстоятельство косвенно свидетельствует о наличии скрытых свойств, которые имеют сами уравнения, а также их решения. В этом специфика исследования любых объектов на основе их групп автоморфизмов.

Для алгебраического уравнения степени больше 4 ситуации сложнее. Среди них есть модели, для которых можно получить решения в виде функциональных выражений от радикалов. Однако есть такие уравнения, решения которых не могут быть заданы функциями такого класса. Для них требуются более сложные, эллиптические функции. Анализируемое изменение соответствует общему правилу: более сложные объекты подчинены более сложным законам.

Естественен вопрос: каким способом и какими алгоритмами можно установить, разрешимо ли данное алгебраическое уравнение в радикалах или для его решения требуются другие функциональные элементы? Ответ на данный вопрос принято давать в форме установленного закона: алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах, если группа автоморфизмов симметрических функций от его корней (группа Галуа) разрешима. Поэтому исследование уравнений основано на исследовании системы симметрических функций, ассоциированных с конкретным уравнением.

Естественно иметь систему функциональных условий, зависящую от коэффициентов анализируемого алгебраического уравнения, анализ которых даёт практически удобный алгоритм ответа на вопрос о разрешимости или неразрешимости в радикалах любого конкретного уравнения.

Наряду с известными и хорошо проверенными алгоритмами и методиками решения алгебраических и других уравнений могут применяться другие алгоритмы и методики. Их форма, сущность и приложения могут выходить далеко за рамки начального подхода, доказавшего свою эффективность. Более того, алгоритм может иметь геометрические или топологические аспекты, которые не учитывались ранее. Ситуация усложняется, если анализ основан на новых функциях и новых операциях. Новыми могут быть также исследуемые объекты.

Разрешимость алгебраических уравнений степени 5 по Чеботарёву

Известно, что уравнение

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$

может быть приведено к каноническому виду

$$x^5 + ux + v = 0,$$

коэффициенты которого есть элементы основного поля, заданного коэффициентами исходного уравнения.

Доказательство базируется га введении новой функции

$$y = C_1x^4 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5,$$

коэффициенты которой получаются на основе приравнивания нулю результанта этой функции и исходного уравнения. Для новой функции получится уравнение

$$y^5 + R_1y^4 + R_2y^3 + R_3y^2 + R_4y + R_5 = 0.$$

Из анализа следует, что коэффициенты можно выбрать так, что $R_1 = R_2 = R_3 = 0.$

Чеботарёв Н.Н. выполнил анализ структуры решений канонического уравнения степени 5. Он показал, что есть несколько вариантов решений. В частности, если уравнение приводимо, оно сводится к уравнениям с меньшими степенями и потому разрешимо в радикалах. Если уравнение неприводимо, следует анализировать резольвенту вида

$$\varphi(y) - Dy = \left(y^3 - 5y^2 + 15u^2y + 5u^3\right)^2 - Dy.$$

Если $\varphi(y)$ имеет кратный корень, получим условие

$$\left(y_0^3 - 5y_0^{\,2} + 15u^2y_0 + 5u^3\right)^2 - 2\left(y_0^{\,3} - 5y_0^{\,2} + 15u^2y_0 + 5u^3\right)\left(3y_0^2 - 10uy_0 + 15u^2\right)y_0 = 0,$$

которое задает аналитическую формулу для решения исходного уравнения.

Если дискриминант уравнения не равен нулю, получим выражение

$$5y_0^3 - 15uy_0^2 + 15u^2 y_0 - 5u^3 = 0.$$

Из него следует, что $Du = 256u^6$. Однако для уравнения в канонической форме получим

$$D = 256u^5 + 3125v^4.$$

Из сравнения двух формул следует условие

$$v^4 u = 0.$$

Оно выполняется если либо $v = 0$, или $u = 0$. Тогда, очевидно, уравнение в канонической форме разрешимо в радикалах.

