Барыкин В.Н.

НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Минск
«Ковчег»
2014

УДК 530.12; 512.44
ББК 22.31
Б26

Барыкин, В. Н.
Б26 Новые математические операции / В. Н. Барыкин. – Минск : Ковчег, 2014. – 220 с.

ISBN 978-985-7086-44-3.

Представлены результаты анализа новых связей фундаментальной физики и математики, индуцированных введением новых математических операций. Проанализировано соотношение теории конечных групп с теорией непрерывных групп. Выведена система математических операций, ассоциированная с группой перестановок. Найдены универсальные законы для алгебр, независимые от мультипликативной операции. Они справедливы для ассоциативных и неассоциативных множеств. Предложены варианты анализа взаимодействия электрических и гравитационных предзарядов на основе обобщенной теории равновесия. Установлена связь общей теории равновесия с теорией когомологий групп и алгебр. Предложена концепция функциональных алгебр как фундамент любой физической модели. Предложен вариант динамической статистики, частными случаями которой являются статистики Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака. Поставлена задача анализа физических законов и управления ими на основе алгоритма деформации величин и операций.

Монография может быть полезна студентам вузов, специализирующимся в физике или математике, а также преподавателям по данным специальностям.

УДК 530.12; 512.44
ББК 22.31

ISBN 978-985-7086-44-3

© Барыкин В. Н., 2014
© Оформление. ООО «Ковчег», 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Одни и те же факты можно оценить по-разному и дать им разную интерпретацию. Это зависит от критериев анализа и от целей анализа. При нацеленности анализа на перспективу тонкости теории, эксперимента, практики могут иметь решающее значение. Сложно двигаться вперед, если нет ясности, где мы находимся и что мы можем. *Не менее важно иметь цель*, без наличия которой движение может быть бессмысленным. Цель становится конструктивной, когда она получает математическое и физическое выражение. Однако есть и другой аспект проблемы развития: математика и физика нужна всем. Не только потому, что они полезны на практике, но и по удобствам, которые они представляют: позволяют понять факты, исследовать законы, предсказать новое, предвидеть итоги деятельности. Математика и физика формируют Сознание и Чувства людей. Их горизонты и возможности согласованы с глубиной и качеством осознания и применения физики и математики. Математика и физика развивают волю, потому что для овладения их тайнами требуются настойчивость и упрямство. Они активизируют сознание, питая его красотой истин и позволяя по-новому оценить свои достоинства и место в жизни. Они развивает влюбленность человека, так как глубинные истины постигаются только через влюбленность в них. Беден человек, далекий от математики и физики. Человек интеллектуально слеп без математики и физики: закрыты глаза его сознания и души. Он интеллектуально глухой, так как не слышит музыку истин. Имеем ли мы право так обеднять себя? По этой причине представляет ценность деятельность, направленная на то, чтобы упростить представление математики и физики, сделать фундаментальные знания и приложения достижимыми и интересными широкому кругу лиц. Это делать необходимо, так как и физика, и математика в настоящее время достаточно сложны. Иногда овладение знаниями достигается проще при реализации синтеза физики и математики. Монография направлена на проявление и анализ такого синтеза.

Однако не уходим ли мы, постигая математику и физику, из реального мира в мир виртуальный? Насколько это опасно? В какой мере математика и физика позволяют познать тонкий мир, недоступный нашим ощущениям и сконструированным приборам? Способна ли и каким образом может описывать математика и физика Сознания и Чувства объектов? Каковы тогда законы управления ими?

Эти и другие вопросы обсуждены в предлагаемой монографии. В ней на простых примерах иллюстрируются новые связи математики и физики. Они дополняют океан законов, алгоритмов и следствий стандартной науки новыми фактами.

Цели монографии таковы: а) активизировать на новой основе конструктивную практику естествоиспытателей, б) предложить новые математические инструменты и алгоритмы для развития сознания и чувств лиц, применяющих математику и физику на практике, в) привлечь к математике и физике молодых исследователей, настроенных на фанатичное служение науке и истине.

Истоки новых идей

В фундаментальной физике существенная роль принадлежит объектам, сконструированным из конечного числа других объектов. В математике их описание основано на формализме конечных групп. Клейн показал, что такие группы изоморфны группе перестановок конечного числа элементов. В его подходе идет анализ объединения объектов с местами для объектов. Их комбинаторику можно математически представить матрицами и использовать для них стандартное матричное произведение. Его истоки находятся в алгоритмах решения систем линейных уравнений.

Ситуация меняется при сопоставлении одним объектам других объектов, задавая разными способами «отношения» между ними. Такой подход не только ближе к физике, он более фундаментален. Поясним этот тезис. Новейшая физика развивает идею, что все элементарные частицы образованы из частиц света и гравитации. Материя есть то, что создает свет и гравитация. Первичны для общего анализа ситуации структурная модель частиц света и физическая модель гравитации. Они базируются на концепции системы предзарядов $[1-4]$. Есть положительные и отрицательные электрические предзаряды. Они образованы из одних и тех же предпредзарядов в форме ориентированных «струн». В зависимости от того, сколько и каких предзарядов содержится в физическом объекте, зависят его структура и его свойства. По этой причине исходной точкой фундаментальной физики становится система, состоящая из четырех предзарядов. Она естественно согласуется с теорией конечных групп.

Выйдем за рамки концепции перестановок Клейна, заменив отношения между местами и объектами отношениями между объектами. Рассмотрим четыре предзаряда физической теории, полагая, что они имеют некоторые связи (отношения) с другой четверкой предзарядов. Обозначим каждый предзаряд номером: 1,2,3,4. Возможна комбинаторика их объединений друг с другом. Принимая элементы первой «четверки» в качестве базовых, мы вправе присоединять к ним элементы другой «четверки». Если присоединение ограничивается только объединением пар (в частности, так можно формально рассматривать парные «столкновения» объектов), мы приходим к обобщению модели «перестановок». Когда первый объект одного класса объединен с первым объектов второго класса, а другие объекты объединены аналогично, получим матричное представление в форме единичной матрицы. При других вариантах парного объединения получим все матрицы группы перестановок. Так будет задана система мономиальных матриц. Например, получим при «симметричном» распределении пар выражения вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они подчинены паре условий: в одной «ячейке» не может находиться более двух «объектов»; расположение объектов согласовано с суммой их номеров, оно симметрично с физической точки зрения. Этот вариант аналогичен требованиям, применяемым в статистике Ферми: на каждом энергетическом уровне в статистической системе может находиться только один электрон. При отказе от второго условия получим другие возможности, характеризующиеся меньшими значениями физической симметрии объединения объектов.

Принимая возможность объединения в «ячейке» большего числа объектов, мы принимаем идеологию статистики Бозе-Эйнштейна. В этом случае возможно, в частности, объединение объектов второго класса с одним или несколькими объектами первого класса. При объединении с одним элементом получим матричные представления вида

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

В других случаях получаются матрицы с произвольным расположением элементов. Например,

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Эти и другие «состояния» образуют полную систему в форме комбинации четырех элементов по 16 местам.

Ситуация усложняется при принятии нового условия: отношения между объектами могут быть как положительными, так и отрицательными. Фактически так обеспечивается расширение физической симметрии от кольца натуральных чисел к полю действительных чисел. Аналогично можно перейти к полю комплексных чисел, допуская новое условие: у физического объекта могут быть «скрытые» свойства.

На этой стадии возникает *проблема задания системы операций*, посредством которых можно выразить всю систему реальных отношений между физическими объектами. Здесь снова может быть применена аналогия с физикой. *Матричные операции*, как показал анализ $[2,3]$, аналогичны учету поступательных степеней свободы в теории. *Комбинаторные операции*, введенные недавно $[5]$, имеют спектр состояний, а потому и спектр возможностей, выражая колебательные и вращательные степени свободы физических объектов. Модель явления будет полна настолько, насколько полно в ней учитываются как структура объектов, так и отношения между объектами, которые принято называть взаимодействиями. На математическом языке этот тезис означает: *полнота модели зависит от того, какие величины (в частности, матрицы) используются в физической модели, и какие применены операторы и операции*. Естественно найти алгоритм конструирования моделей, удобный на практике и эффективный для модификации. Всякое изменение моделей можно трактовать как их деформацию. Деформация моделей зависит от того, как *деформируются величины, операторы, операции.* Решение этого вопроса неразрывно связано с теорией когомологий групп и алгебр, а также с их обобщениями.

Важную роль играет алгоритм учета условий измерения $[6]$. Ведь при измерениях в микромире мы фактически используем макроскопическую технику. Она влияет на явление, меняет его параметры. Более того, пришло время, когда исследуется настолько «тонкий» мир, что приборы не в состоянии измерять его параметры. Математика и физика вступают в *новый этап развития, когда расчету и мысленным экспериментам отводится главная роль.* Понятно, что новые данные могут и должны быть согласованы с теми данными, которые нам достоверно известны в настоящее время.

Конечно, решение таких задач потребует изменения наших представлений о Реальности, в том числе о Сознании и Чувствах каждого объекта Реальности, а также их совокупности. Моделирование Сознаний и Чувств выдвигается на передний план исследований. Конечно, на этом пути нужно будет менять Логику.

Спектр инвариантных скоростей

Заметим, что *классическая теория относительности вступает в противоречие с моделью категорий Аристотеля*. В этой модели к фундаментальным концепциям относятся категории отношения и места. Теория, предложенная Эйнштейном, не использует этих категорий. Категории отношения нет потому, что не принято во внимание взаимодействие измерительных приборов с электромагнитным полем. Можно, конечно считать, что неявно используется отношение, равное нулю. Но тогда следует применять преобразования Галилея $[2]$. Категория места также отсутствует в модели Эйнштейна. А её необходимо учесть. Ведь реальные *измерения производятся измерительными приборами в разных местах*. В формализме систем координат это обстоятельство не учитывается. В модели Эйнштейна концепция времени не соответствует экспериментальной ситуации. Принимая эквивалентность разных наблюдателей, мы вправе считать их измерительные приборы тождественными. Если тождественности нет, нужно вводить дополнительные условия для сравнения результатов измерений. В частности, интервалы времени в одинаково идущих часах будут для разных инерциальных наблюдателей одинаковы. Однако при расчете компонент скоростей, измеренных разными наблюдателями, мы вправе использовать разные расчетные, сравнительные интервалы времени. Они соответствуют анализу пространства скоростей. Фактически речь идет о неявном использовании модели расслоенного пространства и времени, в котором слоем является пространство скоростей в форме многообразия Минковского. Кроме этого, следует учесть факт экспериментально наблюдаемого различия частот поля, соответствующих разным инерциальным наблюдателям. Различие частот косвенно ассоциировано с различием применяемых для расчета интервалов времени.

При анализе преобразований для систем координат, ассоциированных с разными наблюдателями, мы пришли к модели $[1-6]$:

$$dx' = \gamma\left(dx - \overset{*}{u}dt\right), dt' = \gamma\left(dt - \frac{\overset{*}{u}}{\hat{c}^2}dx\right).$$

Она достаточна для формального анализа соотношения скоростей. Мы приняли преобразования дифференциалов координат и времени для того, чтобы анализировать соотношение скоростей. Они не вступают в противоречие с требованием «абсолютности» длин и времен для обоих наблюдателей, так как их соотношение характеризует пространство скоростей. Величины $\overset{*}{u}, \hat{c}^2$ могут быть разными. Их значения получены из анализа физики электромагнитных явлений $[1-6]$ в форме

$$\overset{*}{u} = (1-w)u_{fs} + wu_m, \hat{c} = \sqrt{w}\frac{c_0}{n}.$$

По этой причине инвариантным является значение скорости вида

$$\hat{c} = \sqrt{w}\frac{c_0}{n}.$$

Следовательно, применяемые преобразования обеспечивают инвариантность широкого спектра скоростей. Поэтому нет оснований для того, чтобы принимать «особенность» скорости света в вакууме, равно как и ограниченность скоростей материальных тел.

Анализ показал, что применение указанных преобразований есть замена группы Лорентца сигруппой Галилея-Лорентца (системой, объединяющей разные группы) $[6]$. Эту замену можно выполнить в несколько шагов $[6]$. Можно поступить иначе: принять правило произведения Даламбера для выполнения такой деформации. Тогда исходная матрица преобразований будет умножена на выражение вида

$$\sigma\begin{pmatrix} 1 & \tilde{u} \\ f\left(\tilde{u},n,w\right) & 1 \end{pmatrix}.$$

В нём элементы подбираются в соответствии с физическими условиями задачи. Понятно, что возможна и аддитивная деформация, которая дополнит мультипликативную деформацию. Общая деформация выглядит так:

$$A \to \hat{A} = A * B + P.$$

Принимая в преобразованиях Лорентца зависимость скорости света от показателя преломления, мы вводим в них в качестве параметров диэлектрическую и магнитную проницаемости $[2,6]$. Они порождают пару идентичных операторов Ли вида

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial t},$$

указывающих на деформацию временных координат. Введение показателя отношения в физическую модель ассоциировано с оператором

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}.$$

Однако из общего вида преобразований не следует конкретная форма величин и параметров, которые нужно использовать в модели, равно как и уравнения для них. Это естественно, так как физическая модель основывается не только на симметриях, но и на системе дополнительных условий и предположений.

Физическая потребность обобщения римановой геометрии

При анализе отношений между физическими объектами мы приходим к заключению, что они могут взаимодействовать друг с другом с помощью разнообразных средств. Это могут быть связи в форме «силовых линий», средства визуального или акустического обмена информацией, а также другие средства взаимного влияния. По этой причине геометрическая модель взаимодействия должна учитывать такую специфику и такие «детали». В частности концепция и структура расстояния между объектами, равно как и характеристики взаимного влияния могут и должны быть обобщены. Это могут быть мультипликативные или аддитивные средства, ассоциированные с обобщенной ситуацией. Например, можно применять модель вида

$$d\hat{s}^2 = \sum_{i=1}^{p}\varphi_i\left(a,b\right)ds_{ab}^2 + d\phi^2, \hat{\Gamma}^i_{\ jk} = \sum_{p=1}^{k}\phi_p\Gamma^i_{\ jk}\ldots$$

Фактически речь идет об использовании **функциональной конформной метрики**. Для её задания требуются дополнительные уравнения. Они не сводятся к геометрическим свойствам физической реальности. Дополнительные требования ассоциированы, в частности, с электродинамикой больших скоростей. Пространство скоростей в этом случае не укладывается в рамки римановой геометрии $[3,4]$. Однако риманова геометрия с использованием концепции геодезических позволяет объединить динамику объектов с нулевой и ненулевой массой $[3,4]$.

Физические модели на системе операций

Принимая идею моделирования реальности с использованием системы операций, мы можем учесть её в структуре моделей. В частности, применяемые величины могут быть «распределены» по операциям. Например, модель базируется на алгебраическом функционале вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow a^k b^p \left(\psi_k\left(\xi_i, \eta_j\right) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} + \psi_p\left(\xi_i, \eta_j\right) \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \right),$$

где величины $\left(\xi_i, \eta_j\right)$ обозначают семейство операций. Вариантов комбинаторики здесь много. Важно то, что динамические уравнения, посредством которых можно задать функции $\psi_\tau\left(\xi_i, \eta_j\right), a^k, b^p$, будут деформировать структуру и динамику объектов и явлений. Из их анализа можно в принципе сделать заключение о свойствах, которые необходимы и достаточны, чтобы объекты и явления не разрушались при деформациях. Более того, так можно указать условия перемен к лучшим вариантам и возможностям.

Другая возможность обобщения вытекает из использования мультиспиноров. Один «столбец» содержит, например, величины, характеризующие «физическое тело». Другой столбец (с правом использования новой операции) содержит величины, характеризующие Сознание. Эти величины согласованы с величинами, применяемыми для описания Тела. Третий столбец (с правом использования новой операции) содержит величины, характеризующие Чувства. Эти величины согласованы с величинами, применяемыми для описания Тела и Сознания. Получается так, что основой для полной модели становится модель, которая верифицирована экспериментальными средствами, привычными для описания Тел. К ней присоединены модели Сознаний и Чувств со своими величинами и со своими операциями. *Сознания, Чувства, Тела описываются единой моделью.*

Двойственность структур и симметрий, ассоциированная с парой мультипликативных операций

Применение теории групп в ядерной физике по сути своей началось с использования группы $SU(2)$. В подходе, разрабатываемом теперь, речь идет об описании *системы отношений для пары объектов*. В ядерной физике ими были протон и нейтрон. В общем случае это может быть любая пара объектов. По этой причине желательно исследовать зависимость алгебры отношений от операций, используемых в системе объектов. Ограничим анализ матричной и комбинаторной операциями. Так реализуется *операционная* *двойственность* анализа, которая была недоступна ранее. Применим стандартный подход. Базис алгебры группы $SU(2)$ зададим матрицами

$$a_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

с коммутационными условиями

$$\lfloor a_i, a_j \rfloor = i\sum_k \varepsilon_{ij}^k a_k.$$

Выберем другой базис:

$$X_\pm = a_1 \pm i a_2 \to X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = a_3.$$

Тогда на матричном произведении получим условия

$$[X_3, X_\pm] = \pm X_\pm, [X_+, X_-] = 2X_3.$$

На комбинаторном произведении ситуация сложнее:

$$[X_+, X_-] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \{X_+, X_-\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\left([X_+, X_-] + \{X_+, X_-\}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[X_3, X_+] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \{X_3, X_+\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[X_3, X_-] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \{X_3, X_-\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \{X_3, X_-\} - [X_3, X_-] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Алгебра на комбинаторном произведении задана на основе коммутаторов и антикоммутаторов:

$$\{X_3, X_+\} - [X_3, X_+] = X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2X_3 X_- = 2X_+ X_3,$$

$$\{X_3, X_+\} + [X_3, X_+] = -X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2X_3 X_+ = -X_- X_+,$$

$$\frac{1}{2}\left([X_+, X_-] + \{X_+, X_-\}\right) + \{X_3, X_-\} - [X_3, X_-] = 2X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Этот вариант интересен с физической точки зрения. Единая теория электромагнетизма и гравитации объединяет коммутаторы и антикоммутаторы на группе заполнения. Единые законы для таких ситуаций содержат коммутаторы и антикоммутаторы. Аналогичная математика появляется при анализе отношений в паре объектов, анализируемых на основе комбинаторной операции. Принимая в рассмотрение пару мультипликативных операций, мы фактически принимаем наличие двух «сторон» у одной и той же структуры, у одного и того же явления. *Двойственность операций ассоциирована с двойственностью поведения* *объектов и двойственностью их структур*. Такая точка зрения естественна для моделирования трансфинитной реальности $\left[2-6\right]$, так как, согласно основному постулату, *физические объекты трансфинитны по структуре и поведению*. Трансфинитность частично раскрывается на основе использования системы операций. Принимая одну операцию в качестве скрытой операции, мы приходим к *алгебре скрытых отношений*.