На основе общей формулы для дискриминанта резольвентный множитель получает вид

$$\left(y-u\right)^4 \left(y^2 - 6uy + 25u^2\right) - 3125v^4 y.$$

Пусть известен вид один корень этого уравнения и пусть

$$u = \frac{y_0}{\lambda}, v = u\mu,$$

Где λ, μ есть некоторые параметры. Тогда

$$\left(u\lambda - u\right)^4 \left(u^2\lambda^2 - 6u^2\lambda + 25u^2\right) - 3125u^5\lambda\mu^4 = 0.$$

Следовательно, уравнение канонического вида степени 5 разрешимо в радикалах, если его коэффициенты подчинены условиям

$$u = \frac{3125\lambda\mu^4}{\left(\lambda-1\right)^4 \left(\lambda^2 - 6\lambda + 25\right)}, v = u\mu.$$

В рассматриваемом случае пара величин u, v алгебраического уравнения степени 5 подчинена алгебраическим условиям, зависящим от параметров λ, μ, нетривиально «управляющих» решениями исходного уравнения. Анализ полученной связи может быть проще алгоритма получения решений. Но может быть и так, что решения найти проще, чем анализировать их возможность. Требование разрешимости уравнения в радикалах является всего лишь одним из вариантов анализа пространства решений исходного уравнения.

Представляет интерес задача нахождения решений на основе системы базовых уравнений, для которых доказана их разрешимость в радикалах. Сведение решения одного алгебраического уравнения к решению системы алгебраических уравнений представляет собой самостоятельный раздел анализа. Другими словами, уравнения высших порядков можно рассматривать как модель, «встроенную» в конструкцию, состоящую из неё и моделей меньших порядков.

Разрешимость алгебраических уравнений степени 5 по Подвысоцкому

Разрешимость алгебраического уравнения в радикалах можно считать доказанной, если решение задачи сведено к решению уравнений, которые решаются в радикалах. Подвысоцкий В. в 2011 году предложил умножить уравнение степени 5 на уравнение степени 3 и рассматривать это произведение как результат произведения двух «близких» уравнений степени 4. Получена связь коэффициентов новых уравнений с коэффициентами исходного уравнения, что позволяет получить 8 решений, из которых 5 решений принадлежат уравнению степени 5.

Алгоритм анализа базируется на рассмотрении связи двух уравнений:

$$\left(x^5+ux+v\right)\left(x^3+px+q\right)=$$

$$=x^8+px^6+qx^5+ux^4+vx^3+upx^2+\left(uq+vp\right)x+vq=0,$$

$$x^8+2bx^6+2cx^5+\left(d'+d''+b^2\right)x^4+2bcx^3+\left(b\left(d'+d''\right)+c^2\right)+c\left(d'+d''\right)x+d'd''=$$

$$=\left(x^4+bx^2+cx+d'\right)\left(x^4+bx^2+cx+d''\right).$$

Из сравнения следует система связей между коэффициентами уравнений:

$$p=2b,q=2c,u=d'+d''+b^2,v=2bc,$$

$$up=b\left(d'+d''\right)+c^2,uq+vp=c\left(d'+d''\right),vq=d'd''.$$

Выражения введенных коэффициентов через коэффициенты канонического уравнения степени 5 таковы:

$$b=\left(-\frac{v^2}{16}\right)^{1/5},c=\frac{v}{\left(-2v^2\right)^{1/5}},p=\left(-2v^2\right)^{1/5},q=\frac{2v}{\left(-2v^2\right)^{1/5}},$$

$$d' + d'' = u - \left(-\frac{v^2}{16} \right)^{2/5}, d'd'' = \frac{2v^2}{\left(-2v^2\right)^{1/5}}.$$

Величины d', d'' удобно подчинить уравнению

$$d^2 - \left(d' + d''\right)d + d'd'' = 0.$$

В этом подходе некоторые уравнения степени 5 разрешимы в радикалах.