Алгебра меняется при изменении базиса. Пусть заданы матрицы

$$x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Тогда на комбинаторном произведении для них получим условия

$$xy=-yx=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}, xz=zx=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}, yz=-zy=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},$$
$$\{xy\}=xy+yx=0,\{xz\}=xz-zx=0,\{yz\}=yz+zy=0,$$
$$(xy)y=(xz)z=(zx)z=x=-(yx)y,(yx)x=(yz)z=-(zy)z=-(xy)x=y,$$
$$(zx)x=(xz)x=(zy)y=-(yz)y=z.$$

Эти соотношения аналогичны вторым членам в разложении группы Ли в ряд в касательном пространстве группы:

$$\{xz\}z=2x,[yz]z=2y,\{zx\}x=[zy]y=2z.$$

В единую систему снова объединены коммутаторы и антикоммутаторы. Имеем «зеркальную» систему алгебр:

$$\{xz\}z\pm z[zx]=2x,$$
$$[yz]z\pm z\{zy\}=2y,$$
$$\{zx\}x\pm x[xz]=2z,[zy]y\pm y\{yz\}=2z\ .$$

На матричном произведении ситуация иная. Произведения элементов порождают связи

$$xy=-yx=z, xz=-zx=y, yz=-zy=x,$$
$$[xy]=xy-yx=2z,[xz]=xz-zx=2y,[yz]=yz-zy=2x,$$
$$\{xy\}=xy+yx=0,\{xz\}=xz+zx=0,\{yz\}=yz+zy=0,$$
$$-(xy)y=(xz)z=-(zx)z=(yx)y=x,(yx)x=(yz)z=-(zy)z=-(xy)x=y,$$
$$(zx)x=-(xz)x=-(zy)y=(yz)y=z.$$

Получим соотношения на коммутаторах в форме

$$[xz]z=2x,[yz]z=2y,[zx]x=[yz]y=2z.$$

Их можно записать иначе, учитывая равенство нулю антикоммутаторов. Тогда

$$[xz]z \pm z\{zx\} = 2x,$$
$$[yz]z \pm z\{zy\} = 2y,$$
$$[zx]x \pm x\{xz\} = 2z, [yz]y \pm y\{zy\} = 2z.$$

Алгебры, ассоциированные с парой операций, имеют один общий закон

$$[yz]z \pm z\{zy\} = 2y.$$

Другие законы отличаются друг от друга, по-разному «оттеняя» коммутаторы и антикоммутаторы. Естественно рассматривать на паре объектов другие операции, исследуя таким образом весь «спектр» их свойств.

Деформация отношений в паре объектов

Практика убеждает нас в том, что *жизнеспособны только те объекты, которые устойчивы к деформациям.* Под деформацией принято понимать изменение одного или нескольких элементов объекта или его свойств под влиянием внешних или внутренних условий и обстоятельств. В силу принципа софистатности структуры объектов и их свойств, мы обязаны рассматривать их согласованные деформации. В частности, это могут быть изменения, ассоциированные с деформациями и отображаемые системой операций. В силу данного обстоятельства важно исследовать «чувствительность» алгебр к деформациям. Интересно получить ответ на вопрос: может ли алгебра, «нечувствительная» к деформациям, управлять структурой и поведением физических объектов? Нужны ли новые математические инструменты для анализа деформации отношений?

Рассмотрим простейший случай изменения одного элемента алгебры и ассоциированную с ним «реакцию» в алгебре. Локально деформируем базис алгебры, анализируемой выше. Пусть

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x + \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произведения элементов, предполагая, что с ними ассоциированы взаимодействия объектов. На матричной операции получим такие изменения:

$$\hat{x}z = xz + (-1)\begin{pmatrix} 0 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = y - \sigma, z\hat{x} = zx + \begin{pmatrix} 0 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -y + \sigma,$$
$$\{\hat{x}z\} = 0, [\hat{x}z] = 2y - 2\sigma, [\hat{x}z]z = 2\hat{x},$$
$$[z, \hat{x}]\hat{x} = (-2y + 2\sigma)(x + \sigma) = 2z + 2\sigma(\hat{x} - y),$$
$$[\hat{x}, y]z = (2 + (\alpha - 1))\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \{\hat{x}, y\}z = (\alpha - 1)z,$$
$$\{\hat{x}, y\} + [x, y] = 2z - (\alpha - 1)(z + e), e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Локальные деформации базовых элементов алгебры дополняют стандартные связи коммутаторов и анти коммутаторов. На комбинаторной операции ситуация эти изменения, естественно, имеют другой вид. Действительно, получим, например

$$\hat{x}z = xz + \begin{pmatrix} 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = y + \begin{pmatrix} 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, z\hat{x} = zx + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} = y + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

$$\left\{\hat{x}z\right\} = \hat{x}z - z\hat{x} = \left(\alpha-1\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \left\{\hat{x}z\right\} = (2+\left(\alpha-1\right))\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\left\{\hat{x}z\right\} z = (2+\left(\alpha-1\right))x = 2\hat{x} + \left(\alpha-1\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Локальная деформация базовых элементов алгебры соответствует *нетривиальным добавкам в структуре алгебры, скрытым при использовании канонических базовых элементов.*

Однако деформация не выходит за рамки универсального закона для алгебр

$$\left\{x,\left[y,z\right]\right\} + \left[x,\left\{y,z\right\}\right] - \left[\left\{x,y\right\},z\right] - \left\{\left[x,y\right],z\right\} - 2\left(x,y,z\right) - 2\left(z,y,x\right) = 0.$$

Локальной деформации базового элемента соответствует сумма исходного базиса и дополнения к нему. Например,

$$x \to x + \hat{x}.$$

Исходный универсальный закон для исходного базиса аддитивно дополняется аналогичным законом для элемента, задающего дополнение к базису.

«Творческие возможности» пары объектов

Пусть даны две пары объектов. В одной паре взаимодействие между объектами «нейтрально», они «свободны», хотя «открыты» для взаимодействия с другой парой. Пусть первый объект влияет на себя положительно, а второй объект влияет на себя отрицательно. В другой паре отношения первого объекта аналогичны первому объекту первой пары, а второй объект отрицательно относится к первому объекту. Зададим эту ситуацию матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так в простейшем случае заданы два типа матриц, которым мы «приписываем», соответственно, гравитационные и электрические свойства. Примем пару операций для описания «взаимодействия» этих объектов.

На матричной операции получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итогом взаимодействия стало полное превращение отрицательных отношений в положительные. *Изменилось качество отношений* в данной паре объектов. Произошло превращение отрицательных «зарядов» в положительные «заряды». Объектов нового типа не появилось.

На комбинаторной операции получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом варианте произошло частичное изменение отрицательных «зарядов» на положительные «заряды». Появился объект нового типа: первый объект не изменил отношение к себе, но присоединил отрицательное отношение ко второму объекту. Второй объект «передал» то отрицательное состояние, которое он имел, первому объекту. После этого второй объект начал относиться к себе и к окружающему миру нейтрально. Изменилось не только качество отношений, *изменилось качество самих объектов.*

Пусть заданы три пары «электрического типа»

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На матричном произведении для них получим вариант *«сохранения типа»* объектов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

На комбинаторном произведении получаем *совокупность объектов нового типа*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пара операций имеет в данном случае принципиально разные свойства по «взаимодействию» объектов. Аналогично выглядит вариант «взаимодействия» объектов «гравитационного типа». Пусть заданы пары, соответствующие отношениям вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На матричной операции «взаимодействие» сохраняет тип объектов, так как

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Комбинаторная операция меняет тип объектов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При «взаимодействии» объектов «электрического типа» обе операции ведут себя дополнительно. Так, матричная операция порождает объекты нового типа:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Комбинаторная операция в таких ситуациях сохраняет тип объектов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Каким является минимальное количество данных, достаточное для порождения широкого семейства объектов? Мы используем для ответа на этот вопрос пару объектов, пару операций, указанных выше, а также пару ориентаций в отношениях (положительную и отрицательную). Оказывается, что этих шести свойств достаточно для конструирования совокупности объектов с полной системой свойств. Проиллюстрируем этот тезис на примере. Возьмем пару «свободных» объектов с учетом возможности различной их ориентации

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Применим к ним пару операций. Получим исходные базовые объекты, характерные для всего множества:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ldots$$

Скрытыми условиями в данной постановке задачи является наличие совокупности объектов, а также возможность их взаимодействия согласно системе операций. Если объектов нет, равно как и их взаимодействий, ничего произойти не может. Примем точку зрения, что операции, как и ориентации, можно считать положительными и отрицательными. Тогда отсутствие объектов и операций есть состояние, в котором имеет место их «компенсация». Такое «отсутствие» формально. Оно характеризует состояние без проявления свойств. Но именно так живет большинство людей с точки зрения их социального проявления.

Заметим, что моделирование частиц света и гравитации основано в настоящее время на группе заполнения физических моделей. Она указана в Приложении 1. В ней есть пара кватернионов и тройка антикватернионов. Один антикватернион в форме совокупности диагональных матриц $\{c_i\}$ играет особую роль. Он позволяет взаимно преобразовывать кватернионы и антикватернионы. По этой причине мы получаем первичное подтверждение идеи, что *возможно взаимное преобразование электромагнетизма и гравитации.*

Замечания по поводу структуры физических теорий

Развитие теории симметрий привело к построению физических моделей, согласованных с ними. Особая роль в начале прошлого века была отведена группе Лорентца и Пуанкаре. Неприводимые представления этих групп использовались для конструирования линейных релятивистски инвариантных уравнений. С появлением идеи зависимости параметров групп от координат и времени «поля» начали «выводить» согласно алгоритму калибровочных полей. С другой стороны, согласно Дираку, уравнение для электрона было получено решением обратной задачи: нахождением «квадратного корня» из волнового уравнения. Впервые появились уравнения, записанные на основе алгебры Клиффорда. Однако отсюда было еще далеко до идеи, что структура уравнений может и должна быть согласована со структурой исследуемых объектов. Более того, такой подход никак не приветствовался в теории поля, согласно которой поле есть непрерывная, бесструктурная сущность. Это требование многообразно проявилось в исследованиях по теории света и по гравитации. Новая концепция, обоснованная более 30 лет назад, требует учета структурности объектов и проявления этой структурности в физических моделях. Тогда меняется центральное звено конструирования моделей. На место группы Лорентца и других групп, применяемых в калибровочных теориях, ставится группа перестановок конечного числа базовых объектов, а также ее модификации. В этом случае следует указать место группы перестановок в физической теории, а также алгоритмы ее применения при моделировании. Понятно, что следует согласовать новый подход с предыдущими вариантами, рассмотреть плюсы и минусы различных алгоритмов. Теории, заданные в тензорном виде, соответствуют тривиальному представлению группы подстановок, когда каждому базовому элементу ставится в соответствие число 1. Другими словами, принят вариант описания экспериментальных данных без учета фактора структурности, который «стоит» за ними. Если же мы желаем учесть структурность, уравнения следует записать на основе матриц с размерностью, равной количеству анализируемых базовых объектов. В электродинамике базовыми объектами мы может считать объекты, имеющие положительный или отрицательный электрический заряд. Таких базовых объектов два и матрицы перестановок имеют размерность два. Если же ввести в рассмотрение еще и массу, то базовых объектов будет три. Тогда модель следует конструировать на матрицах размерности три. Если же принять идею, что есть пара электрических и пара гравитационных предзарядов, то требуются матрицы размерности четыре. Анализ показал, что возможны все указанные варианты записи основных уравнений физики. Другими словами, обосновано применение группы перестановок в качестве фундамента для моделирования физических моделей. Более того, установлено, что все фундаментальные модели имеют одну типовую структуру: они задают элементы функциональной алгебры. В этом случае появляются новые возможности деформации модели, а также учета динамики ее составных элементов. Калибровочные группы, в том числе группы Галилея и Лорентца «отходят на второй план» как при моделировании теории, так и при получении следствий из них. Дифференциальное продолжение уравнений Максвелла [3,4] позволило ввести в рассмотрение качественно новые «поля», которые можно рассматривать как структуры, дополнительные к калибровочным полям. Этот подход расширяет теорию электромагнитного и гравитационного поля, не исключая построение их структурных моделей.

Числа и операции

Современная система обозначения объектов буквами начата индусами. Позднее она развивалась арабами и греками. В настоящее время она общепринята. Проиллюстрируем некоторые ее положения на простом примере квадратного уравнения. Покажем, что на данной стадии возможно использование разных произведений и разных числовых систем. Так, на основе матричного произведения для матриц второго порядка получим спектр свойств:

$$x^2 = -1 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2 = 0 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2 = 1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Эти примеры иллюстрируют комплексные, дуальные и двойные числа. На основе стандартного комбинаторного произведения спектр свойств изменится:

$$x^2 = [-1] \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2 = 0 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2 = [1] \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Изменились также используемые «единицы» множества матриц. На простом примере становится понятен факт, что решения уравнений будут разными в зависимости от того, какие используются числа и операции. Другими словами, решения согласованы с алгебраическим пространством, в которое они вкладываются.

Чем сложнее числа и операции, тем более «тонко» исследуется реальность. Этот тезис согласуется с принципом софистатности физических и математических изделий. Одно усложнение порождает и взаимно согласуется с другим.

По сути дела, данный логический квадрат:

числа	*операции*
функции	*решения*

присутствует в любой математической задаче, образуя фундамент модели. Указанные элементы моделирования и практики согласованы друг с другом, Развитие любого элемента влияет на другие элементы. Мы имеем дело с морфологически заданной, условно полной системой элементов для анализа данных и предсказания новых вариантов и возможностей. При решении физических задач естественно возникают вопросы, связанные с полнотой представления экспериментальных данных в рамках некоторого математического подхода. Ведь может быть так, что модель математически достаточна для анализа экспериментальных данных. Но может быть так, что она неполна или не оптимальна для данной задачи и данных условий практики. Не исключено, что она хороша для текущей практики, но дает некорректные предсказания на будущее.

В практике естествоиспытателей присутствуют три аспекта в любой проблеме:

количество	*изменения*	*качество*

.

Нужно описать все это, учитывая наличие структуры и активности объектов: их фундаментальных свойств. Заметим, что концепция непрерывности задает определенный тип структуры, который столь же «практичен», как и тип структуры, задаваемый концепцией дискретности. Пара фундаментальных свойств реальных объектов ассоциирована с парой фундаментальных свойств математических объектов, поставленных им в соответствие:

	структуры	*согласования*	*активности*
"*физика*"	a_i	$\Leftrightarrow$	b_j
согласования	$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
математика	$\hat{a}_i$	$\Leftrightarrow$	$\hat{b}_j$

.

Заметим, что функции, ассоциированные со структурами, способны порождать новое качество чисел и операций, а также новые задачи. Эта связь фундаментальна для практики и её всегда нужно корректно учитывать. В качестве примера рассмотрим плоский прямоугольный треугольник, длины катетов (a,b) которого равны единице. Согласно теореме Пифагора квадрат гипотенузы c равен сумме квадратов катетов $c^2 = a^2 + b^2$. Длина гипотенузы есть $c = \sqrt{2}$. Она задается иррациональным числом, которое невозможно представить в виде частного от натуральных чисел. В аналогичной роли выступает число

$$\pi = 3{,}14159265\ldots = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 +}}}}\ldots$$

Посредством его задается связь длины окружности l с радиусом окружности r:

$$l = 2\pi r .$$

Иррациональные числа появляются как для прямолинейных, так и для круговых отрезков.

Принимая указанное выше соответствие между структурами и их свойствами, мы вправе провести аналогию с парой фундаментальных движений: прямолинейным и вращательным. Следовательно, *геометрические структуры через свои свойства «подсказывают» нам ассоциированные с ними активности*: есть прямолинейные и вращательные движения, и они также должны характеризоваться не только рациональными, но и иррациональными числами.

Но иррациональные числа неизмеримы в эксперименте. По этой причине естественно принять точку зрения, что в любых механических движениях скрыта информация. Она недоступна измерению, но доступна сознанию: *у сознания есть возможности, которые выходят за пределы эксперимента.*

Новые числа привлекательны для логического и математического анализа. Так, Кантор и Дедекинд проанализировали соотношение рациональных и иррациональных чисел на основе интуитивного *представления о непрерывности* для последовательности чисел. Было принято условное логическое соглашение, согласно которому числовое множество «разбито» на рациональные и иррациональны «сечения», каждое из которых *подчинено **своим** законам*. У рационального сечения есть наибольшие и наименьшие числа, у иррациональных сечений в одном их классе нет наибольшего, а в другом классе нет наименьшего. Наличие разных свойств чисел, находящихся в одной совокупности, меняет качество данного множества.

Следовательно, качество числового множества зависит от того, с какими *дополнительными структурами* оно ассоциировано, на какую практику «нацелено».

Подход Вейерштрасса к анализу свойств иррациональных чисел другой. Он принял точку зрения, что числа равны, если они отличаются друг от друга меньше, чем на очень малое рациональное число. Тогда каждому числу можно поставить в соответствие точку, переходя, по сути дела, к *совокупности дискретных представлений* числовой последовательности, отличающейся выбором интервала сравнения чисел. Этот подход ближе к экспериментальной практике, так как измерения всегда проводятся с определенной точностью, она устанавливает «диапазон достоверности данных».

Отличие идеального эксперимента по Кантору и Дедекинду от реального эксперимента по Вейерштрассу ассоциировано здесь с парой принципиально различных подходов к описанию реальности: полевому или непрерывному и дискретному, называемому квантовым. Недостаток слова «квантовый» в том, что «квант» рассматривается бесструктурным и потому это слово неэффективно выражает концепцию дискретности.

При наличии различных структур возникает проблема их согласования между собой. С физической точки зрения и следуя практике, прямоугольный треугольник и окружность сильно отличаются друг от друга. Однако их можно рассматривать как «похожие» изделия. С топологической точки зрения мы имеем дело с одним объектом, у которого есть два представления. Аналитически это легко показать. Выполнив преобразование координат, получим соответствие:

$$a^2 + b^2 = c^2 \to \left(\frac{a}{c} = \xi, \frac{b}{c} = \eta \right) \to \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Возможно и обратная трансформация. Понятно, что в этом подходе не учитывается дополнительная информация о величине углов треугольника, о длинах его сторон. Формальная «близость» далека от реальной близости, у которой есть много граней. Физический подход к математическим структурам способен наполнить анализ новым содержанием. Так, дискретность сторон прямоугольного треугольника, с экспериментальной точки зрения, имеет конструктивное происхождение, если все стороны треугольника изготовлены из одинаковых «деталей», соединенных между собой. Задача может состоять в том, чтобы из них собрать прямоугольные треугольники разной величины. Эту задачу легко решить, и она полезна не только для математической практики.