Модель решения алгебраического уравнения степени 4

Общее уравнение

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

посредством замены переменных $x = y - \frac{b}{4a}$ преобразуется к виду

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

с коэффициентами

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2}, q = \frac{8a^2d + b^3 - 4abc}{8a^3}, r = \frac{16ab^2c - 64a^2bd - 3b^4 + 256a^3e}{256a^4}.$$

Для решения этого уравнения можно найти сначала один из корней кубического уравнения

$$z^3 + pz^2 + \frac{p^2 - 4r}{4}z - \frac{q^2}{8} = 0.$$

На этом корне решения уравнения 4 степени получают вид:

$$y_1 = \frac{\sqrt{2z} - \sqrt{2z - 4\left(\frac{p}{2} + z + \frac{q}{2\sqrt{2z}}\right)}}{2}, y_2 = \frac{\sqrt{2z} + \sqrt{2z - 4\left(\frac{p}{2} + z + \frac{q}{2\sqrt{2z}}\right)}}{2},$$

$$y_3 = \frac{\sqrt{2z} - \sqrt{2z - 4\left(\frac{p}{2} + z - \frac{q}{2\sqrt{2z}}\right)}}{2}, y_4 = \frac{\sqrt{2z} + \sqrt{2z - 4\left(\frac{p}{2} + z - \frac{q}{2\sqrt{2z}}\right)}}{2}.$$

Решения можно получить также другими средствами. В частности, возможно представление их на основе решения пары квадратных уравнений, ассоциированных с каноническим уравнением степени 4.

Операционные истоки происхождения, эволюции объектов и их свойств

Из всей практики следует надежно обоснованный факт, что структура и динамика любых объектов базируется на системе отношений между ними. В каноническом виде отношения можно задавать числами, например, единицей. Тогда появляется возможность моделирования отношений в конечной системе объектов матрицами. Операции с матрицами позволяют генерировать новые матрицы, которые могут образовать в итоге систему, замкнутую по некоторому дополнительному условию.

Поскольку любую матрицу можно получить на основе элементов матричной алгебры, естественен вопрос: какие есть методы и приемы моделирования элементов матричной алгебры? Понятно, что решение этой задачи прямо или косвенно ассоциировано с задачей анализа истоков и законов развития объектов, их свойств, а также их эволюции.

Решения алгебраических уравнений «подсказывают» новую версию генерации элементов матричной алгебры. Суть её состоит в том, что соотношения между корнями алгебраического уравнения задают систему, состоящую из симметрических функций, инвариантных относительно группы перестановок. Структура симметрических функций едина для алгебраических уравнений разных степеней. По этой причине можно надеяться, что правила, установленные для конечной системы с малым количеством элементов, пригодны для конечных систем с большим числом элементов. Следовательно, сопоставив симметрическим функциям матрицы, мы можем независимо рассматривать на их основе генерацию других матриц. В рамках исходной идеи нам нужны матрицы, достаточные для генерации всех элементов матричной алгебры, исходя из начальной системы матриц.

Генерация становится возможной только после того, как заданы операции для матриц. Следуя опыту, мы вправе принять разные системы операций. Например, отнесём к системе операций стандартную матричную операцию. Она ассоциативна, что косвенно свидетельствует о наличии некоторого устойчивого алгоритма генерации новых матриц. Примем к рассмотрению также пару неассоциативных, комбинаторных операций. Они генерируют новые матрицы при комбинаторном произведении строк первой матрицы на строки или столбцы второй матрицы. Понятно, что в общем случае результаты генерации на ассоциативных и на неассоциативных операциях могут быть разными.

Заметим, что ассоциативность мы соотносим к свойствам физических тел, а неассоциативности ставим в соответствие свойства Сознаний и Чувств. В предлагаемом расчете применяются три различных операции. Этот выбор выполнен сознательно с целью обоснования единого механизма генерации элементов матричной алгебры разными операциями. Доказательство такой возможности есть косвенное подтверждение единства происхождения и истоков Тел, Сознаний и Чувств.

Введём систему матриц с единичными и парными отношениями:

$$\underset{x_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_2}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_3}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}},\underset{x_1x_2}{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_1x_3}{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_2x_3}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}.$$

Получим таблицу произведений на трёх указанных операциях:

$\times$	ξ	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$
	$\overset{k}{\underset{l}{\times}}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\overset{m}{\times}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
	$\overset{k}{\underset{c}{\times}}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
	$\overset{k}{\underset{l}{\times}}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\overset{m}{\times}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
	$\overset{k}{\underset{c}{\times}}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
	$\overset{k}{\underset{l}{\times}}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\overset{m}{\times}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
	$\overset{k}{\underset{c}{\times}}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

.