Следуя Клейну, рассмотрим прямую, проходящую через точку окружности $S(\xi=-1,\eta=0)$. Тогда $\eta=\lambda(\xi+1)$. Решения уравнения для окружности выразятся через целые числа (m,n):

$$\xi=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2},\eta=\frac{2mn}{m^2+n^2}.$$

Полученные уравнения можно трактовать как аналог алгоритма для анализа «спектра состояний», порождаемых парой объектов: окружностью и отрезком прямой. Выберем $m=n+1$. Получим

$$\frac{\xi}{\eta}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}\to\frac{3}{4},\frac{5}{12},\frac{7}{24},\frac{9}{40}\ldots\Rightarrow\frac{3}{4+\cfrac{5}{12+\cfrac{7}{24}}}\ldots$$

С физической точки зрения эти формулы «подсказывают», что дискретность спектров для физических объектов может быть обусловлена тем, что *объект состоит из некоторых базовых «деталей»*. В зависимости от того, из каких базовых элементов и как «собраны» изделия, зависят его физические «спектральные свойства». Эти свойства прямо или косвенно ассоциированы с энергетическими проявлениями изделий. В данном случае иррациональные числа получаются из рациональных. Поскольку принимается взаимное соответствие структур и активностей, оно должно быть верным и для числовых систем. Поэтому следует ожидать, что рациональные числа по какому-то алгоритму могут получаться из иррациональных чисел. В частности, это возможно, если алгоритмически деформируются их «хвосты». Другими словами, пара иррациональных чисел объединяется с иррациональным числом, которое представляет собой сумму «их хвостов». Тогда сложение исходных чисел с вычитанием «суммы хвостов» дает рациональное число.

Уравнение окружности можно интерпретировать как условие на квадрат расстояния в евклидовом пространстве. Мы формально имеем дело с величиной

$$l^2=\eta_{lm}x^l x^m,\eta_{lm}=diag(1,1),$$

заданной на основе евклидовой метрики η_{lm}. Если рассматривать условие Пифагора в качествен метрического условия для объектов с нулевой длиной (изотропный мир), мы получим квадрат длины с неевклидовой трехметрикой:

$$\eta_{kn}=diag(1,1,-1).$$

Числители и знаменатель полученных выражений базируются на одной метрике:

$$m^2-n^2=\xi_{ij}m^i m^j-\xi_{ij}n^i n^j\to\xi_{ij}=diag(1,1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$m^2+n^2=\xi_{ij}m^i m^j+\xi_{ij}n^i n^j\to\xi_{ij}=diag(1,1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$2mn = \varsigma_{ij} m^i n^j \to \varsigma_{ij} = diag(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Они могут быть записаны на основе совокупности матриц с использованием операции сложения. В этом случае мы имеем дело с алгеброй и алгебраическими выражениями:

$$m^2 - n^2 \to \left(m^2 - n^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3} m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} m \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} m \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \frac{1}{2} n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$m^2 + n^2 \to \left(m^2 + n^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2mn = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Совокупность иррациональных чисел ассоциирована с геометрическими фигурами, выступая в роли *«приманки» для интеллекта* и подтверждая факт, что совокупность известных свойств и качеств может быть дополнена совокупностью неизвестных и скрытых свойств и качеств. С точки зрения естествоиспытателей, такие отличия естественны, так как *в эксперименте всегда есть как произвол, так и неполнота.*

Алгебраическое представление рациональных решений уравнения Пифагора приводит к совокупности матриц:

$$A \to \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, B \to \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$C \to \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$D \to \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы получили четыре множества матриц, ассоциированных со структурой, объединяющей окружность и семейство пересекающих её прямых. Взаимные матричные произведения элементов не зависят от порядка сомножителей. Множества коммутативны. Каждый элемент имеет обратный, произведение с которым дает единичную матрицу. Произведения подчинены условию ассоциативности

$$a(bc) = (ab)c.$$

Следовательно, мы имеем семейство групп. Группы A, B, C просты. Они не имеют подгрупп (подмножеств, имеющих свойства группы), кроме тривиальной, состоящей из единичных матриц и самой группы. Группа D имеет подгруппу и смежный класс, который получится при произведении элементов группы, не входящих в подгруппу, на подгруппу. Мы получаем множество, называемое факторгруппой:

$$H \to \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$A \to \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ее элементы имеют свойства, типовые для факторгрупп:

$$HH \to H, HA \approx AH \to A, AA \to H.$$

Соотношение группы, подгруппы и факторгруппы принято записывать в форме

$$1 \to H \to {}^{G}\!/\!_{H} \to G \to 1.$$

Она называется точной последовательностью. Морфологически так записан «текст»: у группы G есть нормальная подгруппа H, с которой ассоциирована факторгруппа ${}^{G}\!/\!_{H}$. Подгруппа H выполняет функцию единицы в факторгруппе, аналогичную роли единицы в группе G.

Матрицы, которыми задаются группы, способны иллюстрировать явные и скрытые свойства исследуемой системы. Для этого используем алгоритм сопоставления матрицам дифференциальных уравнений и их решений. Для явных решений, ассоциированных с исследуемыми геометрическими объектами в форме прямой и окружности, он выглядит так:

$$\left(\begin{array}{c|cc} & \partial_x & \partial_y \\ \hline x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(x\partial_x + y\partial_y \right)\Phi = 0 \to \Phi = \frac{x}{y} + const_a,$$
$$\left(\begin{array}{c|cc} & \partial_x & \partial_y \\ \hline x & 0 & -1 \\ y & 1 & 0 \end{array} \right) \to \left(-x\partial_y + y\partial_x \right)\Phi = 0 \to \Phi = x^2 + y^2 + const_b.$$

Алгоритм обнаруживает также скрытые свойства:

$$\left(\begin{array}{c|cc} & \partial_x & \partial_y \\ \hline x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \end{array} \right) \to \left(x\partial_y + y\partial_x \right)\Phi = 0 \to x^2 - y^2 = const_p,$$
$$\left(\begin{array}{c|cc} & \partial_x & \partial_y \\ \hline x & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 \end{array} \right) \to \left(x\partial_x - y\partial_y \right)\Phi = 0 \to xy = const.$$

Последнее выражение аналогично соотношению неопределенности, если заменить координаты их дифференциалами, а также рассмотреть производные по ним как по независимым переменным. Получим

$$\left(\begin{array}{c|cc} & \partial_{\Delta x} & \partial_{\Delta y} \\ \hline \Delta x & 1 & 0 \\ \Delta \frac{1}{2} y & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\Delta x \partial_{\Delta x} - \Delta y \partial_{\Delta y}\right)\Phi = 0 \to \Delta x \Delta y = const.$$

Естественно предположить, что реальность подчинена не только данному условию. Можно применять в анализе, по крайней мере, три дополнительных условия, поскольку используемые матрицы образуют полную систему. Отсюда косвенно следует, что возможно построение полной системы «законов неопределенности». Они будут выполняться по отдельности или совместно. Это зависит от условий, в которых находятся объекты. Следовательно, «геометрические», визуальные представления, опирающиеся на их математические свойства, позволяют обнаружить на простых задачах не только фундаментальные математические структуры, но и фундаментальные физические свойства. Дополним перечень свойств, введя алгоритм действия группы на множестве. Рассмотрим движение точек на плоскости, управляемое элементами группы:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \gamma \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$y = ct, y' = ct', a = -\frac{u}{c}, \gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Получим преобразования координат, соответствующие группе Лорентца:

$$x' = \frac{x - \frac{u}{c} ct}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, ct' = \frac{ct - \frac{u}{c} x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Выполним деформацию матриц посредством скаляра w. Получим движение точек на плоскости согласно закону

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \bar{\gamma} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{u}{c^2} w & 0 \\ 0 & -u \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

На данной стадии можно применять дополнительные условия. Их различие регулируется физикой явлений, зависимой от исследуемых структур и их активностей. Ограничимся без дополнительного обоснования преобразованиями координат с определителем, равным единице.

Тогда

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}w}}, t' = \frac{t-\frac{u}{c^2}wx}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}w}}.$$

При $w=0$ из них следуют преобразования Галилея, а при $w=1$ это будут преобразования Лорентца. Формальное изменение закона движения точек легко и просто привело нас к базовым структурам фундаментальной физики. Естественно назвать объект, объединяющий систему групп, *сигруппой*. Учитывая указанные симметрии, традиционно относящиеся к нерелятивистской и релятивистской физике, можно предположить, что мы имеем математический «мост» между двумя разными разделами физики. Это соответствует действительности.

Анализ динамики света показал, что *начальная стадия динамического процесса измерения параметров света описывается группой Галилея, а итоговая стадия процесса измерения соответствует группе Лорентца* $[1-6]$.

Мы вправе рассматривать *движения точек на плоскости* как законы, управляющие «активностью» этих точек. Тогда следует признать **три факта**, вытекающие из такой практики.

А) Во-первых, основой математического описания активности изделий является симметрия, управляющая этой активностью. В данном случае это матричная группа, согласованная с размерностью плоскости. Понятно, что физические изделия должны иметь математический образ. Для точек он задается их координатами. Другими словами, для описания активности требуется задать *величины, условия их активности, а также симметрию*, которая управляет величинами.

Б) Во-вторых, скалярная деформация симметрии задает семейство симметрий, что позволяет выполнить объединение симметрий. Оно имеет фундаментальное значение для физики, так как пригодно для анализа процессов, согласованных с изменением скаляра. В более сложном случае эта деформация может быть сложнее. Более того, она может быть подчинена, как и параметры симметрии, динамическим уравнениям. Следовательно, нужно учесть *возможности и варианты деформации симметрий, величин, дополнительных условий практики*. Их нужно согласовывать с физическими условиями задачи, задавая, в частности, уравнения динамики для каждого элемента модели.

В) В-третьих, исследование активности изделий интересно само по себе, однако более важно найти закономерности использования данного алгоритма движений для реальных физических изделий. Говоря иначе, следует на основе анализа симметрий, величин, условий равновесия и динамики конструировать модели изделий и их активностей, адекватные практике.

Данные факты следуют из анализа задачи, которая кажется простейшей. Практика показала, что это не так. Они пригодны для выражения широкой совокупности свойств изделий и явлений. Возможно, они пригодны для любых объектов и явлений. Тогда законы движения точек на плоскости следует признать фундаментальными фактами. Задача моделирования других объектов и явлений может решаться по аналогии с ними.

Укажем новые грани фундаментального моделирования, следующие из формального математического анализа свойств используемых чисел. Ведь координаты точек на плоскости задавались числами. Естественно провести их анализ для уточнения структуры и функции чисел. Этой цели можно достичь, стартуя с анализа уравнения $x^2=-1$. Его решения задаются числами $x_{1,2}=\pm\sqrt{-1}=i$, которым сложно дать физическую интерпретацию. Нужен абстрактный, формальный подход к анализу структуры и свойств чисел. Эйлер, Гаусс, Грассман, Гамильтон приняли концепцию расширения модели чисел. Так были формально введены комплексные числа

$$a^* = x + iy, \bar{a}^* = x - iy.$$

Комплексное число в его представлении вектором на полукомплексной плоскости с реперами $(1, i)$ имеет «длину» (модуль) и угол наклона вектора к оси Ox:

$$|a| = \sqrt{a^* \bar{a}^*} = \sqrt{x^2 + y^2}, tg\alpha = \frac{y}{x}.$$

Выполним умножение комплексного числа на другое комплексное число $p = a + ib.$ Тогда

$$x_1 + iy_1 = (x + iy)(a + ib) = (xa - yb) + i(ay + bx).$$

Получим новые выражения для длины вектора и тангенса угла наклона к оси Ox:

$$x_1^2 + y_1^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2), tg\alpha_1 = \frac{ay + bx}{xa - yb}.$$

Произведение комплексного числа на другое комплексное число можно интерпретировать как **поворот, согласованный с растяжением**. Произведение компонент задается **условным комбинаторным произведением**, в котором используется как сумма произведений, так и их разность. Это различие можно формально выразить фигурными скобками при суммировании и квадратными скобками при вычитании. Тогда получим

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{c}{\times}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}{\begin{matrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} ib & ia \end{Bmatrix} \end{matrix}} = (xa - yb) + i(xb + ya).$$

Здесь обнаруживаются истоки пары различных операций: антисимметричной и симметричной. Они могут быть представлены в форме разных детерминантов. В одном выражении есть антисимметрия и потому применяется стандартное выражение для детерминанта. В другом выражении все знаки в сумме произведений одинаковы. Получим

$$\begin{bmatrix} x & y \\ b & a \end{bmatrix} = xa - yb, \begin{Bmatrix} x & y \\ a & b \end{Bmatrix} = xb + ya.$$

Анализ комплексных чисел и их произведений указывает на наличие пары фундаментальных свойств реальности: антисимметричных и антисимметричных. Физика подтверждает такую возможность. Антисимметричные, электромагнитные свойства реальности дополнительны их симметричным, массодинамическим (гравитационным) свойствам.

В более ярком виде согласованность «сокращения» и «вращения» проявляется при анализе числовых систем, названных кватернионами. Они обобщают комплексные числа. Кватернион, следуя Гамильтону, задается действительными числами и представляет собой элемент четырехмерного линейного пространства с базисом $(1, i, j, k)$. Его вид таков

$$q = d + ia + jb + kc \ \bar{q} = d - ia - jb - kc.$$

Реперы подчинены условиям:

$$1^2 = 1, i \cdot 1 = 1 \cdot i = i, j \cdot 1 = 1 \cdot j = j, k \cdot 1 = 1 \cdot k = k,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j.$$

Произведение кватернионов

$$Q = qp = (d + ia + jb + kc)(w + ix + jy + kz) = (dw - ax - by - cz) +$$
$$+ i(aw + dx + bz - cz) + j(bw + dy + cx - az) + k(cw + dz + ay - bx)$$

можно записать на основе модели симметричного и антисимметричного детерминанта. Так, получим

$$\frac{d \quad w}{\begin{Bmatrix} ia & ix \\ jb & jy \\ kc & kz \end{Bmatrix}} = i(aw + dx) + j(bw + dy) + k(cw + dz),$$

$$\begin{bmatrix} ia & ix \\ jb & jy \end{bmatrix} = ij(ay - bx), \begin{bmatrix} ia & ix \\ kc & kz \end{bmatrix} = ik(az - cx), \begin{bmatrix} jb & jy \\ kc & kz \end{bmatrix} = jk(bz - cy).$$

Мы подошли к важной и интересной физико-математической проблеме. Будем рассматривать числа как выражения свойств объектов, а произведение и сумму чисел как аналог взаимодействия. Изменению математических параметров поставим в соответствие реальное физическое изменение. Известно, что взаимодействие одного физического объекта с другим сводится, с точки зрения механических движений, к согласованному изменению направления движения и вращения. И комплексные числа, и кватернионы явно обеспечивают это согласование. Следовательно, математические структуры могут быть адекватны физическим изделиям, если к величинам и симметриям в форме групп будут добавлены операции, порождающие алгебры.

Ранее мы приняли фундаментальный постулат, что *структуры согласованы с активностями*. Поэтому согласованное изменение скорости и вращения может и должно находить свое проявление в изменении структуры объектов. Мы пришли к **новому фундаментальному факту**: величины, группы, алгебры задают базовый «треугольник свойств» структур и активностей физических объектов.

Анализ изменения кватернионов при их произведении показал, что меняется величина кватерниона, и он имеет поворот, согласованный с изменением величины. Ситуация аналогична той, которая имела место для комплексных чисел. По этой причине, с интуитивной точки зрения, кватернионы пригодны для описания динамики объектов в том случае, когда происходит согласованное изменение скоростей и частот, характеризующих объект. Именно такие изменения наблюдаются при анализе динамики света. Эти факты *косвенно свидетельствуют о наличии структуры у частиц света*. Заметим, что релятивистская электродинамика Максвелла может быть построена на кватернионах, заданных матрицами четвертого порядка. С одной стороны, так учитываются указанные выше обстоятельства. С другой стороны, кватернионы косвенно свидетельствуют о структуре частиц света: наличии пары противоположных по знаку электрических предзарядов и пары противоположных по знаку гравитационных предзарядов. Отношения между ними могут быть записаны на основе мономиальных матриц порядка четыре.

При анализе структуры матричных уравнений электродинамики и массодинамики мы замечаем, что одни уравнения могут быть преобразованы в другие при частичном самовоздействии объектов. Умножая базовые матрицы на кватернионы без «сдвига» и со «сдвигом», мы преобразуем один тип теории в другой тип теории. Следовательно, электромагнетизм и гравитация «близки» друг к другу. Эту «близость» желательно довести до технологического применения. *Есть физический механизм преобразования гравитации в электромагнетизм.*

Группа автоморфизмов окружности

Начальная структурная модель частиц света, представленная в работах $[1-6]$, базируется на предположении, что есть пара электрических предзарядов и пара гравитационных предзарядов. Электрические предзаряды геометрически аналогичны «ежам». Они изготовлены, с геометрической точки зрения, из одномерных, ориентированных отрезков. Гравитационные предзаряды аналогичны «розам» в форме совокупности окружностей с одним центром, соединенных между собой.

Для построения модели взаимодействия электрических и гравитационных предзарядов желательно получить некоторые предварительные общие результаты, опираясь на аналогию с геометрией. Простейшие данные получим на основе анализа квадратного уравнения в форме уравнения окружности, полагая, что выбор на ней пары точек обусловлен ее пересечением с одномерным отрезком. Тогда произведение точек способно «породить» третью точку, сравнение которой с предыдущими иллюстрирует «динамику» явления, косвенно иллюстрируя взаимодействие различных предзарядов. Аналогичные приемы используются в проективной геометрии.

Сконструируем группу движения точек по окружности

$$\xi^2+\eta^2=1\to\left(\xi^2=x,\eta^2=y\right)\to x+y=1$$

на основе группы Галуа для квадратного уравнения. Представим точки с координатами (x,y) матрицами:

$$A(x_1,y_1)\to x_1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+y_1\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},B(x_2,y_2)\to x_2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Определим произведение точек A,B на основе произведения матриц:

$$C=AB\to\begin{pmatrix}x_1x_2+y_1y_2 & x_1y_2+y_1x_2\\ x_1y_2+y_1x_2 & x_1x_2+y_1y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3&y_3\\y_3&x_3\end{pmatrix}.$$

Произведение точек дает точку, находящуюся на окружности:

$$x_3+y_3=(x_1+y_1)(x_2+y_2)=1\cdot1=1.$$

Произведение коммутативно и ассоциативно. На окружности есть точка, выполняющая роль единичного элемента

$$e \to \Pi(x=1, y=0).$$

Точки на окружности имеют обратные точки. Они подчинены системе уравнений:

$$xx^{-1} + yy^{-1} = 1,$$
$$xy^{-1} + yx^{-1} = 0.$$

Ее решения при $x \neq y$ таковы:

$$x^{-1} = \frac{x}{x^2 - y^2}, y^{-1} = -\frac{y}{x^2 - y^2}.$$

При $x = y$ получим пару иррациональных точек, так как

$$2\xi^2 = 1, \xi = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, группа Галуа для квадратного уравнения ассоциирована с **группой движения рациональных точек** окружности.