Проанализирована система, состоящая из трех объектов. Принят алгоритм сопоставления им матриц на основе допущения, что отношение «к себе» задаётся каноническими матрицами с элементами на диагонали. Отношения «к себе» дополнены взаимными отношениями в паре объектов, что задано матрицами с соответствующим расположением значимых элементов по строкам.

Результат получился одинаковый на каждой из трёх операций. Следовательно, можно предположить на основе принятой модели и математических следствий, что Тела, Сознания, Чувства объектов исходно едины. Далее происходит взаимная связь и «обогащение» отношений.

Дополним анализируемую систему матриц еще одним элементом:

$$\underset{x_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_2}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_3}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}},\underset{x_1x_2}{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_1x_3}{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}},\underset{x_2x_3}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}},\underset{x_1x_2x_3}{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}}.$$

На матричной операции получим систему условий:

$$x_1+x_2+x_3=E,$$

$$(x_1x_2)^2+(x_1x_3)^2+(x_2x_3)^2=2E,$$

$$(x_1x_2x_3)^3=E.$$

Следовательно, выполняются законы:

$$x_1+x_2+x_3+(x_1x_2x_3)^3=(x_1x_2)^2+(x_1x_3)^2+(x_2x_3)^2,$$
$$x_1+x_2+x_3+(x_1x_2)^2+(x_1x_3)^2+(x_2x_3)^2=3(x_1x_2x_3)^3,$$
$$(x_1x_2)^2+(x_1x_3)^2+(x_2x_3)^2+(x_1x_2x_3)^3=3(x_1+x_2+x_3).$$

Они имеют более сложный вид, если система состоит из большего числа объектов. Однако уже на этой стадии ясно, что взаимные произведения генерируют новые объекты, реализуя таким способом систему условий «равновесия». Их можно интерпретировать как аналоги «атомов» и «молекул», образованных из первичных объектов.

Условия равновесия меняются, если меняется система операций. В частности, законы зависят от операции суммирования. С физической точки зрения эти рассуждения не фантазия, если принять гипотезу, что математические объекты, будучи числовым представлением реальных объектов с системой ощущений и принятия решений, через величины и операции отображают эти ощущения и решения.

Операции с деформацией элементов

Проанализируем систему отношений между тремя элементами в их представлении матрицами размерности 3. Это легко сделать, если начать анализ с системы отношений между двумя элементами в их представлении матрицами размерности 2. Получим базовые матрицы

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Подставим эти матрицы в матрицы размерности 3 в их основном виде или в виде элементов, разделенных по столбцам. Получим такие модели:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\\ast&\ast&0\\\ast&\ast&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\\ast&0&\ast\\\ast&0&\ast\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\ast&\ast\\0&\ast&\ast\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\\ast&\ast&0\\\ast&\ast&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\\ast&0&\ast\\\ast&0&\ast\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\\ast&\ast&0\\\ast&\ast&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&0&1\\\ast&\ast&0\\\ast&\ast&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\\ast&0&\ast\\\ast&0&\ast\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&\ast&\ast\\0&\ast&\ast\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\\ast&\ast&1\\\ast&\ast&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\ast&\ast&0\\0&0&1\\\ast&\ast&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\ast&\ast&0\\\ast&\ast&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\ast&\ast&0\\\ast&\ast&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\ast&\ast&0\\0&0&0\\\ast&\ast&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\\ast&\ast&0\\\ast&\ast&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\ast&\ast&0\\\ast&\ast&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\ast&0&\ast\\\ast&0&\ast\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&\ast&\ast\\0&\ast&\ast\\0&1&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\ast&\ast&0\\\ast&\ast&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\ast&0&\ast\\\ast&0&\ast\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&\ast&\ast\\0&\ast&\ast\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&\ast&\ast\\1&0&0\\0&\ast&\ast\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&\ast&\ast\\1&\ast&\ast\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&\ast&\ast\\0&\ast&\ast\end{pmatrix}.$$

Среди этих матриц будут совпадающие. Их легко найти. Получим 84 матрицы, на основе которых задаются отношения между тремя элементами в их представлении матрицами размерности 3. Запишем их в явном виде:

$$\begin{pmatrix}10&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Матрицы, анализируемые нами, делятся на три вида. Первый вид образуют матрицы, в каждой строке которых содержится один значимый элемент. Второй тип содержит в каждом столбце один значимый элемент. Третий тип имеет пару элементов либо в одной строке, либо в одном столбце. Есть также элементы, которые содержат в одной строке или в одном столбце по три значимых элемента. Для упрощения анализа все значимые элементы одинаковы. Однако и такой набор матриц интересен с разных точек зрения. Прежде всего, понятно, мы рассматриваем элементы группы перестановок из трех элементов, а также систему правых и левых идеалов на матричной операции.

Применим к матрицам комбинаторные операции по строкам или по столбцам, а также суммирование мест значимых элементов по модулю числа, равного размерности матриц.

Анализ дает закон, действующий в этом случае на паре матриц:

$$\sigma = x \overset{m}{+} \left(y \overset{k}{\times} x \right) = \left(x \overset{m}{+} y \right) \overset{k}{\times} x.$$

Для $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ получим $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Этот закон утверждает некую «логику» объектов. При рассмотрении пары чисел 0,1 и стандартных операций произведения и суммирования имеет место аналогичный закон. Но именно на нем основана «логика» расчета для двоичных чисел.

Ситуация становится сложнее, если матрицы содержат в одной строке или в одном столбце более одного элемента. В этом случает естественно ввести операцию деформации элементов, которая выполняется до применения указанных операций. Деформацию можно подчинить требованию, чтобы распределение значимых элементов по каждой строке или по каждому столбцу проводилось на основе однократного перемещения одного элемента.

В таком варианте комбинаторное произведение пары элементов по строкам превращается в произведение 9 элементов:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Произведение становится неоднозначным, неопределенным, если не известен механизм конкретной деформации. Заметим, что в данном случае неодинаковые элементы характеризуются совпадающими деформациями.

Следовательно, операции с деформациями элементов обладают новыми возможностями, которые присущи любой практике работы с информацией. Разная информация может быть представлена одинаково. Усвоение информации зависит от того, какой обработке это усвоение предшествовало. Результат информационного обмена может зависеть от того, насколько полно и качественно выполнена деформация исходных блоков информации. Понятно также, что сущность информации зависит от применяемых средств её получения и обработки. Оба указанных фактора естественно могут иметь разные технологические воплощения.

Возможности функциональных операций

Мы проанализировали ранее систему, состоящую из 9 матриц:

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$[1]=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, [2]=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, [3]=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$d=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, e=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, f=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Она подчинена некоммутативной, неассоциативной таблице:

$\overset{k}{\times}$	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f
a	$[1]$	$[3]$	$[2]$	a	c	b	d	f	e
b	$[2]$	$[1]$	$[3]$	b	a	c	e	d	f
c	$[3]$	$[2]$	$[1]$	c	b	a	f	e	d
$[1]$	d	f	e	$[1]$	$[3]$	$[2]$	a	c	b
$[2]$	e	d	f	$[2]$	$[1]$	$[3]$	b	a	c
$[3]$	f	e	d	$[3]$	$[2]$	$[1]$	c	b	a
d	a	c	b	d	f	e	$[1]$	$[3]$	$[2]$
e	b	a	c	e	d	f	$[2]$	$[1]$	$[3]$
f	c	b	a	f	e	d	$[3]$	$[2]$	$[1]$

.

Выполним суммирование указанных элементов на основе операции суммирования мест значимых элементов в строках при анализе сумм по модулю числа, равного размерности матриц.

Получим таблицу:

$\overset{m}{+}$	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f
a	e	f	d	b	c	a	$[2]$	$[3]$	$[1]$
b	f	d	e	c	a	b	$[3]$	$[1]$	$[2]$
c	d	e	f	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[1]$	b	c	a	$[2]$	$[3]$	$[1]$	e	f	d
$[2]$	c	a	b	$[3]$	$[1]$	$[2]$	f	d	e
$[3]$	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f
d	$[2]$	$[3]$	$[1]$	e	f	d	b	c	a
e	$[3]$	$[1]$	$[2]$	f	d	e	c	a	b
f	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f	a	b	c

.