Специфика данного отображения в том, что четыре точки при произведении на себя отображаются в единицу. Они «обратны себе». Их координаты таковы:

$$\theta_i, i = 1,2,3,4 \to \{A(-1,0), B(0,1), C(1,0), D(0,-1)\}.$$

Аналогичный анализ пригоден для такого варианта:

$$\xi^2 - \eta^2 = 1 \to (\xi^2 = x, \eta^2 = y) \to x - y = 1.$$

Сопоставим точкам (x, y) матрицы:

$$A(x_1, y_1) \to x_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B(x_2, y_2) \to x_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим «произведение точек» A, B на основе их матричного представления:

$$C = AB \to \begin{pmatrix} x_1x_2 + y_1y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ -(x_1y_2 + y_1x_2) & x_1x_2 + y_1y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_3 & \hat{y}_3 \\ \hat{y}_3 & \hat{x}_3 \end{pmatrix}.$$

Произведение точек дает точку, находящуюся на гиперболе: $\hat{x}_3 - \hat{y}_3 = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) = 1 \cdot 1 = 1.$ Предложим физическую интерпретацию. Будем рассматривать пару точек как объект, объединенный посредством одномерного отрезка. Он не обязан быть отрезком прямой, что допускает дополнительные возможности физической интерпретации. Примем ассоциацию одномерного отрезка с элементом электрического предзаряда, имеющего форму «ежа». Примем интерпретацию окружности (гиперболы) как замкнутого или незамкнутого «лепестка роз», представляющего гравитационный предзаряд. Тогда можно предположить, что автоморфизм окружности ассоциирован с изменением гравитационного предзаряда под влиянием электрического предзаряда. Поскольку мы получаем из двух точек одну точку, мы вправе считать, что так изменилось положение точки B при воздействии электрического предзаряда на неё через точку A. Если рассматривать окружность как аналог твердого тела, это произведение описывает поворот окружности вокруг центра. Тогда можно предположить, что влияние электрического предзаряда на гравитационный задает поворот гравитационного предзаряда.

Ситуация меняется, если в аналогичной постановке окружность «сдвинуть» влево на расстояние a. Тогда отсутствует симметрия окружности относительно начала координат, выступающей в роли центра симметрии. Объект «потерял симметрию» вследствие сдвига относительно начала координат. Её можно «восстановить» на основе параллельного переноса окружности.

Примем исходное правило сопоставления точкам матриц, а также указанное выше правило матричного произведения. Получим соотношения:

$$A(x_1, y_1) \to (x_1 + a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B(x_2, y_2) \to (x_2 + a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим произведение точек A, B на основе произведения матриц:

$$C = AB \to \begin{pmatrix} (x_1+a)(x_2+a)+y_1y_2 & (x_1+a)y_2+y_1(x_2+a) \\ (x_1+a)y_2+y_1(x_2+a) & (x_1+a)(x_2+a)+y_1y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 & \bar{y}_3 \\ \bar{y}_3 & \bar{x}_3 \end{pmatrix}.$$

В данном случае получим $\bar{x}_3 + \bar{y}_3 = 1$. Следовательно, матричное произведение точек на одной окружности порождает точки, находящиеся на окружности, симметричной относительно начала координат. Произведение точек «породило» точки, находящиеся за пределами исходного множества. Такая ситуация стандартна для многообразия, которое не является группой. В данном случае, наоборот, *групповая операция «выводит элементы» за пределы своего множества.*

Для того, чтобы получить точки, расположенные на той же окружности, следует изменить операцию. Достаточно дополнить произведение слагаемым:

$$C = AB + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a.$$

В этом варианте нарушается ассоциативность:

$$(A \times B) \times C = (AB)C + (C + E)a, A \times (B \times C) = A(BC) + (A + E)a,$$
$$(A \times B) \times C - A \times (B \times C) = (C - A)a.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае ассоциативная, групповая операция «сдвигает» окружность, дает элементы, выходящие за пределы исходного множества. Неассоциативная, не групповая операция не выводит элементы за пределы множества, реализует некоторый поворот окружности.

На данной стадии мы вправе предположить, что анализ действия групп на многообразиях может стать достаточным алгоритмом для анализа взаимодействия предзарядов. Может быть, мы находимся у истоков новой модели взаимодействия, базирующейся на разных многообразиях и алгебрах.

Согласованность структур и активностей

Рассмотрим задачу заполнения жидкостью стакана конечной емкости с объемом 4 единицы посредством второй емкости с объемом 1 единица. Понятно, что сумма заполнений не может превысить 4 единицы. Поэтому таблица суммирования заполнений выглядит так:

$$\begin{pmatrix} + & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2(1) & 3(1) & 4(1) & 1(2) \\ 2 & 3(1) & 4(1) & 1(2) & 2(2) \\ 3 & 4(1) & 1(2) & 2(2) & 3(2) \\ 4 & 1(1) & 2(2) & 3(2) & 4(2) \end{pmatrix}.$$

Числа в скобках обозначают номер заполняемой емкости. Одна половина таблицы (до второстепенной диагонали) задает таблицу сложения для первого стакана. Вторая половина таблицы (с второй диагональю) задает таблицу сложения для второго стакана.

Если не принимать во внимание индексы чисел, можно представить таблицу сложения алгебраическим выражением:

$$TП \to 1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оно составлено из пары элементов, принадлежащих нормальной подгруппе и пары элементов, принадлежащих ее смежному классу. Совокупность матриц заполняет все «ячейки» матрицы произведений без пересечения. По этой причине становится возможным конструирование других операций на основе матриц с аналогичными свойствами заполнения всех «ячеек» и без пересечения элементов. Заметим, что *при наличии «пересечений» можно ввести сопряженные произведения, используя дополнительные условия*.

Следовательно, структура *дискретного заполнения* объекта конечного размера задается таблицей сложения по модулю числа, соответствующего его максимальному объему.

Аналогично можно рассчитывать прохождение «трассы» по сторонам правильного многоугольника, записывая результат по прохождению каждой его вершины. Структуру движений можно задать аналогичной таблицей. Рассмотрим четыре пронумерованных объекта. Укажем направление движения (зададим ориентацию). Зададим правило сложения, указывая на первом месте номер объекта, а на втором месте количество «шагов» по ориентации. Итогом будем считать номер того объекта, к которому «приводит» указанный алгоритм.

В рассматриваемом случае единым образом рассматриваются качественно разные свойства. Такие варианты чаще всего встречаются на практике. Они усложняют анализ. Однако, тем не менее, они допускают математическое выражение и разные варианты интерпретации.

Суммирование по схеме вида

4	→	1
↑		↓
3	←	2

дает таблицу «заполнения» активностей. Следовательно, **таблица суммирования «заполнений» структур и активностей может быть идентичной.** Проиллюстрируем этот факт таблицей вида

$$\left(\begin{array}{c|cccc} + & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Однако логично принять расширенный подход, когда между собой соединены разные операции. *Одна операция описывает структуры, а другая операция описывает активности*. В этом случае, естественно, потребуется согласование операций на основе дополнительного условия или совокупности условий. Физически корректно задать операцию заполнения стакана жидкостью таблицей с нулями:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} + & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она соответствует реальной физической ситуации: после полного заполнения стакана жидкостью его дополнение (наполнение) равно нулю. Мы получили три математических объекта. Это идемпотент, элемент, равный транспонированному и элемент, обратный себе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^t = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что представленные матрицы при взаимном произведении «порождают» все элементы матричной алгебры порядка три, а также группу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и полугруппу (моноид) вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Моноид частично порождает элементы матричной алгебры. Мы «на ровном месте» получаем возможность насладиться удивительными качествами простых конечных объектов с конечными свойствами.

Анализируемая совокупность элементов получает новое качество, если выполнить ее преобразование посредством произведения слева и справа на ассоциированную матрицу этого произведения. Мы получим пару групп, традиционно применяемых в разных задачах:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, алгоритм произведения (как для структур, так и для активностей) может быть использован в качестве инструмента для «порождения» алгебр и групп. В рассматриваемом случае неассоциативным становится сложение:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} + & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Например, получим

$$(2+3)+4=0+4=4, 2+(3+4)=2+0=2.$$

Это естественно для задачи заполнения стакана жидкостью. Здесь есть несколько сторон, ассоциированных со свойствами операций. Во-первых, операция может быть обусловлена конкретными условиями практики или эксперимента и потому в сложных ситуациях на это обстоятельство нужно обращать внимание. Во-вторых, даже суммирование, которое интуитивно представляется как ассоциативная операция, может быть неассоциативным. Другими словами, «истоком» неассоциативности может быть операция. В-третьих, из-за принятого согласования активностей и структур следует, что неассоциативность обусловлена структурой исследуемого изделия. Эти обстоятельства, так или иначе, многократно встречались на практике.

Действительно, неассоциативно векторное произведение векторов. Неассоциативно произведение Ли. Тождество Якоби на коммутаторах величин есть равенство

$$\lfloor a[bc]\rfloor+\lfloor b[ca]\rfloor+\lfloor c[ab]\rfloor=0.$$

Данная операция меняет знак при перестановке сомножителей. Поэтому

$$\lfloor a[bc]\rfloor-\lfloor [ab]c\rfloor=\lfloor [ca]b\rfloor\neq 0.$$

Комбинаторная операция и ее обобщения ассоциированы с группами. Они задают неассоциативность по другим алгоритмам. Это важно, потому что есть основания полагать, что Сознания и Чувства можно описывать на основе неассоциативной математики. Она не обязана копировать математику, применяемую для описания физических тел. Наличие спектра операций с неассоциативными свойствами позволяет рассматривать принципиально новые модели. В том числе могут быть модели для молекул, атомов, элементарных частиц.

Рассмотрим конечное множество из двух элементов $\left[-1,1\right]$. Оно имеет стандартные свойства мультипликативной группы на операции произведения действительных чисел. Ситуация меняется, если изменить операцию. Введем *операцию ориентированной трансляции*: первое число меняется в соответствии с тем направлением и количеством шагов, которые указаны во втором слагаемом, а итогу сопоставим объект, полученный после выполнения указанных шагов. Получим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|cc} \overset{\leftrightarrow}{\times} & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Эта операция некоммутативна. Она также неассоциативна. Например, получим

$$-1\overset{\leftrightarrow}{+}\left(-1\overset{\leftrightarrow}{+}1\right)\neq\left(-1\overset{\leftrightarrow}{+}(-1)\right)\overset{\leftrightarrow}{+}1.$$

Следовательно, свойства конечного множества зависят от того, какая операция действует на этом множестве. Это обстоятельство стандартно и привычно. Однако часто операция сохраняет ассоциативность. В данном случае этого нет. Более того, множество перестало быть группой.

Свойства операции могут измениться при изменении количества объектов. Так, получим

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} \overset{\leftrightarrow}{+} & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -2 & 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

В этом случае операция на множестве коммутативна и ассоциативна. На указанном выше множестве из двух элементов эта операция была некоммутативна и неассоциативна.

Операции в форме знаковой и трансляционной групп

Определим знаковую группу на основе столбца знаков с использованием стандартного произведения знаков, полагая, что эта группа действует на каждый столбец матрицы, меняя знаки элементов. Для матриц четвертого порядка операции на *знаковой группе и* операции на *группе трансляции значимых элементов* можно представить в спинорной форме:

$$\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\\\leftarrow\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\leftarrow\\\leftarrow\\\rightarrow\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\leftarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\end{pmatrix}.$$

Применим операцию на знаковой группе для расширения группы перестановок Клейна. В этом варианте мы снова соединяем воедино разные элементы, каждый из которых по-своему фундаментален. Так получается потому, что эти элементы отображают различные фундаментальные свойства структур и активностей. Их композиция порождает изделие с качественно новыми свойствами и возможностями приложений.

Получим совокупность матриц:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},e_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$c_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},f_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$c_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},f_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$c_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},f_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},a_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Так задана таблица произведений элементов c_i на элементы e_i. Мы получили, с точностью до произведения на минус единицу, группу заполнения физических моделей. Она порождает матричную алгебру на матрицах четвертого порядка. Элементы, обозначенные одинаковыми буквами, есть нормальные подгруппы данной группы, если их дополнить единичной матрицей и аналогичными матрицами, элементы которой умножены на минус единицу.

На этой основе можно получить фундаментальное соотношение свойств непрерывных и дискретных групп. Действительно, непрерывная группа характеризуется своей алгеброй. Эта алгебра представлена совокупностью матриц. Рассмотрим, в частности, представления групп в четырехмерном пространстве, так как физические модели в основном задаются в таком пространстве.

Тогда мы имеем для характеристики любой непрерывной группы совокупность матриц порядка четыре. Она естественно задается в виде матричной алгебры над группой $Z_2\rightarrow[1,-1]$.

Заметим, что элементы матричной алгебры выражаются через элементы группы заполнения. Поэтому справедлив вывод: **алгебра *непрерывных групп* есть групповая алгебра, базирующаяся на *дискретной группе.***

Справедлива и обратная связь: **система непрерывных групп, которая порождает матричную алгебру, ассоциирована с дискретной группой заполнения физических моделей.**

Дискретные и непрерывные свойства симметрии образуют единую систему. Это замечание важно для устранения «пропасти» между дискретными и непрерывными симметриями. Кроме этого, появляются основания для нового понимания и интерпретации соотношения непрерывности и дискретности в физике. То, что непрерывно, имеет в своей основе дискретность. То, что дискретно, базируется на непрерывности. В физике эти положения известны давно. Так, непрерывные среды, например, жидкости, имеют в своей основе дискретность в форме молекул и атомов. Так, непрерывные волновые функции квантовой механики имеют в своей основе дискретный спектр энергий. Обратно, совокупность дискретных объектов, например, атомов, может проявлять себя как непрерывный объект. С аналогичной ситуацией мы имеем дело в теории света и гравитации. Их непрерывные свойства задают проявления системы дискретных объектов. Их дискретные свойства в совокупности объектов проявляют характеристики непрерывности. Заметим, что знаковая группа порождает систему функциональных свойств на множестве объектов. Рассмотрим функцию изменения знака, используя знаковую группу порядка три:

$$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \end{pmatrix}.$$

Применим элемент этой группы к паре матриц группы S_3 :

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть функцией будет изменение знака элементов матриц под влиянием элемента знаковой группы. Например,

$$f(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для указанных матриц получим *непривычный закон*:

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) g_2 + f(g_2) g_1.$$

У разных пар элементов законы могут быть разными. Возможно, есть какой-то единый закон, но большинство законов индивидуальны. Другими словами, группа операций порождает на множестве *совокупность функциональных законов*, некоторые из которых не применялись в математической практике.

Рассмотрим другой вариант расширения группы: на основе группы трансляций. Так можно расширить симметрийную группу S_3 до симметрийной группы S_4. Алгоритм прост. На первом этапе выполним *тривиальное размерностное расширение* группы S_3:

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На втором этапе выполним трансляции. Анализ можно упростить, ограничив трансляции соответствиями:

$$a \Rightarrow \begin{pmatrix} \to \\ \leftarrow \\ \to \\ \leftarrow \end{pmatrix}, b \Rightarrow \begin{pmatrix} \to \\ \leftarrow \\ \to \\ \leftarrow \end{pmatrix}, c \Rightarrow \begin{pmatrix} \to \\ \to \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}, d \Rightarrow \begin{pmatrix} \to \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \to \end{pmatrix}, e \Rightarrow \begin{pmatrix} \to \\ \to \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}, f \Rightarrow \begin{pmatrix} \to \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \to \end{pmatrix}.$$

Группа S_4 содержит нормальную подгруппу Клейна. Она представлена матрицами $a_i, i = 1, 2, 3, 4.$ На ее основе выполнено расширение группы до группы заполнения с использованием знаковой группы. Она получается также из одного элемента на основе группы трансляций. Другие совокупности матриц, обозначенные другими буквами, задают смежные классы симметрической группы S_4. Заметим, что электродинамика и массодинамика эффективно записываются на основе группы заполнения физических моделей. Они имеют форму левого $G-$модуля и не меняются при произведении слева на элементы симметрической группы. По этой причине фундаментальные физические модели имеют различные матричные представления, которые не меняют векторного вида уравнений. Другими словами, *есть скрытая симметрия уравнений*, базирующаяся на дискретной группе, представляющей собой трансляционное расширение группы Клейна.

Такая симметрия имеет место во всех случаях при использовании мономиальных матриц, в структуре физических моделей и при их деформации каноническими мономиальными матрицами. Более сложные деформации моделей приводят к более сложным уравнениям, которые могут иметь эмпирический базис. Другими словами, формальная деформация физических моделей может быть физически содержательной.

Функциональные алгебры

Проведенный анализ используем для исследования структуры физических моделей. Мы знаем, что уравнения электродинамики и массодинамики имеют изящную форму, если их записывать в форме элементов групповой алгебры, базируясь на группе заполнения физических моделей. Структурные элементы групповой алгебры составлены из указанных матриц, к которым присоединены дифференциальные или кодифференциальные операторы и волновые функции. Их вид прост:

$$a^i \partial_i \Psi + b^i \partial_i \bar{\Psi} = \Phi ...$$

Ситуация математически выглядит сложнее, если уравнения записаны на основе матриц Дирака $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_4$. Рассмотрим выбор матриц

$$\gamma_0 = b_1, \gamma_1 = b_2, \gamma_3 = c_3, \gamma_4 = f_1.$$

Тогда $b_1 b_1 = -E, \gamma_0 \gamma_1 = b_3, \gamma_2 \gamma_3 = a_1, \gamma_2 (\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) = a_2, \gamma_3 (\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) = a_3.$ Групповая алгебра выглядит громоздко при ее выражении через матрицы Дирака. Заметим, что есть еще пять базисов Дирака, которые порождают группу заполнения физических моделей. Запишем их через пять элементов:

$$\begin{gathered}(b_1, b_2, f_1, c_3, e_2), (b_3, b_2, f_2, c_2, e_3), (a_1, a_3, f_1, c_1, e_3), \\ (b_1, b_3, f_3, c_1, e_1), (a_3, a_2, f_3, c_2, e_2), (a_1, a_2, f_2, c_3, e_1).\end{gathered}$$

Так получаются «изомеры» физической модели. Они имеют «близкий вид». Но их внутренние возможности могут быть разными. В частности, модели, представленные разными базисными матрицами, *могут быть различными по возможностям передачи информации и по спектру внутренней энергии*. Мы акцентировали внимание на моделях, в которых используются матричные операции по произведению матриц и по сложению матриц.

В настоящее время ясно, что есть множество операций. В частности, есть система комбинаторных операций. Они имеют принципиальное отличие от стандартного произведения матриц. В некотором смысле **изобретено «колесо операций».** Дополнительный физический смысл приобрели операции сложения по модулю как алгоритмы учета свойств заполнения конечных систем. Это могут быть, в частности, *информационные или чувственные заполнения*. Естественно рассмотреть модели, в которых реализовано соединение разных объектов, операций и дополнительных условий. В стандартных физических моделях присутствуют именно такие конструкции.

Примем определение: **функциональная алгебра** есть математическое изделие, составленное из математических объектов, системы операций и дополнительных условий, достаточное для описания свойств реальных изделий.

Примеры:

а) стандартные физические модели,

б) модель этики, использующая матричную и комбинаторную операции для матриц [7] ,

в) модель Сознания, базирующаяся на матрицах, комбинаторной операции и сложению по модулю [8],

г) другие модели, использующие другие системы операций…

Во всех моделях используются волновые функции и система операторов. В зависимости от того, какие они, и как они соединены, мы получим разные модели. Почти всегда их можно представить в форме суммы произведения матриц. Одни матрицы будут без операторов, а другие матрицы содержат операторы. Следовательно, *каждая физическая модель есть функциональная алгебра*.

Операции, согласующиеся с элементами множества

Пусть роль базового множества выполняет совокупность трех объектов. Она достаточно интересна с физической точки зрения: это молекула воды, тройка кварков, тройка аминокислот в кодонах ДНК и т.д. Анализ их физических свойств может быть дополнен анализом их математических свойств.