Анализируемая система конформаций замкнута относительно комбинаторной операции по строкам матриц и относительно операции суммирования значимых мест по модулю размерности матриц. Легко показать систему законов, которым она подчинена. Среди законов есть структурно зеркальный и операционно анти зеркальный закон:

$$b\overset{m}{+}\left(a\overset{k}{\times}b\right)=\left(b\overset{m}{+}a\right)\overset{k}{\times}b.$$

Введем функциональные операции

$$x*y=(x\overset{k}{\times}y)\overset{m}{+}x,\ x\hat{+}y=\left(x\overset{m}{+}y\right)\overset{k}{\times}x.$$

На основании предыдущих таблиц получим новые таблицы для элементов:

$*$	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f
a	b	a	c	e	d	f	$[2]$	$[1]$	$[3]$
b	a	c	b	d	e	f	$[1]$	$[3]$	$[2]$
c	c	b	a	f	e	d	$[3]$	$[2]$	$[1]$
$[1]$	e	d	f	$[2]$	$[1]$	$[3]$	b	a	c
$[2]$	d	f	e	$[1]$	$[3]$	$[2]$	a	c	b
$[3]$	f	e	d	$[3]$	$[2]$	$[1]$	c	b	a
d	$[2]$	$[1]$	$[3]$	b	a	c	e	d	f
e	$[1]$	$[3]$	$[2]$	a	c	b	d	f	e
f	$[3]$	$[2]$	$[1]$	c	b	a	f	e	d

,

$\hat{+}$	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f
ξ_i	b	c	a	$[2]$	$[3]$	$[1]$	e	f	d

,

$$\xi_i \Rightarrow a,b,c,[1],[2],[3],d,e,f.$$

Таблица функционального суммирования с символом $\hat{+}$ уникальна в том смысле, что результат получается независимым от управляющего элемента: при любом первом элементе в этой сумме с другим элементом получается один и тот же результат. Более того, в каждой конформации любой управляющий элемент «сдвигает» управляемый элемент по циклу, образованному конформацией.

С операцией суммирования по модулю мест значимых элементов имеем закон

$$x*(y*z)\overset{m}{+}y*(z*x)\overset{m}{+}z*(x*y)=y*z\overset{m}{+}z*x\overset{m}{+}x*y.$$

Вследствие коммутативности произведения с символом $*$ имеем зеркальный закон

$$f(x,y,z)=f(z,y,x),$$

$$f(x,y,z)=x*(y*z)+y*(z*x)+z*(x*y).$$

Новые произведения генерируют новые свойства исходной системы элементов. Таблица произведений с символом $*$ частично ассоциативна. Например, получим

$$a*(d*[1])=a*b=a,(a*d)*[1]=1,$$

$$e*(e*e)=f*e=e,(e*e)*e=e.$$

Таблица суммирования с индексом $\hat{+}$ неассоциативна и некоммутативна:

$$(a\hat{+}b)\hat{+}c=c\hat{+}c=a,a\hat{+}(b\hat{+}c)=a\hat{+}a=b,$$

$$a\hat{+}b=c,b\hat{+}a=b.$$

На данном этапе исследования складывается впечатление, что есть трансфинитное соответствие объектов и активностей: изменения объектов имеют ряд сторон и граней, изменения операций имеют также ряд сторон и граней. Указанные изменения могут реализовываться независимо. Однако возможен вариант, когда изменения согласованы друг с другом. Более того, изменения объектов и активностей, структур и отношений могут быть подчинены системе динамических уравнений. В частности, это могут быть функциональные «весовые» связи для системы объектов и системы активностей.

Динамике структур можно поставить в соответствие динамику активностей. Динамика активностей может быть согласована с динамикой структур. В самом общем случае трансфинитный объект «владеет» системой структур и активностей, динамически согласованных друг с другом.

Понятно, что экспериментальное исследование физической Реальности с таким набором сторон и свойств возможно лишь в том случае, когда каждой структуре и активности поставлены в соответствие адекватные Реальности измерительные устройства и методики. Их сложно не только изготовить и применить. Их сложно даже понять и принять. По этой причине, что не исключено, некоторые теоретические «предсказания» можно будет проверить только косвенно. В некоторых случаях экспериментальная верификация не может быть выполнена уровневым объектов. Так устроен макромир с большими размерами. Так устроен микромир с особо малыми размерами. Однако во всех случаях эти обстоятельства не запрещают развитие и применение разнообразных расчетных средств и методик.

Операция с символом $*$ генерирует ряд новых законов. Если взять три элемента любой из трех конформаций, получим соотношения

$$f(x,y,z)=\begin{cases} f(xx,xy,xz), \\ f(yx,yy,yz), \\ f(zx,zy,zz). \end{cases}$$

Элементы, полученные при произведении слева исходных элементов на любой из них, подчинены условию равенства соответствующих функций Якоби.

Равны также функции Якоби для элементов разных конформаций, одинаково расположенных в них:

$$f(a,[1],d)=f(b,[2],e)=f(c,[3],f)=[3].$$

Ситуация усложняется, когда элементы берутся из разных конформаций и они расположены на разных местах. Так, получим, например, соотношения:

$$f([1],c,d)=f^2([1][1],[1]c,[1]d)=f([1][1],[1]c,[1]d)+f([1][1],[1]c,[1]d),$$

$$f^2([1],c,d)=2f(c[1],cc,cd),$$

$$f([1],c,d)=f^2(d[1],dc,dd)=f(d[1],dc,dd)+f(d[1],dc,dd),$$

$$f(a,[1],d)=f(aa,a[1],ad)\Rightarrow f(x,y,z)=f(\xi x,\xi y,\xi z),\xi=x,y,z,...$$

Указанные выражения для троек элементов дополняют законы, справедливые для всей системы элементов. Типичная картина состоит в том, что система элементов, замкнутая на одной или нескольких операциях, имеет систему законов локального вида. При изменении операций эти законы естественно меняются, как и при изменении самих элементов.

Мы приходим к пониманию, что операций может быть очень много, как и структур анализируемых объектов. По этой причине есть три вида перемен в системе объектов. Могут меняться объекты при неизменности и конечности системы операций. Могут меняться операции при неизменности и конечности самих объектов, их структур. Могут меняться и структура объектов, и система операций. Если изменения подчинены динамическим уравнениям, согласованным между собой, такой вид перемен наиболее сложен.

Следовательно, объекты и отношения софистатны структурно и функционально.

Новые законы получаются при конструировании операций «произведения» на основе комбинаторной операции на элементах, полученных наложением таблиц друг на друга. Для элементов, анализируемых нами, а также для указанных операций получим новые таблицы «произведений».

$(\alpha)\to\left(\overset{m}{+}*\right)$	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f
a	a	c	b	d	f	e	$[1]$	$[3]$	$[2]$
b	c	b	a	f	e	d	$[3]$	$[2]$	$[1]$
c	b	a	c	e	d	f	$[2]$	$[1]$	$[3]$
$[1]$	d	f	e	$[1]$	$[3]$	$[2]$	a	c	b
$[2]$	f	e	d	$[3]$	$[2]$	$[1]$	c	b	a
$[3]$	e	d	f	$[2]$	$[1]$	$[3]$	b	a	c
d	$[1]$	$[3]$	$[2]$	a	c	b	d	f	e
e	$[3]$	$[2]$	$[1]$	c	b	a	f	e	d
f	$[2]$	$[1]$	$[3]$	b	a	c	e	d	f

,

$(\beta)\to\left(*\overset{m}{+}\right)$	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f
a	d	e	f	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$
b	e	f	d	b	c	a	$[2]$	$[3]$	$[1]$
c	f	d	e	c	a	b	$[3]$	$[1]$	$[2]$
$[1]$	a	b	c	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f
$[2]$	b	c	a	$[2]$	$[3]$	$[1]$	e	f	d
$[3]$	c	a	b	$[3]$	$[1]$	$[2]$	f	d	e
d	$[1]$	$[2]$	$[3]$	d	e	f	a	b	c
e	$[2]$	$[3]$	$[1]$	e	f	d	b	c	a
f	$[3]$	$[1]$	$[2]$	f	d	e	c	a	b

.

На обоих таблицах имеем место зеркальный закон на функциях Якоби вида

$$f(x,y,z)=f(z,y,x).$$

Следовательно, на множестве объектов есть законы, инвариантные относительно операций.