Рассмотрим *последовательность операций*, согласующуюся с выбором элементов множества. Пусть заданы три единичных репера

$$col\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}, col\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}, col\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, которая преобразует их друг в друга, действуя последовательно и трансформируясь в соответствии с заданными условиями. Получим следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = 1, b_2 = c_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = 1,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 1 & 0 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow a_3 = 0, b_3 = 1, c_3 = 0 \Rightarrow\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K.$$

Следовательно, все матрицы группы S_3 можно рассматривать как согласованные трансформации различных комбинаций реперов. Рассматривая вектора, ассоциированные с ними, получим систему векторов: «ежик», первые компоненты векторов принадлежат первому элементу в выбранной комбинации и т.д.

Алгебраически преобразуем трехмерное представление элементов группы S_3 в двумерное представление. С физической точки зрения мы переходим из трехмерного пространства в двумерное. Нам понадобится плоскость со своими реперами, а также три точки, так как мы имеем дело с тремя исходными объектами.

Мы можем поставить задачу по-другому: каковы алгоритмы проектирования многообразия величин разной размерности? Простейший алгоритм преобразования объектов большей размерности в объекты меньшей размерности состоит в том, что часть слагаемых фиксируется. Их как бы не замечают. Аналогично от меньшей размерности объектов можно перейти к большей размерности, формально дополнив известные факты новыми величинами. Выберем на плоскости три точки с координатами

$$A(1,1), B(-1,0), C(0,-1).$$

Применим к «точкам» последовательные преобразования, аналогичные тем, которые использовались при получении элементов группы S_3. Получим, например, соотношения

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-1, \\ c+d=0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow a=0, c=1 \Rightarrow b=d=-1 \Rightarrow\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = K.$$

При изменении последовательности в преобразовании реперов (вращении в другую сторону) получим соответствие

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти преобразования получены при согласовании реперов *трех точек*. Преобразования *пары реперов* дают остальные элементы симметрической группы. Например, получим

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-1, \\ c+d=0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a=-1, c=-1 \Rightarrow b=0, d=1 \Rightarrow\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = M.$$

Остальные соответствия получаются аналогично. Мы видим физическое различие в алгоритмах вывода разных элементов матриц. Оно проявляет себя математически: «вращения» вместе с единичной матрицей образуют нормальную подгруппу. Другие элементы не имеют таких свойств. Детерминанты матриц двумерного представления различны для разных алгоритмов. Этот признак можно использовать как средство для построения единичного представления симметрической группы S_3: на основе величин детерминантов матриц представления. Так обычно не поступают. Представления принято задавать посредством шпуров матриц: суммы диагональных элементов.

Заметим, что двумерные представления получаются аналогичным способом на четырех тройках точек:

$$A_1(1,1), B_1(-1,0), C_1(0,-1), A_2(1,-1), B_2(0,1), C_2(-1,0),$$
$$A_3(-1,-1), B_3(1,0), C_3(0,1), A_4(-1,1), B_4(0,-1), C_1(1,0).$$

Следовательно, *неприводимое двумерное представление имеет «скрытые степени свободы»* для своего конструирования. С физической точки зрения это можно учесть, предполагая, что одни и те же матрицы (а им соответствуют физические объекты), имеют внутренние свойства, которые не учтены в их «внешнем виде». Это могут быть дополнительные свойства, ассоциированные с условиями их «рождения». Совокупная сумма их компонент равна нулю, что свидетельствует о наличии замкнутого векторного графа: совокупности векторов, образовавших треугольник. Но треугольник это расположен на плоскости по-разному. Поэтому только при условии однородности свойств у полученных матриц не будет дополнительных свойств. Скрыты в данном алгоритме длины реперов. Действительно, пропорционально изменим длины реперов. Тогда получим соотношения

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-1, \\ c+d=0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \Rightarrow a=-1, c=-1 \Rightarrow b=0, d=1 \Rightarrow\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = M.$$

В силу этого обстоятельства понятно, что группа S_3 характеризует симметрийные свойства совокупности подобных «треугольников», имеющих одинаковую форму и пропорционально отличающихся размерами сторон. При несимметричном изменении базисов ситуация несколько меняется:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a\alpha+b\beta=-\alpha, \\ c\alpha+d\beta=0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow a=-1, c=-\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow b=0, d=1 \Rightarrow\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\dfrac{\beta}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} = \tilde{M}.$$

Так получается *локально деформированная матрица*. С физической точки зрения такой вариант анизотропии изменения наиболее интересен. В данном случае его происхождение тривиально: изменены условия «отсчета» (условия измерения). Для вдумчивого исследователя это замечание важно, так как ведет к требованию локальной деформации уравнений, которыми описывается явление. Учет условий измерения может вызвать потребность в изменении уравнений, которыми описывается явление. Это обстоятельство ярко проявило себя в релятивистской электродинамике, без локальной деформации которой было невозможно преодолеть сингулярности теории и понять сущность проведенных экспериментов.

Алгоритм рождения групп

Применим алгоритм рождения групп на примере базиса

$$\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\alpha\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ -\beta\end{pmatrix}\right\}.$$

Например, выведем соотношения

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\ 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}a\alpha+b\beta=-\alpha,\\ c\alpha+d\beta=0.\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\beta\end{pmatrix}\rightarrow a=0, c=\frac{\beta}{\alpha}=\sigma^{-1}\Rightarrow b=-\frac{\alpha}{\beta}=\sigma, d=-1,$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\sigma\\ \sigma^{-1} & -1\end{pmatrix}.$$

Действуя аналогично, получим матрицы

$$\begin{pmatrix}-1 & \sigma\\ -\sigma^{-1} & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -\sigma\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -\sigma^{-1} & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & \sigma\\ \sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

С неправильным треугольником ассоциирована система деформированных матриц. Вместе с единичной матрицей они образуют группу.

Таблица их произведений такова:

$\times$	$\begin{pmatrix}0 & -\sigma\\ \sigma^{-1} & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & \sigma\\ -\sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -\sigma\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -\sigma^{-1} & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & \sigma\\ \sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & -\sigma\\ \sigma^{-1} & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & \sigma\\ -\sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & \sigma\\ \sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -\sigma\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -\sigma^{-1} & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-1 & \sigma\\ -\sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -\sigma\\ \sigma^{-1} & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -\sigma^{-1} & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & \sigma\\ \sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -\sigma\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & -\sigma\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -\sigma^{-1} & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & \sigma\\ \sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -\sigma\\ \sigma^{-1} & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & \sigma\\ -\sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -\sigma^{-1} & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & \sigma\\ \sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -\sigma\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & \sigma\\ -\sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -\sigma\\ \sigma^{-1} & -1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & \sigma\\ \sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -\sigma\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -\sigma^{-1} & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -\sigma\\ \sigma^{-1} & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & \sigma\\ -\sigma^{-1} & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Из таблицы следует вывод, что мы получили набор матриц, который образует группу. Естественно ожидать, что эта группа изоморфна симметрической группе S_3 в канонической форме. Найдем матрицу преобразований, посредством которой этот набор матриц приобретает канонический вид. Общее правило преобразований выглядит так:

$$\bar{B} = ABA^{-1}.$$

Напомним соотношения между элементами для прямой и обратной матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Тогда из частного варианта вида

$$A \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma^{-1} & -1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

следует система уравнений:

$$\begin{aligned} & bd\sigma^{-1} + ca\sigma + cb = 0, \\ & b^2\sigma^{-1} + a^2\sigma + ab = ad - bc, \\ & d^2\sigma^{-1} + c^2\sigma + cd = ad - bc, \\ & db\sigma^{-1} + ac\sigma + ad = ad - bc. \end{aligned}$$

Из них следует, что

$$c = -b\sigma^{-1}, a = (d - b)\sigma^{-1}.$$

Тогда

$$ad - dc = \left(d^2 + b^2 - db\right)\sigma^{-1} \neq 0.$$

Выберем вариант

$$d = b = 1, a = 0, c = -\sigma^{-1} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma^{-1} & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Проиллюстрируем действия данных матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma^{-1} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1} & -1 \\ \sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^{-1} & -1 \\ \sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем другие канонические матрицы. Следовательно, два набора матриц эквивалентны. Их трансформация указана в предыдущей таблице внизу таблицы.

Эквивалентность матриц может быть получена при *другой преобразующей матрице*. Указанным выше условиям соответствует вариант

$$a = 0, b = d = \sigma, c = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -1 & \sigma \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы понимаем, что локальная деформация матриц может проявлением эквивалентности канонического и неканонического наборов матриц. При превращении канонического набора в неканонический используется вариант

$$B = A^{-1}\overline{B}A.$$

Например, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \sigma \\ \sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрицы преобразований можно выбирать произвольным образом, обеспечив только их обратимость, есть множество форм канонической группы. Группа может иметь набор «нарядов». С математической точки зрения этот факт прост и неконструктивен. Ситуация меняется, когда преобразованиям эквивалентности придается физический смысл. Действительно, мы получили систему неканонических матриц, рассматривая движения неправильного треугольника с определенным соотношением сторон. Другие эквивалентные выражения ассоциированы с другими треугольниками. По этой причине *математической эквивалентности сопоставляется физическая неэквивалентность.* Фактически группа задает совокупность активностей, ассоциированных с треугольниками разного вида. *Симметрия структур треугольников согласована с симметрией активностей точек на этих треугольниках*. Этот вывод подтверждает корректность принципа софистатности структур и активностей, ранее принятого в физике.

Алгоритм рождения знаковой группы

Применим алгоритм рождения групп к базису треугольника вида

$$\left\{\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Получим

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \to \begin{cases} a\beta + b\alpha = 0, \\ c\beta + d\alpha = \alpha, \end{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \to b = \frac{\beta}{\alpha}, d = 0,$$

$$c = \frac{\alpha}{\beta}, a = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \sigma \\ \sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \sigma \\ -\sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}.$$

Следовательно, алгоритм порождает элемент знаковой группы. При движении по треугольнику в обратном направлении получим

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma^{-1} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma^{-1} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix}.$$

Следовательно, алгоритм порождения элементов групп порождает также элементы знаковой группы. Заметим, что на знаковую группу умножение возможно не только по сторонам, но также снизу или сверху. Знаковая группа, как показал анализ, имеет фундаментальное значение. Она порождает, например, матричную алгебру на основе группы перестановок Клейна. На основе знаковой группы (*аналога системы свободных объектов*) реализуется преобразование кватернионов в антикватернионы, что можно рассматривать как «подсказку» для механизма взаимного преобразования электромагнитного поля в гравитационное.

Алгоритм рождения «полимерной цепочки»

Применим алгоритм рождения групп к реперу вида

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\ \gamma\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\alpha\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Получим соотношения

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\ 0\end{pmatrix}\to b=-\frac{\alpha}{\gamma},d=0,\begin{pmatrix}a & -\dfrac{\alpha}{\gamma}\\ c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\ 0\end{pmatrix}\to a=-\frac{\beta}{\alpha},c=0.$$

Получим матрицу

$$\pi=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta}{-\alpha} & \dfrac{-\alpha}{\gamma}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

С одной стороны, она имеет форму деформированного левого идеала. С другой стороны, она обладает удивительным свойством рождения новых точек, которые располагаются по оси Ox. Действительно, действия таковы:

$$\pi\begin{pmatrix}-\alpha\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\ 0\end{pmatrix},\pi\begin{pmatrix}0\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\pi\begin{pmatrix}\beta\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta^2}{-\alpha}\\ 0\end{pmatrix},\pi\begin{pmatrix}\dfrac{\beta^2}{-\alpha}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta^3}{\alpha^2}\\ 0\end{pmatrix}\ldots$$

Многократные действия проектора π на новые точки даст их конечную последовательность, напоминающую по своей форме некий «полимер». Следовательно, *конечная совокупность точек, согласованных между собой и подчиненная алгоритму порождения множества матриц, способна «породить» последовательность точек в форме «полимера».* Понятно, что эта совокупность дискретна. Понятно, что матрица в форме правого идеала имеет оригинальные свойства. Легко показать, что последовательность точек

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$$

не совместима с алгоритмом порождения матриц. Есть и другие возможности. Например, последовательность точек

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

порождает пару элементов канонической группы:

$$\pi \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

Алгоритм порождения матриц конструирует на репере идеал:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow \pi=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, конечное множество имеет богатые свойства, о*ни зависят от ряда обстоятельств:*
а) где находятся «точки»,
б) при каких условиях выполняются действия с ними,
в) как точки и условия согласованы между собой,
г) какие инструменты и алгоритмы используются,
д) как анализируется «полученный материал»,
е) где он находит практическое применение,
ж) какие новые закономерности и перспективы развития дает проводимый анализ.

Исследуем возможности согласованного применения матричной и комбинаторной операций на симметричной группе S_3. Такой анализ позволит проявить *синтез ассоциативной и неассоциативной операций* на одном множестве. Тонкость состоит в том, что комбинаторное произведение порождает новые матрицы:

$$[1]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix},[2]=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix},[3]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Найдем алгебру, которая «скрывает» эти элементы. Для удобства анализа информации запишем в явном виде используемые элементы и таблицу их матричных и комбинаторных произведений. Зададим величины

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},J=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix},K=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix},L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix},M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Их свойства достаточно хорошо исследованы на матричной операции. Однако с иной ситуацией мы имеем дело при использовании стандартной комбинаторной операции. Она проявляет новые свойства данной совокупности отношений. Получим такие результаты:

Таблица 1. Матричные произведения

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} \times & J & K & L & M & N \\ \hline J & K & E & N & L & M \\ K & E & J & M & N & L \\ L & M & N & E & J & K \\ M & N & L & K & E & J \\ N & L & M & J & K & E \end{array}\right).$$

Таблица 2. Комбинаторные произведения

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} \overset{k}{\times} & E & J & K & L & M & N \\ \hline E & [1] & [3] & [2] & L & N & M \\ J & [3] & [2] & [1] & M & L & N \\ K & [2] & [1] & [3] & N & M & L \\ L & E & J & K & [1] & [2] & [3] \\ M & J & K & E & [3] & [1] & [2] \\ N & K & E & J & [2] & [3] & [1] \end{array}\right).$$

Исследуем свойства элементов симметрической группы S_3. Получим, например, соотношение в форме разности аналогов двух элементов алгебры Ли:

$$\left(JL - LJ\right) + \left(J \overset{k}{\times} L - L \overset{k}{\times} J\right) = N - J\ldots$$

Этот закон выполняется для большинства элементов. Проблемы возникают, когда пара образована из элементов, принадлежащих $\left\{\eta^i\right\} \to \left(L, M, N\right)$, так как они выражаются через новые элементы, «рожденные» комбинаторным произведением. Ситуация меняется, если такие произведения конструируются на основе квадратов этих элементов. Следовательно, есть потребность в нахождении *операции, зависящей от элементов*. Введем обозначения остальных элементов:

$$\left\{\xi^i\right\} \to E, J, K.$$

Искомая функция задается на следующих парах элементов:

$$\sigma = \begin{cases} 1 \to \left(\xi, \xi\right), \\ 1 \to \left(\xi, \eta\right), \left(\eta, \xi\right), \\ 2 \to \left(\eta, \eta\right). \end{cases}$$

Частные законы на множестве элементов симметрической группы, подчиненной матричной и комбинаторной операциям, таковы:

$$\left(JL-LJ\right)_{\sigma(jl)}+\left(J\overset{k}{\times}L-L\overset{k}{\times}J\right)_{\sigma(jl)}=N-J...\left(JL-LJ\right)_{\sigma}=JL-LJ,...$$

$$\left(LM-ML\right)_{\sigma(lm)}+\left(L\overset{k}{\times}M-M\overset{k}{\times}L\right)_{\sigma(lm)}=0,$$

$$\left(LM-ML\right)_{\sigma(lm)}=L^2M^2-M^2L^2,...$$

Их совокупность соответствует спектру свойств, которые обычно имеет система конечных элементов. Этот спектр позволяет различать те свойства, которые ранее были скрыты при «глобальном» анализе, когда множество было подчинено одному общему закону.

Обоснование новых операций

Покажем, что элементы матричной алгебры второго порядка иллюстрируют конструкторское могущество операций. На первое место поставим операцию сложения. Она порождает элементы

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

Сложение матриц не тождественно сложению чисел. Используя элементы матричной алгебры как исходный материал, мы преобразуем пару этих элементов в качественно новый объект. Мы «удаляем» часть их структуры (незаполненные места), сохраняя форму элементов матричной алгебры. По этой причине данный алгоритм конструирования есть условное сложение, совокупность приемов объединения одних элементов и преобразования их в другие. С физической точки зрения эта процедура нетривиальна. Её нетривиальность очевидна и с математической точки зрения, так как новые элементы приобретают новые свойства. Группа из двух элементов

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

имеет инвариантную структуру при использовании матричного произведения. Ситуация меняется, если применяется комбинаторное произведение. Оно порождает (с точностью до множителя в виде натурального числа) левые и правые матричные идеалы:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, операция сложения по своим конструктивным свойствам превосходит пару операций умножения. Рассмотрим группу

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

следуя подходу Галуа. Множество порождает два характеристических полинома

$$Y_{1,2}=\det\left\|A_{1,2}-\lambda E\right\|\Rightarrow Y_1=(1-\lambda)^2,Y_2=\lambda^2-1.$$

Квадратные уравнения $y_{1,2}=x^2+a_{1,2}x+b_{1,2}=0$ имеют частную структуру вида

$$Y_1=(1-\lambda)^2=0,Y_2=\lambda^2-1=0.$$

Их корни λ_1,λ_2, подчинены условиям

$$\lambda_1+\lambda_2=-a,\lambda_1\cdot\lambda_2=b.$$

Следуя подходу Галуа, нужно проанализировать инвариантность этих условий при перестановке корней, сопоставляя каждое расположение корней с перестановкой. В данном случае корни могут быть расположены в виде, указанном выше или их положение может поменяться взаимно. По этой причине группа симметрии квадратного уравнения совпадает с группой, которая породила характеристические полиномы.

С аналогичной ситуацией мы имеем дело при конструировании группы заполнения физических моделей. Исходным пунктом для реализации такой программы была выборка из группы матриц второго порядка. Она указана ранее, как и аналогия с алгеброй Клиффорда. Используя тензорное произведение Кронекера, мы получили систему матриц, которая содержит пару кватернионов и тройку антикватернионов. Характеристические полиномы данного множества таковы:

$$Y_1=\left(\lambda^2-1\right)^2,Y_2=\left(\lambda^2+1\right)^2.$$

Они аналогичны полиномам, рассмотренным выше. По этой причине группа Галуа для них будет аналогична группе, которая породила элементы тензорного произведения. Другими словами, группа Галуа для характеристических полиномов, ассоциированных с тензорным произведением элементов исходной группы второго порядка, изоморфна исходной группе.

Следовательно, группу Галуа можно использовать как инструмент для выяснения симметрийных истоков множества, порождающего алгебраические уравнения.

Группа как источник новых операций

Рассмотрим с позиции анализа операций матричное произведение мономиальных матриц. Например,

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Операционно ситуация выглядит так: значимый элемент строки по положению своего значимого элемента «ищет» в аналогичной строке другой матрицы элемент для произведения с ним и располагается в своей строке так, как второй элемент был расположен в своей строке. Стыковочные места строк и столбцов только совпадают. По этой причине данным внутренним парам можно поставить в соответствие единичную матрицу:

$$\left(\begin{array}{|cc|cc|}\hline 1&2&2&4\\2&1&1&3\\3&4&4&2\\4&3&3&1\\\hline\end{array}\right)\Rightarrow\begin{pmatrix}14\\23\\32\\41\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{c|cccc}\times&1&2&3&4\\\hline 1&1&0&0&0\\2&0&1&0&0\\3&0&0&1&0\\4&0&0&0&1\end{array}\right).$$

Выполним комбинаторное произведение матриц. В этом варианте строки первой матрицы умножаются на столбцы второй матрицы. После этого элементы столбца комбинаторно переставляются. После этого элементы строки умножаются на полученные элементы по определенному алгоритму. Получим соответствие вида

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Алгоритм произведения выглядит так:

$$\left(\begin{array}{|cc|cc|}\hline 1&2&1&3\\2&1&2&4\\3&4&3&1\\4&3&4&1\\\hline\end{array}\right)\Rightarrow\begin{pmatrix}14\\22\\34\\42\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{c|cccc}\overset{k}{\times}&1&2&3&4\\\hline 1&1&4&3&2\\2&2&1&4&3\\3&3&2&1&4\\4&4&3&2&1\end{array}\right).$$

На первом месте стоят номера элементов строк и столбцов. Затем показан результат произведения при таком расположении. Далее дана таблица мест при разном взаимном расположении умножаемых элементов.

Таблица произведений есть ***элемент алгебры, порожденный группой***:

$$\begin{pmatrix}1&4&3&2\\2&1&4&3\\3&2&1&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Элементы группы принадлежат смежному классу B и подгруппе Клейна A: E, b_4, a_3, b_2. Они мономиальны и заполняют всю матрицу четвертого порядка. Их свойства таковы:

$$a_3^2 = b_2b_4 = b_4b_2 = E, b_2^2 = b_4^2 = a_3.$$

Следовательно, **группу можно рассматривать как источник операций**. Для этого требуется дополнительно указать алгоритм сопоставления элементов матриц. Сконструируем по указанному алгоритму *простейшие новые операции*.

На подгруппе $\left(X, a_2, d_3, d_4\right)$ получим закон:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\4&3&1&2\\3&4&2&1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

На подгруппе $\left(X, c_2, c_3, a_4\right)$ получим закон:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\\2&4&1&3\\4&3&2&1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Им соответствуют такие результаты произведений указанных выше матриц:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\4&3&1&2\\3&4&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3&\to&4\\1&4&\to&4\\4&1&\to&3\\3&2&\to&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\\2&4&1&3\\4&3&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3&\to&4\\1&4&\to&4\\4&1&\to&4\\3&2&\to&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Аналогичные расчеты можно выполнить на элементах смежных классов. На первый взгляд кажется, что результаты должны быть другими. Однако анализ показывает «сходство» анализируемых соотношений и законов. Подгруппы аналогичны смежным классам.

Получим на смежном классе C таблицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим на смежном классе D соотношения вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим, используя начальные матрицы, следующие результаты:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{C}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{D}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зависимость результата от операции позволяет по-новому анализировать любые явления. В реальной практике операции могут меняться. В рассматриваемом случае каждый смежный класс и каждая группа порождают *семейство произведений*. Разные операции могут быть присущи разным объектам. Соответственно, нужно использовать математический аппарат, в котором эти обстоятельства учтены, равно как и возможная их динамика. Естественно предполагать, что *есть законы сохранения операций, равно как и законы смешения операций*. Они могут иметь место не только при взаимодействии физических тел. Модели Сознаний и Чувств могут быть наполнены ими. Ведь от того, какими операциями и как владеет объект, будет зависеть и его состояние, и поведение, и логика, и жизнь. Аналогичное замечание следует сделать по поводу используемых экспериментальных средств. Оценка ситуаций и её понимание зависят от эксперимента. Но может быть так, что операции, присущие эксперименту, дают информацию, искаженную этим экспериментом. Ведь требуется некоторое согласование не только показаний приборов с высокой достоверностью результатов. Требуется полнота анализа. Она может быть достижима данными средствами, но может быть и недостижима. *Изменение поведения на основе изменения системы операций становится качественно новым средством практики*. Оно может иметь решающее значение при лечении заболеваний, при различных деформациях, при реализации процессов обучения и воспитания. Во всех задачах управления важно понимать, какие операции и какими способами вызывает данное управление. Поскольку теперь мы вправе конструировать операции, рассмотрим несколько вариантов, ассоциированных со смежными классами группы перестановок. Примем условие, что совокупность матриц заполняет все места конструируемой матрицы операций. У смежных классов (а иногда и у подклассов) эти условия выполняются. По алгоритму, указанному выше, сконструируем таблицы произведений и результат для исходной пары матриц. Конструирование проводится так, что число перед матрицей соответствует месту значимого элемента в первой строке. Получим такие возможности:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \overset{k}{\times}A & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & \to & 4 \\ 1 & 4 & \to & 4 \\ 4 & 1 & \to & 4 \\ 3 & 2 & \to & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \overset{k}{\times}B & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & \to & 2 \\ 1 & 4 & \to & 4 \\ 4 & 1 & \to & 2 \\ 3 & 2 & \to & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \overset{k}{\times}C & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & \to & 1 \\ 1 & 4 & \to & 4 \\ 4 & 1 & \to & 4 \\ 3 & 2 & \to & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \overset{k}{\times}D & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & \to & 4 \\ 1 & 4 & \to & 4 \\ 4 & 1 & \to & 3 \\ 3 & 2 & \to & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0` & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \overset{k}{\times}E & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & \to & 1 \\ 1 & 4 & \to & 4 \\ 4 & 1 & \to & 2 \\ 3 & 2 & \to & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \overset{k}{\times}F & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & \to & 2 \\ 1 & 4 & \to & 4 \\ 4 & 1 & \to & 3 \\ 3 & 2 & \to & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что пара последних произведений порождает «себя», что не реализуется на других смежных классах. Следовательно, эта пара смежных классов имеет особые свойства. С другой стороны, комбинаторное произведение элементов данных классов на себя порождает элементы нормальной группы Клейна, что было «недостижимо» для них при матричном произведении. Так, получим

$$f_1 \underset{F}{\overset{k}{\times}} f_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \to & 2 \\ 4 & 3 & \to & 1 \\ 2 & 1 & \to & 4 \\ 3 & 4 & \to & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a_2,$$

$$e_1 \underset{E}{\overset{k}{\times}} e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \to & 2 \\ 3 & 4 & \to & 1 \\ 4 & 3 & \to & 4 \\ 2 & 1 & \to & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a_2.$$

Симметрийные аспекты квадратного уравнения

Запишем общее квадратное уравнение в форме произведения неприводимых одночленов. Тогда

$$y = x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2,$$

$$x_1 + x_2 = -b, x_1 x_2 = c.$$

Уравнение можно представить в форме определителя от матрицы, выраженной на основе структурной группы уравнения. Группа порядка два представлена элементами

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

$$\Pi = xa + xb - x_1 a - x_2 b,$$

$$\xi = \det \Pi = \det \begin{pmatrix} x - x_1 & 0 \\ 0 & x - x_2 \end{pmatrix} = y = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2.$$

Дополним структурную группу группой симметрии корней уравнения, следуя Галуа. В данном случае функции, зависящие от корней уравнения, имеют вид

$$\sigma(1) = x_1 + x_2, \sigma(2) = x_1 x_2.$$

Перестановки корней соответствуют матрицам

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\}\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}\to\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\gamma.$$

Объединим неединичные элементы пары групп в «комплекс», используя его для преобразования переменных:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=(\beta+\gamma)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix},$$

$$x_1=\xi+\eta, x_2=\xi-\eta\,.$$

Тогда

$$x_1+x_2=2\xi=-b,\ \xi=-\frac{b}{2}.$$

Следовательно, получим

$$\eta^2=\frac{b^2}{4}-c.$$

Корни квадратного уравнения задаются выражением

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}.$$

Заметим, что фундаментальные свойства многих моделей базируются на некоторых простых начальных её элементах. При этом анализ простого проводится «просто», он не доводится до уровня возможных продолжений и обобщений. В «простом» часто скрываются фундаментальные истины, которые не так просто «разглядеть».

Фундаментальная значимость группы перестановок

При постановке любой физической задачи мы имеем дело, по меньшей мере, с парой объектов: исследуемое изделие и наблюдатель. В реальной ситуации этих объектов много, как и их свойств. Однако *базовым математическим объектом объективно является тот, который проявляет свойства пары объектов*. Матрица второго порядка принадлежит к таким объектам. Она канонически выражает отношения объектов к себе в форме единичной матрицы, а также отношение объектов друг к другу посредством второй диагонали матрицы. Получим матрицы вида

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Класс таких элементов образует группу, в которой обратные элементы тождественны самим элементам. Группа коммутативна, произведение не зависит от порядка сомножителей. Ассоциативность основана на произведении пары совпадающих элементов.

У данной группы есть функциональный аспект. Он основан на анализе корней общего квадратного уравнения. Пара корней формирует функции

$$\sigma_1 = x_1 + x_2, \sigma_2 = x_1 x_2.$$

Они не меняют своего значения, если корни уравнения не меняются местами. Тогда, с точки зрения модели перестановок, они порождают единичную матрицу. Функции не меняются при перестановке корней уравнений местами. В модели перестановок эта перемена порождает матрицу с единицами на второй диагонали. По этой причине группа канонических отношений в паре объектов есть группа Галуа для корней общего квадратного уравнения.

Принимая возможность нахождения одной пары объектов внутри другой пары объектов, мы вправе «встроить» один объект в другой. Именно так задается тензорное произведение, когда на место значимых элементов становятся другие элементы. В данном случае такой прием дает матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a_1, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a_3.$$

Они задают группу Клейна. В системе матриц, задающих симметрическую группу S_4, эта группа является единственной инвариантной группой. С физической точки зрения она задает канонические (выражаемые положительными единицами) отношения в системе, состоящей из четырех объектов: одна пара находится внутри другой пары. Именно такая точка зрения сложилась при анализе уравнений электродинамики: свет есть совокупность базовых объектов, каждый из которых содержит пару электрических и пару гравитационных предзарядов. В электродинамике группа Клейна дважды и по разным сочетаниям деформирована знаковой группой:

$$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix}.$$

Этот прием позволил получить пару кватернионов, которые задают структуру уравнений электродинамики. Группа Клейна без изменений встроена в тензорную модель гравитации (массодинамику). Принимая группу Клейна как подгруппу симметрической группы подстановок, мы вправе утверждать её фундаментальную роль в физике.

Следовательно, **группу Галуа и группу Клейна можно рассматривать как исходные фундаментальные группы физической теории.**

Симметрическую группу можно получить разными способами. Одним из них является алгоритм одноэлементного тензорного произведения. Согласно ему, каждый значимый элемент матрицы может «заполняться» другими матрицами, не меняя остальных матриц, но меняя их положение в новой матрице. Так получается система матриц, в которой могут быть совпадающие элементы. Так, выполнив одноэлементное тензорное произведение исходных матриц второго порядка, получим матрицы симметрической группы S_3:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Аналогично можно получить почти все элементы симметрической группы S_4. Следовательно, исходную пару матриц с единицами по главной и по второй диагонали можно рассматривать как образующие симметрических групп. Мы не получим таким образом пару матриц:

$$c_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Их можно трактовать как элементы, скрытые от алгоритма. Они следуют из дополнительного алгоритма: просуммируем пару исходных матриц и расположим на их местах элементы матричной алгебры, исключая немономиальные реализации. Получим

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\to\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow c_2,c_3.$$

Следовательно, структура данных элементов группы базируется на одноэлементном заполнении матрицы совокупностью согласованных между собой матриц. В данном случае два алгоритма одноэлементных заполнений «порождают» всю симметрическую группу.

Формальным «недостатком» группы перестановок является ее «отрыв» от фундаментального физического факта, что *в реальности всегда присутствуют частицы и античастицы.* Ситуацию можно «исправить», если дополнить плюсы минусами. Однако для этого нужно принять точку зрения, что есть положительные и отрицательные объекты или хотя-бы их свойства таковы.

Ситуация становится проще, если усложнить операцию одноэлементного заполнения: принять условие, что элементы предыдущих уровней заполняют новую матрицу так, чтобы столбец с ее верхним значимым элементом был свободен. Обозначим такие единицы звездочками. Тогда получим функциональное представление элементов симметрических групп:

$$S_3\to 1^*\hat{\otimes}S_2, S_4\to 1^*\hat{\otimes}S_3\to 1^*\hat{\otimes}\left(1^*\hat{\otimes}S_2\right)...$$

Структура каждой симметрической группы на данной обобщенной операции тензорного произведения задается парой образующих, принадлежащих группе S_2. Заметим, что циклические группы

$$
\begin{aligned}
&I: X, d_3, d_3^2 = a_2, d_3^3 = d_4; X, d_4, d_4^2 = a_2, d_4^3 = d_2,\\
&II: X, b_2, b_2^2 = a_3, b_2^3 = b_4; X, b_4, b_4^2 = a_3, b_4^3 = b_2,\\
&II: X, c_2, c_2^2 = a_4, c_2^3 = c_3; X, c_3, c_3^2 = a_4, c_3^3 = c_2
\end{aligned}
$$

естественно порождают новые операции. Специфика их в том, что сумма элементов подгрупп заполняет всю матрицу своего представления. Так,

$$
X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, d_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, d_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Они порождают таблицы мест и произведений вида

$$
TM \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, T\Pi \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Для циклической подгруппы с элементами b_i получим таблицы мест и произведений

$$
TM \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, T\Pi \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Таблицы мест использовались нами на начальной стадии построения комбинаторных моделей Сознаний и Чувств.

С циклическими подгруппами согласованы подгруппы, характеризующиеся немономиальным заполнением мест:

$$
I: X, d_2, a_2, d_1; II: X, b_3, a_3, b_1; II: X, c_1, a_4, c_4.
$$

К каждому элементу нормальной подгруппы (a_1, a_2, a_3) присоединены элементы циклической и нециклической подгрупп, образованные из соответствующих элементов смежных классов. Подгруппы шестого порядка образованы выборкой из указанных подгрупп с добавлением элементов из смежных классов E, F. Эти новые элементы образуют подгруппы третьего порядка.

Ситуация выглядит так:

$$\begin{aligned}&(X,,b_3,c_1,d_2,e_3,f_2)\to(X,e_3,f_2),\\&(X,b_3,c_4,d_1,e_4,f_3)\to(X,e_4,f_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(X,b_1,c_4,d_2,e_2,f_4)\to(X,e_2,f_4),\\&(X,b_1,c_1,d_1,e_1,f_1)\to(X,e_1,f_1).\end{aligned}$$

Интересен алгоритм представления элементов, присоединенных к матрице $X=a_1$. Расположим элементы по порядку. Получим пару сопоставлений:

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline e&1&2&3&4\\\hline f&1&4&2&3\\\hline\end{array}\right),\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline f&1&2&3&4\\\hline e&1&3&4&2\\\hline\end{array}\right),e_i f_j=X.$$

Им сопоставим матрицы f_1,e_1:

$$f_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},e_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Матрицы, расположенные в основании перестановки, указывают верхним элементам, что им нужно выбрать для соответствия матрице X. Аналогично выглядит сопоставление элементов смежных классов E,F для других элементов нормальной подгруппы. Так, получим

$$a_2=e_i f_j\to\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline e&1&2&3&4\\\hline f&2&3&1&4\\\hline\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=f_2,$$

$$a_2=f_j e_i\to\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline f&1&2&3&4\\\hline e&2&4&3&1\\\hline\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=e_2.$$

$$a_3=e_i f_j\to\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline e&1&2&3&4\\\hline f&3&2&4&1\\\hline\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=f_3,$$

$$a_3 = f_j e_i \to \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline f & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline e & 3 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_3.$$

$$a_4 = e_i f_j \to \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline e & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f & 4 & 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \right) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = f_4,$$

$$a_2 = f_j e_i \to \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline f & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline e & 4 & 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = e_4.$$

Основной «рисунок картины отношений» в симметрической группе можно представить в форме «солнечной батареи»:

				X				
			ef_1		fe_1			
X	d_2	d_1		a_2		d_3	d_4	X
			ef_2		fe_2			
X	b_3	b_1		a_3		b_2	b_4	X
			ef_3		fe_3			
X	c_4	c_1		a_4		c_2	c_3	X
			ef_4		fe_4			

Эти данные свидетельствуют о высокой организации рассматриваемой системы элементов. Мы обнаружили пока только внешние признаки её структуры и могущества. Полный анализ ещё впереди.

Новый алгоритм расширения групп

Рассмотрим элементы подгруппы симметрической группы

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, d_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, d_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они порождают таблицы мест и произведений вида

$$TM(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, T\Pi(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

По таблице произведений сконструируем четыре матрицы, полагая, что каждый столбец представляет указатель положения значимых мест в канонической мономиальной матрице. Получим матрицы:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данные элементы дополняют циклическую группу до подгруппы восьмого порядка. Мы расширили группу на основе использования таблицы произведений для исходной подгруппы. Таблица их мест и произведений такова:

$$TM(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, T\Pi(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Получена закономерность: *таблицы мест и комбинаторных произведений взаимно дополнительны*. Действительно,

$$TM(2) = T\Pi(1), T\Pi(2) = TM(1).$$

Закон сохранения суммы индексов для нормальной подгруппы и её смежных классов

Алгоритм расчета индексов перестановок базируется на таблице

12	13	14
23	24	
34		

Индекс равен количеству пар индексов, взятых в прямом порядке из перестановки, не совпадающих с указанными парами. Так получим, например, соответствия:

$$1234 \to j = 0, 4321 \to j = 6.$$

Рассмотрим совокупность элементов нормальной подгруппы и ее смежных классов.

Получим соответствия:

ξ	a_1	a_2	a_3	a_4
p	1234	2143	3412	4321
j	0	2	4	6

,

ξ	b_1	b_2	b_3	b_4
p	1432	2341	3214	4123
j	3	3	3	3

,

ξ	c_1	c_2	c_3	c_4
p	1324	2413	3142	4231
j	1	3	3	5

,

ξ	d_1	d_2	d_3	d_4
p	1243	2134	3421	4312
j	1	1	5	5

,

ξ	e_1	e_2	e_3	e_4
p	1342	2431	3124	4213
j	2	4	2	4

,

ξ	f_1	f_2	f_3	f_4
p	1423	2314	3241	4132
j	2	2	4	4

.

Следовательно, симметрическая группа имеет внутренний закон сохранения: сумма индексов перестановок в нормальной подгруппе и в ее смежных классах одинакова и равна

$$J(\xi) = \sum_{1}^{4} j(\xi) = 12.$$

Свойства смежных классов четверных подгрупп

Применим обозначения матриц числами:

X	d_2	c_1	e_3	f_2	b_3	d_1	a_2	f_1	b_4	c_2	e_4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
e_1	c_3	b_1	f_4	a_3	d_4	b_2	f_3	e_2	c_4	d_3	a_4
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

.