Объединим полученные таблицы произведений на основе операции $\overset{m}{+}$. Получим закон

$$\underset{(\alpha)}{\xi}\overset{m}{+}\underset{(\beta)}{\eta}=[2].$$

Операция генерирует на паре разных элементов один и тот же элемент.

Анализ показывает, что есть другие законы, которые выполняются на рассматриваемой системе элементов независимо от операций, указанных выше. Так, в частности, получим условия

$$x^2 + y^2 = xy + yx,$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)^3.$$

Следовательно, с одной стороны, одна операция может действовать на разных множествах, подчиняя их одному закону. Такова стандартная матричная операция на матрицах. Этот факт давно известен. С другой стороны, разные операции могут действовать на одном множестве, подчиняясь одной и той же системе законов. Этот вариант указан выше.

Ситуация усложняется, если принять во внимание факт трансфинитности физической Реальности. Согласно этой модели объект имеет структуру на многих уровнях материи, содержится в себе или содержится в соответствующих базовых объектах. Имеет место связь между уровневыми объектами, в частности, не исключено иерархическое управление. Объект трансфинитной Реальности подчинен всегда и везде системе активностей. Они проявляют себя динамикой, деформацией, равновесиями. По этой причине возможно смешение структур и активностей, образуя активный лабиринт возможностей и связей. Поскольку активности имеют своё время проявления и релаксации, в реальной практике может присутствовать только часть информации. Она может быть недостаточна для принятия правильных выводов и следствий. Это замечание справедливо и для законов, проверенных эмпирически: они всегда условны в силу условных возможностей измерения.

Привычной практике математиков и физиков соответствует раздельное рассмотрение структур и активностей. Только после этого этапа происходит некоторое их объединение в той или другой модели. Пожалуй, более правильно уже на начальной стадии анализа и практики рассматривать структуры и активности как нечто единое целое. Правильно, скорее всего, полагать, что структуре присуща некоторая система активностей, а активности могут реализовывать себя на разных структурах. Естественная ограниченность математических, эмпирических и логических средств, присущая Человеку как уровневому объекту, может и должна сдерживать наши попытки принять законы, справедливые для всей Реальности, основываясь на фактах, доступных нашей практике. Это замечание кажется справедливым не только для физических Тел, но также и для Сознаний и Чувств, присущих Телам. Более того, это важно помнить при анализе трансфинитной Реальности, для которой естественны трансфинитные Тела, Сознания, Чувства. Еще более опасно для стратегии развития принуждение объектов и явлений подчинению некоторому одному правилу или одному закону, насколько бы он ни был трансфинитен. Ведь Реальность, как и Любовь, основаны не на принуждении, а на богатстве реализаций и проявлений.

Заключение

Реальность сейчас понятна для нас в её общем виде: это система трансфинитно структурных объектов с трансфинитно активными отношениями. Принимая эту точку зрения, мы вправе принять главное правило жизни: каждый объект в рамках своих возможностей обязан гармонично и оптимально функционировать вне и внутри себя. При отказе или при нарушении оптимальности и гармоничности функционирования генерируются неоправданные сложности и проблемы. Поэтому цель и смысл жизни состоит в том, чтобы обеспечить условия и реализовать гармоничное и оптимальное применение и изменение системы структурных объектов в системе трансфинитных активностей. Средствами для достижения цели жизни являются условия воспитания и обучения. Понятно, что воспитывать и обучать нужно прежде всего себя. Таковы контуры ожидаемого успеха.

Литература

1. Барыкин, В.Н. Неассоциативность на комбинаторной операции. – Минск : Ковчег, 2011. – 234 с.
2. Барыкин, В.Н. Деформация физических моделей. – Минск : Ковчег, 2012. – 176 с.
3. Барыкин, В.Н. Новые математические операции. – Минск : Ковчег, 2014. – 176 с.
4. Барыкин, В.Н. Физика и алгебра отношений. – Минск : Ковчег, 2015. – 308 с.
5. Барыкин, В.Н. Геометрия и топология отношений. – Минск : Ковчег, 2015. – 312 с.
6. Барыкин, В.Н. Неассоциативность в конечных системах. – Минск : Ковчег, 2015. – 220 с.
7. Барыкин, В.Н. Теория активных конформаций. – Минск : Ковчег, 2016. – 218 с.