Проанализируем произведения элементов в смежных классах для подгрупп, состоящих из четырех элементов. Таблицы показывают и обозначают в скобках смежные классы. Последняя таблица показывает, каковы произведения элементов в смежном классе, если на первом месте стоит конкретный элемент смежного класса. Получим сопоставления:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 7 & 17 & 22 \\ \hline 7 & 0 & 22 & 17 \\ 17 & 22 & 7 & 0 \\ 22 & 17 & 0 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

(0)	(1)	1	6	16	23
0					
	(2)	2	10	15	19
7					
	(3)	3	11	14	18
17					
	(4)	4	8	13	21
22					
	(5)	5	9	12	20

$\Rightarrow$

(0)	(0)	(0)	(0)
(0)	(1)	(2)	(3)
(4)	(2)	(0)	(1)
(3)	(5)	(1)	(0)
(0)	(1)	(4)	(2)

,

$$\left(\begin{array}{|c|ccc|}\hline 0&9&16&18\\\hline 9&16&18&0\\16&18&0&9\\18&0&9&16\\\hline\end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline (0)&(1)&1&8&17&19\\\hline 0&&&&&\\\hline &(2)&2&11&13&20\\\hline 9&&&&&\\\hline &(3)&3&10&12&21\\\hline 16&&&&&\\\hline &(4)&4&6&15&22\\\hline 18&&&&&\\\hline &(5)&5&7&14&23\\\hline\end{array}\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline (0)&(3)&(5)&(2)\\\hline &&&\\\hline (0)&(1)&(5)&(4)\\\hline &&&\\\hline (4)&(5)&(1)&(0)\\\hline &&&\\\hline (3)&(0)&(2)&(5)\\\hline &&&\\\hline (0)&(0)&(0)&(0)\\\hline\end{array},$$

$$\left(\begin{array}{|c|ccc|}\hline 0&10&13&23\\\hline 10&23&0&13\\13&0&23&10\\23&13&10&0\\\hline\end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline (0)&(1)&1&11&12&22\\\hline 0&&&&&\\\hline &(2)&2&7&16&21\\\hline 10&&&&&\\\hline &(3)&3&6&17&20\\\hline 13&&&&&\\\hline &(4)&4&9&14&19\\\hline 23&&&&&\\\hline &(5)&5&8&15&18\\\hline\end{array}\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline (0)&(4)&(5)&(2)\\\hline &&&\\\hline (0)&(0)&(0)&(0)\\\hline &&&\\\hline (4)&(0)&(2)&(5)\\\hline &&&\\\hline (3)&(2)&(0)&(1)\\\hline &&&\\\hline (0)&(1)&(3)&(2)\\\hline\end{array},$$

$$\left(\begin{array}{|c|ccc|}\hline 0&1&6&7\\\hline 1&0&7&6\\6&7&0&1\\7&6&1&0\\\hline\end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline (0)&(1)&2&4&8&10\\\hline 0&&&&&\\\hline &(2)&3&5&9&11\\\hline 1&&&&&\\\hline &(3)&12&18&14&20\\\hline 6&&&&&\\\hline &(4)&13&19&15&21\\\hline 7&&&&&\\\hline &(5)&16&22&17&23\\\hline\end{array}\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline (0)&(2)&(3)&(5)\\\hline &&&\\\hline (1)&(0)&(5)&(4)\\\hline &&&\\\hline (1)&(5)&(2)&(4)\\\hline &&&\\\hline (5)&(2)&(3)&(0)\\\hline &&&\\\hline (0)&(0)&(0)&(0)\\\hline\end{array},$$

$$\left(\begin{array}{|c|ccc|}\hline 0&5&14&16\\\hline 5&0&16&14\\14&16&0&5\\16&14&5&0\\\hline\end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline (0)&(1)&1&4&15&17\\\hline 0&&&&&\\\hline &(2)&2&3&12&13\\\hline 1&&&&&\\\hline &(3)&6&19&8&22\\\hline 6&&&&&\\\hline &(4)&7&18&9&23\\\hline 7&&&&&\\\hline &(5)&10&20&11&21\\\hline\end{array}\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline (0)&(2)&(5)&(4)\\\hline &&&\\\hline (0)&(1)&(3)&(4)\\\hline &&&\\\hline (0)&(5)&(2)&(4)\\\hline &&&\\\hline (0)&(0)&(0)&(0)\\\hline &&&\\\hline (4)&(1)&(3)&(0)\\\hline\end{array},$$

$$
\left(\begin{array}{c|ccc}
0 & 2 & 21 & 23 \\ \hline
2 & 0 & 23 & 21 \\
21 & 23 & 0 & 2 \\
23 & 21 & 2 & 0
\end{array}\right)
\Rightarrow
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
(0) & (1) & 1 & 3 & 20 & 22 \\ \hline
0 & & & & & \\ \hline
 & (2) & 4 & 5 & 18 & 19 \\ \hline
2 & & & & & \\ \hline
 & (3) & 6 & 12 & 11 & 17 \\ \hline
21 & & & & & \\ \hline
 & (4) & 7 & 13 & 10 & 16 \\ \hline
23 & & & & & \\ \hline
 & (5) & 8 & 14 & 9 & 15 \\ \hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
(0) & (2) & (5) & (4) \\ \hline
 & & & \\ \hline
(1) & (0) & (4) & (3) \\ \hline
 & & & \\ \hline
(0) & (5) & (2) & (4) \\ \hline
 & & & \\ \hline
(0) & (0) & (0) & (0) \\ \hline
 & & & \\ \hline
(3) & (0) & (4) & (1) \\ \hline
\end{array}.
$$

Обозначим элементы подгруппы буквой η, а элементы смежного класса обозначим буквами ξ_i, обозначая индексом i каждый смежный класс. Рассмотрим произведение элементов смежного класса на элементы подгруппы. В этом случае выполняется закон: $\xi_i\eta \to \xi_i$. Элементы подгруппы, действуя слева на элементы смежного класса, «переставляют» их между собой, играют роль «комбинаторного двигателя». Рассмотрим правое действие элементов подгруппы на элементы смежного класса. Тогда выполняется закон:

$$\eta\xi_i \to \xi_j,$$

Элементы подгруппы, действуя справа на элементы смежного класса, «трансформируют» их в элементы другого смежного класса.

Заметим, что рассматриваемые отношения элементов более сложны, чем отношения в нормальной подгруппе. По этой причине следует ожидать, что применение такой конструкции в математике и физике позволит найти совокупность новых тонких законов.

«Гибриды»

Рассмотрим матричное произведение пары элементов симметрической группы:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\overset{m}{\times}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\Rightarrow e_3 \overset{m}{\times} e_1 = e_2.
$$

Рассмотрим те же матрицы на комбинаторном произведении:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\overset{m}{\times}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
= A.
$$

Полученный результат можно записать на основе матриц исходной группы:

$$
A = (-a_1 + a_2 - a_3) + (b_1 + b_2 - b_3) + (c_1 - c_2 - c_3) +
$$
$$
+ (e_1 + e_2 + e_3) + (-f_1 + f_2 - f_3) - X = e_3 \overset{k}{\times} e_1.
$$

Результат комбинаторного произведения исходных матриц представлен в виде элемента групповой алгебры: алгебры, базис которой образуют элементы группы. Алгебра сконструирована на группе чисел $[1,-1]$.

В данном случае комбинаторная операция из элементов группы «породила» элемент групповой алгебры. Другими словами, операция выступает в роли гомоморфизма, преобразующего группу в алгебру. По сути дела, мы используем совокупность трех операций: матричное и комбинаторное произведения, а также суммирование. В итоге действия этих операций мы получаем согласование трех математических конструкций: группы, матричной алгебры на матричной операции и алгебры на комбинаторной операции. Поскольку эти объекты принципиально различны, но едины, им можно придать новый термин: гибрид. Множество с тройкой операций, объединяющей свойства группы и алгебры, назовем гибридом. Такие множества могут применяться в моделях Сознаний и Чувств.

Скрытые свойства физических объектов

Согласно принятой ранее аналогии для физических и математических объектов, мы обязаны найти приемы и инструменты для выяснения их внешних проявлений, а также, для выяснения их скрытых возможностей и скрытых свойств. Это обстоятельство, в частности, становится значимым в моделях, которые допускают множество представлений при едином описании экспериментальных данных. С такой ситуацией мы имеем дело, когда переходим от записи уравнений на элементах нормальной подгруппы к записи их на элементах смежных классов, ассоциированных с этой подгруппой. Такая возможность преобразования одних матричных уравнений в другие, на других матрицах, известна давно. Ситуация выглядит так: *имеется семейство матричных форм для уравнений, векторный вид которых от этой формы не зависит.* Поскольку в эксперименте наблюдаются компоненты векторных полей, этого достаточно для понимания явлений и их описания. Но этого недостаточно для анализа структуры объектов, которые «стоят» за экспериментальными данными, представляющими явления.

Разные матричные формы уравнений можно интерпретировать как *модели, содержащие скрытую информацию*, более глубокую, чем та, которая следует из векторных уравнений. Тогда требуется найти алгоритмы анализа и проявления скрытой информации. Естественно базироваться на различии свойств матриц, используемых в моделях.

Воспользуемся функциональным подходом. Рассмотрим операторные свойства матриц на модели, вытекающей из формализма квантовых групп. Примем предположение, что матрицы представляют собой совокупность физических объектов с системой отношений, которую можно задать энергиями связи для каждого из объектов. Тогда в зависимости от того, какие используются матрицы, мы получим разные значения для энергетических свойств этих объектов. Понятно, что допустимы и другие приложения и интерпретации. Ведь если мы принимаем *свойство трансфинитности для физической реальности, то следует признать трансфинитность следствий и интерпретаций*.

Алгоритм выглядит так. Для матрицы B зададим уравнение

$$sAB - rBA = \sigma IB.$$

Матрицу A выберем в виде

$$A = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует система линейных уравнений. Искомые «энергии» выражаются через параметры $s, r, \sigma.$ Результаты расчета запишем посредством выражений, стандартных для данной ситуации:

$$\alpha = \frac{\sigma}{s-r}, \beta = \frac{\kappa s - r^3\sigma}{s^4 - r^4}, \gamma == \frac{\kappa r + s^3\sigma}{s^4 - r^4}, \delta = \frac{\kappa}{s^3 - r^3},$$
$$\kappa = \sigma\left(r^2 + rs + s^2\right).$$

Получены такие соотношения:

$$a_i\left(i = 1,2,3,4\right) \to$$
$$\to E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \alpha.$$
$$b_1 \to E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \alpha,$$
$$b_2 \to E_1 = \gamma, E_2 = \frac{r}{s}\gamma + \frac{\sigma}{s},$$

$$E_3 = \frac{s}{r}\beta - \frac{\sigma}{r}, E_4 = \beta,$$
$$b_3 \to E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \alpha,$$
$$b_4 \to E_1 = \beta, E_2 = \frac{s}{r}\beta - \frac{\sigma}{r},$$
$$E_3 = \frac{r}{s}\gamma + \frac{\sigma}{s}, E_4 = \gamma.$$

$$c_1 \to E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \alpha,$$
$$c_2 \to E_1 = \frac{s}{r}\beta - \frac{\sigma}{r}, E_2 = \frac{r}{s}\gamma + \frac{\sigma}{s}, E_3 = \beta, E_4 = \gamma,$$
$$c_3 \to E_1 = \frac{s}{r}\beta - \frac{\sigma}{r}, E_2 = \beta, E_3 = \frac{r}{s}\gamma + \frac{\sigma}{s}, E_4 = \gamma,$$
$$c_4 \to E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \alpha.$$

$$d_1 \to E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \alpha,$$
$$d_2 \to E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \alpha,$$
$$d_3 \to E_1 = \beta, E_2 = \frac{r}{s}\gamma + \frac{\sigma}{s}, E_3 = \frac{s}{r}\beta - \frac{\sigma}{r}, E_4 = \gamma,$$
$$d_4 \to E_1 = \frac{r}{s}\gamma + \frac{\sigma}{s}, E_2 = \beta, E_3 = \frac{s}{r}\beta - \frac{\sigma}{r}, E_4 = \gamma.$$

$$
\begin{aligned}
&e_1 \to E_1 = \alpha, E_2 = E_3 = \delta, E_4 = \frac{\sigma + r\delta}{s},\\
&e_2 \to E_1 = E_2 = \delta, E_3 = \alpha, E_4 = \frac{\sigma + r\delta}{s},\\
&e_3 \to E_1 = \delta, E_2 = \frac{\sigma + r\delta}{s}, E_3 = \delta, E_4 = \alpha,\\
&e_4 \to E_1 = \delta, E_2 = \alpha, E_3 = \frac{\sigma + r\delta}{s}, E_4 = \delta.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_1 \to E_1 = \alpha, E_2 = \delta, E_3 = \frac{\sigma + r\delta}{s}, E_4 = \delta,\\
&f_2 \to E_1 = \delta, E_2 = \frac{\sigma + r\delta}{s}, E_3 = \delta, E_4 = \alpha,\\
&f_3 \to E_1 = E_3 = \delta, E_3 = \frac{\sigma + r\delta}{s}, E_4 = \delta,\\
&f_4 \to E_1 = \frac{\sigma + r\delta}{s}, E_2 = \delta, E_3 = \alpha, E_4 = \delta.
\end{aligned}
$$

Выражения меняются, если заменить матричное произведение на комбинаторное. Для матрицы b_1 получим уравнения

$$
\begin{aligned}
sE_1 - rE_4 &= \sigma,\\
sE_2 - rE_4 &= \sigma,\\
sE_3 - rE_2 &= \sigma,\\
sE_4 - rE_2 &= \sigma.
\end{aligned}
$$

Отсюда следуют новые выражения для «энергий»:

$$
\begin{aligned}
&E_1 = E_2 = 2\frac{r}{s}\kappa - \frac{\sigma}{s},\\
&E_3 = 2\frac{r^2}{s^2}\kappa - \frac{r}{s^2}\sigma - \frac{\sigma}{s},\\
&E_4 = 2\kappa.
\end{aligned}
$$

Указанный алгоритм позволяет можно формально анализировать различные ситуации: изменение операций на системе матриц, сравнение «энергетических свойств» разной совокупности матриц, сравнение разных «реакций» на матрицах. Конечно, так можно описывать не только «энергетические свойства». Этот алгоритм задает также структурные свойства объектов, если дополнить его алгоритмом «считывания» такой информации. Кроме этого, возможно введение динамики в анализируемую систему, задавая динамические уравнения для величин

$$r, \sigma, s.$$

Ситуация усложняется, если эти величины согласованы друг с другом. Понятно, что указанная тематика близка к алгоритму построения модели физического квантования, в котором дискретность обусловлена устойчивостью свойств объектов к деформациям.

Сравнение свойств глобальных и локальных факторгрупп

Симметрическая группа четвертого порядка имеет 30 подгрупп, включая саму группу и тривиальную подгруппу, состоящую из единичных матриц. Подгруппы позволяют разбить группу на смежные классы. Так формируются самостоятельные множества, свойства которых, как показывает анализ, могут быть существенно различны.

Назовем глобальной факторгруппой множество, состоящее из подгруппы высокого порядка и её смежных классов. Назовем локальной факторгруппой множество, состоящее из подгруппы малого порядка и её смежных классов. Покажем, что свойства локальных факторгрупп могут быть сложнее свойств глобальных факторгрупп.

Рассмотрим всю группу. Она имеет один смежный класс, который тождественен группе. Их соотношение таково: и группа, и смежный класс имеют одинаковые свойства.

Рассмотрим максимальную, знакопеременную подгруппу симметрической группы $S4$. Она состоит из 12 элементов. В обозначениях, принятых ранее, её структура такова:

$$\left(a_i, e_i, f_i\right), i = 1, 2, 3, 4.$$

Смежный класс один и состоит из элементов

$$\left(b_i, c_i, d_i\right), i = 1, 2, 3, 4.$$

Произведения элементов подчинены правилам:

а) матрицы a_i при воздействии на элементы смежных классов, переставляют их в пределах «своего» семейства,

б) матрицы e_i, f_i превращают один «сорт» элементов в какой-либо другой,

в) матрицы смежного класса при произведении в одном семействе трансформируются в матрицы a_i,

г) матрицы смежного класса при произведении из разных семейств превращаются в матрицы e_i, f_i.

Проанализируем факторгруппу на основе знакопеременной группы четвертого порядка, состоящей из элементов

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 7 & 16 & 23 \\ \hline a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline\end{array}\right).$$

Получим структуру факторгруппы вида

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline a_1 & b_i \\ \hline a_2 & c_i \\ \hline a_3 & d_i \\ \hline a_4 & e_i, f_i \\ \hline\end{array}\right).$$

Поведение произведений элементов достаточно простое. Нормальная подгруппа переставляет элементы в пределах своего смежного класса. Матрицы, принадлежащие знакопеременной группе, находятся на особом положении. Они «играют» по таким правилам:

$$e_i e_j \to f_k, f_i f_j \to e_k,$$

$$e_i f_j \to a_k, f_i e_j \to a_p.$$

При произведениях элементов в других смежных классах они порождают элементы нормальной подгруппы. Есть общее свойство у всех смежных классов: при произведении элементов из разных смежных классов они порождают элементы некоторого дополнительного смежного класса.

Покажем, что симметрическую группу можно охарактеризовать как класс групп. Действительно, мы имеем 3 подгруппы, каждая из которых состоит из 8 элементов:

$$(A,B),(A,C),(A,D).$$

Они изоморфны, так как имеют одинаковую систему определяющих уравнений

$$a^2 = b^4 = e.$$

Кроме этого есть группа, состоящая из 12 элементов

$$(A,E,F)$$

с определяющими уравнениями

$$a^2 = b^3 = e.$$

Вся совокупность матриц в форме класса, объединяющего три изоморфных и одну неизоморфную группу, задает симметрическую группу $S4$. Отношения между элементами такой группы достаточно сложны. Они не становятся проще от того, что множество представлено в форме фактормножества с нормальной группой A и смежными классами B,C,D,E,F. Возникает задача: имеет ли данный класс групп и данное фактормножество симметрийную структуру? Какова она?

Представим рассматриваемое множество в форме произведения матриц. Такая возможность есть. Рассмотрим совокупность матриц, взятых по одному из нормальной подгруппы и каждого смежного класса:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a, b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b, c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = c,$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = d, e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e, f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = f$$

Таблица их произведений такова:

	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	f	e	d	c
c	c	e	a	f	b	d
d	d	f	e	a	c	b
e	e	c	d	b	f	a
f	f	d	b	c	a	e

С таблицей произведений ассоциированы матрицы вида

$$a \to \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&0&1&0\\\hline\end{array}\right), b \to \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0\\\hline\end{array}\right), c \to \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0\\\hline 0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0&0\\\hline\end{array}\right),$$

$$d \to \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&0&0\\\hline\end{array}\right), e \to \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\\\hline\end{array}\right), f \to \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&0&1\\\hline 0&0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0\\\hline 1&0&0&0&0&0\\\hline\end{array}\right).$$

Рассмотрим квадраты этих матриц. Получим

$$A_1 = a^2 = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\end{array}\right), B_1 = b^2 = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0\end{array}\right), C_1 = c^2 = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0\end{array}\right),$$

$$D_1 = d^2 = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0\end{array}\right), E_1 = e^2 = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\end{array}\right), F_1 = f^2 = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\end{array}\right).$$

Мы получили группу, которая ассоциирована с исходной системой матриц. Отличие в том, что матрицы поменялись местами и имеют размерность, равную числу исходных матриц. Кроме этого, они реализуют представление в форме прямой суммы пары групп. Произведение таких матриц характеризуется таблицей, аналогичной предыдущей таблице произведений с точностью до обозначений.

Предлагаемый подход к нахождению симметрийной структуры фактор множеств имеет несколько этапов:

а) нахождение совокупности матриц, взаимные произведения которых порождают фактор множество,

б) построение таблицы произведений для этих матриц,

в) построение матриц, ассоциированных с данной таблицей, используя расположение в ней одинаковых элементов, г) функциональное конструирование из новых матриц известного математического объекта, характеризующего симметрию.

В рассмотренном нами случае полученная новая совокупность матриц является «корнем квадратным» от совокупности, задающей представление исходных матриц в пространстве более высокой размерности. Другими словами, *представления группы и ее фактор множества по подгруппе Клейна (монолиту) в данном случае функционально эквивалентны.*

Задача состоит в том, чтобы выяснить, эффективен ли предложенный алгоритм в других случаях. Для этого нужно проанализировать другие частные ситуации.

Сформируем факторгруппу по подгруппе $(0,3,4) \to (a_1, e_3, f_2)$ на основе максимальной знакопеременной подгруппы. Используем общепринятые обозначения элементов:

a_1	a_2	a_3	a_4	e_1	e_2	e_3	e_4	f_1	f_2	f_3	f_4
0	7	16	23	12	20	3	11	8	4	19	15

.

Получим разбиение множества на классы:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 7 & 12 & 19 \\ 3 & 8 & 16 & 20 \\ 4 & 11 & 15 & 23 \end{array}\right).$$

Получим произведения элементов на основе исходной малой подгруппы:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 7 & 12 & 19 \\ \hline 0 & 7 & 12 & 19 \\ 3 & 11 & 15 & 23 \\ 4 & 8 & 16 & 23 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} & 8 & 16 & 20 \\ \hline 0 & 8 & 16 & 20 \\ 3 & 7 & 12 & 19 \\ 4 & 11 & 15 & 23 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} & 11 & 15 & 23 \\ \hline 0 & 11 & 15 & 23 \\ 3 & 8 & 16 & 20 \\ 4 & 7 & 12 & 19 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & 3 & 4 \\ \hline 7 & 7 & 12 & 19 \\ 12 & 12 & 19 & 7 \\ 19 & 19 & 7 & 12 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & 3 & 4 \\ \hline 8 & 8 & 16 & 20 \\ 16 & 16 & 20 & 8 \\ 20 & 20 & 8 & 16 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & 3 & 4 \\ \hline 11 & 11 & 15 & 23 \\ 15 & 15 & 23 & 11 \\ 23 & 23 & 11 & 15 \end{array}\right).$$

«Картина произведений» аналогична предыдущему случаю. Ситуация становится сложнее при произведении элементов смежных классов. Получим таблицы вида

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 7 & 12 & 19 \\ \hline 7 & 0 & 3 & 4 \\ 12 & 20 & 8 & 16 \\ 19 & 15 & 23 & 11 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} & 8 & 16 & 20 \\ \hline 8 & 12 & 19 & 7 \\ 16 & 4 & 0 & 3 \\ 20 & 23 & 11 & 15 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} & 11 & 15 & 23 \\ \hline 11 & 19 & 7 & 12 \\ 15 & 16 & 20 & 8 \\ 23 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Каждый смежный класс при взаимных произведениях элементов порождает все остальные элементы. Аналогично ведут себя разные смежные классы, порождая «недостающие» элементы и тот класс, который «стоит наверху». Появляются признаки иерархии объектов. Это обстоятельство важно для практики. На этом примере мы получаем подтверждение возможности простыми средствами анализировать иерархические системы. Именно они наиболее часто встречаются на практике. У них есть свои законы и тонкости связей. В данном случае мы имеем их некоторое проявление.

Получим таблицы:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 8 & 16 & 20 \\ \hline 7 & 15 & 23 & 11 \\ 12 & 0 & 3 & 4 \\ 19 & 20 & 8 & 16 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} & 11 & 15 & 23 \\ \hline 7 & 20 & 8 & 16 \\ 12 & 15 & 23 & 11 \\ 19 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} & 7 & 12 & 19 \\ \hline 8 & 4 & 0 & 3 \\ 16 & 23 & 11 & 15 \\ 20 & 12 & 19 & 7 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 11 & 15 & 23 \\ \hline 8 & 23 & 11 & 15 \\ 16 & 12 & 19 & 7 \\ 20 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} & 7 & 12 & 19 \\ \hline 11 & 3 & 4 & 0 \\ 15 & 19 & 7 & 12 \\ 23 & 16 & 20 & 8 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} & 8 & 16 & 20 \\ \hline 11 & 16 & 20 & 8 \\ 15 & 3 & 4 & 0 \\ 23 & 19 & 19 & 7 \end{array}\right).$$

Следовательно, свойства локальных факторгрупп могут быть сложнее свойств некоторых глобальных факторгрупп. С аналогичной ситуацией мы имеем дело, как в физических задачах, так и при анализе социальных проблем.

Малое множество может быть существенным по количественным параметрам, а также по свойствам, которые ассоциированы с ним. Свойства зависят от того, с каким множеством и как оно объединено.

Задача состоит в том, чтобы выяснить математическую структуру данного фактор множества. В рассматриваемом случае есть совокупность отношений в системе произведений. Их можно выразить диаграммами:

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline A & \to & B & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & B & D & C \\ \hline\end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline A & \to & C & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & C & B & D \\ \hline\end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline A & \to & D & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & D & C & B \\ \hline\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline B & \to & A & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & B & B & B \\ \hline\end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline C & \to & A & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & C & C & C \\ \hline\end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline D & \to & A & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & D & D & D \\ \hline\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline B & \to & B & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & A & C & D \\ \hline\end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline B & \to & C & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & C & D & A \\ \hline\end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline B & \to & D & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & C & D & A \\ \hline\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline C & \to & C & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & B & A & D \\ \hline\end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline C & \to & B & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & A & D & B \\ \hline\end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline C & \to & D & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & A & D & B \\ \hline\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline D & \to & D & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & B & C & A \\ \hline\end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline D & \to & B & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & A & B & C \\ \hline\end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline D & \to & C & & \\ \hline & & \downarrow & & \\ \hline & & C & A & B \\ \hline\end{array}\right).$$

Из них следует, что произведение пары объектов «порождает» тройку объектов. Такие ситуации не просты для анализа, но они стандартны при взаимодействии классов элементов. Кроме этого, есть произведения, превращающие один объект в тройку таких же объектов. Эти ситуации реализуются только на произведениях слева на матрицу A. Произведения на эту матрицу справа не выделяет ее из класса других объектов. Такой вариант теоретически возможен, если принять допущение, что объект A функционально различен при произведениях на него слева или справа. Чтобы записать такое предположение, отобразим вначале различие матриц класса A обозначением: $A \equiv \underline{A})$. Различие функциональных свойств выразим формулой

$$\xi \overset{f(2)}{\times} \underline{A}) \neq \underline{A}) \overset{f(1)}{\times} \xi.$$

Требуется найти такие представления элементов и такие произведения, которые позволят получить диаграммы матричных произведений классов элементов, указанные выше. Такая задача, естественно, может быть решена разными способами. Рассмотрим один из вариантов.

Сопоставим анализируемым классам элементов строки (и такие же столбцы):

$$A \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, B \to \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, C \to \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, D \to \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Примем вариант отображения их объединения в форме матрицы

$$\Pi \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведения одного класса на второй представим формальным произведением строки на матрицу. Реальная операция «произведения» пусть будет функциональной. Определим ее морфологически. При произведении класса на объединение классов сначала проводится двойная транспозиция строк: на первой стадии меняются местами строки первого и второго множителей, на втором этапе то же происходит с другими строками.

Второе преобразование можно не делать, если не учитывать порядок элементов в диаграммах произведений. После такого преобразования мы находим разность между данной матрицей и модифицированной под второй множитель матрицей, образованной из первого множителя и дополнительных нулей в матрице. При произведении матрицы слева происходит замена ее строки матрицей, представляющей второй множитель.

Результатом функциональной операции назовем объекты, сопоставленные ненулевым строкам в том порядке, как они расположены в итоговой матрице.

Рассмотрим конкретные реализации этого функционального произведения.

$$\underline{A}) \overset{f(1)}{\times} B \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ D \\ C \end{pmatrix},$$

$$B \overset{f(1)}{\times} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ C \\ D \end{pmatrix},$$

$$\overset{f(1)}{B \times C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ C \\ 0 \\ A \end{pmatrix}.$$

Умножение на матрицу A слева подчиним другой функциональной операции. Морфологически она состоит из нескольких стадий. Сначала происходит трансформация матрицы, представляющей их вместе в соответствии с правилом, используемым ранее. При этом может не использоваться двойная трансформация. Затем данная матрица сохраняется для последующего произведения слева и для её конструируется вторая матрица. Вторая матрица получается из новой матрицы в два шага: сначала идет сдвиг значимых элементов влево на столько «шагов», сколько свободных мест слева в исходной левой матрице, затем эта матрица транспонируется. На следующем этапе реализуется стандартное комбинаторное произведение первой новой матрицы на транспонированную матрицу. Затем производится с данной матрицей операция первого типа: вычитание из неё расширенной матрицы, представляющей исходный левый множитель.

Поясним этот вариант конкретными примерами:

$$B \overset{f(2)}{\times} \underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ B \\ B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$C \overset{f(2)}{\times} \underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ C \\ C \end{pmatrix},$$

$$\underline{A}) \overset{f(2)}{\times} \underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ A \\ A \end{pmatrix}.$$

Заметим, что предлагаемый вариант базируется на пяти операциях:
а) исходным и итоговым объектам ставятся в соответствие их математические «двойники»,
б) стандартной операции сложения матриц,
в) первой функциональной операции, трансформирующей исходные матрицы и реализующей вычитание матриц,
г) второй функциональной операции, которая не только трансформирует матрицы, но она использует комбинаторную операцию,
в) алгоритм считывания полученной информации, имеющий свою структуру.

Анализ представил совокупность матриц, «порождаемых» из единичной матрицы. Это естественно, так как проводимые преобразования матриц имеют тип перестановок. Однако оценить ситуацию можно иначе: алгоритм «порождает» объекты, которые не принадлежат исходной совокупности матриц. Другими словами, формализм расширяет не только операционные возможности исследуемой системы матриц, подчиненных матричному произведению, но и структурный состав исходного множества. Оба указанных обстоятельства согласованы друг с другом.

Следовательно, анализ фактормножеств полезен для исследования как системы операций с получением новых операций, так и для исследования средств и условий порождения новых элементов на основе совокупности базовых элементов.

Складывается впечатление, что различные фактормножества можно классифицировать по новым критериям: какие объекты ассоциированы с ними и каким операциям они подчинены? Совокупная структура новых объектов и новых операций становится объектом исследования. Это направление деятельности может быть полезным для анализа социального поведения, а также для описания практики мышления и динамики чувств.

Пара операций на подмножествах

Нормальная подгруппа симметрической группы, обозначенная нами буквами a_i, характеризуется таблицами:

$$\begin{pmatrix} \times & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overset{k}{\times} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & [1] & [4,2] & [3] & [2,4] \\ a_2 & [2,4] & [1] & [4,2] & [3] \\ a_3 & [3] & [2,4] & [1] & [4,2] \\ a_4 & [4,2] & [3] & [2,4] & [1] \end{pmatrix}.$$

Использованы обозначения:

$$[1]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},[3]=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},[2,4]=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},[4,2]=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Найдем некоторые закономерности, которым подчиняются подмножества симметрической группы, если ее элементы применяются на паре операций: матричной и стандартной комбинаторной операциях. В данном случае имеет место закон:

$$a_i\left(a_i \overset{k}{\times} a_j\right) = a_j\left(a_j \overset{k}{\times} a_i\right).$$

Он выполняется также для смежного класса $B.$ У смежного класса C закон другой:

$$\left(c_1 \overset{k}{\times} c_2\right)\left(c_2 \overset{k}{\times} c_1\right) = \left(c_2 \overset{k}{\times} c_1\right)\left(c_1 \overset{k}{\times} c_2\right).$$

Следовательно, дополнительные операции «порождают» семейство новых законов. Заметим, что операций на множестве может быть много. По этой причине мы всегда имеем дело с системой скрытых законов, если нам неизвестна полная система операций, используемая в реальном явлении. «Срез» свойств, базирующийся на «бедной» системе операций, может быть не просто «беден». Он может задавать ошибочное представление всей совокупности свойств, «обедняя» их без должного обоснования. Понятно, что иногда может быть достаточно поверхностных знаний об объектах и явлениях. Такова конкретная практика.

Примем новый фундаментальный принцип: «Выживает то, что устойчиво к деформациям».

Следуя ему, можно по-новому подойти к проблеме рождения, устойчивости, изменения, и жизни объектов. Тогда можно считать любую модель совершенной, если и когда она корректно и полно учитывает не только условия и обстоятельства, но и деформации. Так как универсальный закон на алгебре не зависит от мультипликативных операций (основы взаимодействия), а также он не зависит от деформации базиса алгебры (аналога приемников информации), можно предположить, что *физические объекты управляются универсальным законом алгебры.* Это возможно в том случае, когда Сознания и Чувства объектов устроены в соответствии с алгоритмом ощущения и контроля универсального закона. Понятно, что нарушение ощущений или контроля приведет к изменению поведения объекта.

Новый принцип указывает *новый алгоритм анализа фундаментальных свойств материального мира.* Устойчивость величины электрического и массового заряда электрона становится важнейшей задачей для математиков и физиков. Конструктивной следует признать только такую модель, которая «справится» с проблемой описания этих экспериментальных данных. Не менее важно и интересно проанализировать устойчивость нейтральных систем. Такими системами являются частицы света. Интуитивно ясно, что между электроном и частицами света нет непреодолимых различий. Однако в этом вопросе следует разобраться со всей дотошностью и тщательностью. Ведь и электрон, и частицы света владеют механизмом жизнеобеспечения на уровне тонкой, субъядерной материи. Естественно предположить, что именно тонкая материя есть источник и движущая сила для Солнца.

Возможна ли такая модель без использования теории и практики Сознаний и Чувств? Где и как эти новые элементы должны быть «встроены» в физические модели? Каковы могут быть в модели элементы сенсуализма (от Кузена). Достаточно ли рассматривать разум как инструмент для производства подходящего отбора? (от Р. Декарта и Гегеля). Какова роль стремления к удовлетворению потребностей? Как этот двигатель изменений и развития согласован с Сознанием и Чувствами?

Начальные элементы деформации фундаментальных физических величин: скоростей и вращений нам известны из теории света. Они применены в теории в форме показателя преломления и показателя отношения. Их скалярный вид при высокой эффективности учета деформации подсказывает возможность обобщений в форме векторных и матричных величин, которые теперь не учитываются в физических моделях. Возможно, для них нужно «свое место». Оно может быть найдено при дополнении пространства и времени новыми переменными. Оно может находиться в «местах», посредством которых согласуются между собой базовые элементы сложной структуры. Учитывая трансфинитность физической реальности, Сознание и Чувства могут моделироваться самостоятельными моделями, относящимися к другим уровням материи. Тогда задача состоит в том, чтобы рассматривать математическую модель, состоящую из уравнений, относящихся к системе уровней материи. Предположение о единстве законов физической реальности на разных уровнях материи упрощает задачу.

Но ее будет сложно верифицировать, так как сложно измерять параметры, относящиеся к разным уровням материи, равно как и согласовывать их между собой. Вероятно, для этого нужно будет сконструировать новые измерительные устройства и алгоритмы анализа. Не исключен вариант изменения логики анализа и оценки практики.

Физические аспекты применения групп и алгебр в физических моделях

Физическую модель можно рассматривать как обоснованную практикой математическую конструкцию, посредством которой реализован согласованный учет изменения величин, ассоциированных с исследуемыми изделиями и явлениями, которые им присущи. Поскольку мы приняли в качестве фундаментального постулата трансфинитное взаимное соответствие (софистатность) структур и активностей, одни и другие свойства согласованы между собой. В физической модели указанные элементы и свойства соединены воедино. Это может быть сделано каким-то оптимальным или неоптимальным способом, косвенно или непосредственно, открыто или скрыто. Искусство моделирования, равно как и искусство применения моделей, зависит от уровня согласованности исследователя с физическими сторонами изделий и явлений и их реализациями в моделях. Владение моделью трансфинитно, как и сама модель. Ни то, ни другое никогда не могут быть завершены и никогда не получат окончательную форму, так как они вовлечены в бесконечный поток эволюции. Средством для согласования свойств изделия и явлений принято считать группы и их приближения в форме, например, полугрупп, квазигрупп. На этой основе задаются величины, а также конструируются физические модели. Обычно они имеют вид алгебр или их приближений в форме моноидов, векторных пространств и других «изделий». Естественно возникает проблема создания алгоритмов для отображения различных свойств физических объектов и явлений на математические изделия, адекватные этим свойствам. Иногда еще более важным обстоятельством является удобство использования таких моделей на практике. Заметим, что сложно разделить меру фундаментальности групп и алгебр в физической модели. Фундаментальны обе конструкции. Их различие состоит только в том, что алгебра «богаче» по количеству операций: у алгебры две операции, а у группы одна операция. Но оба изделия дополнительны и согласованы друг с другом физически. Группу можно рассматривать как изделие, которое «богаче» по количеству явных связей между объектами. У алгебры эти связи могут быть скрыты. Проиллюстрируем эти морфологические замечания. Так, матричные группы задаются матрицами. Например, получим общий элемент группы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что группу всегда можно рассматривать как элемент матричной алгебры. Разным группам соотносятся разные наборы элементов матричной алгебры. С другой стороны, матричная алгебра порождается группой. Возьмем, например, группу

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \left\{ \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Элементы матричной алгебры таковы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\beta - \gamma), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\beta + \gamma), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Они могут быть получены иначе, если использовать элементы группы π, ρ. При конструировании общего элемента группы на основе элементов матричной алгебры мы обнаруживаем у них «скрытые отношения», выражаемые нулевыми строками матриц. При конструировании элементов матричной алгебры из элементов группы нулевых строк нет. Следовательно, нет скрытых отношений. Более того, используются как положительные, так и отрицательные отношения. По этим причинам элементы групп «богаче» по системе отношений.

Группы имеют также дополнительные скрытые свойства. В общем случае возможны два вида произведений, которые порождают пару алгебр:

$$
\begin{gathered}
a^i b^j = -b^j a^i \to a^i b^j - b^j a^i = c_k^{ij} r^k \to \left\lfloor a^i, b^j \right\rfloor = c_k^{ij} r^k, \\
a^i b^j = b^j a^i \to a^i b^j + b^j a^i = d_k^{ij} p^k \to \left\{ a^i, b^j \right\} = d_k^{ij} p^k.
\end{gathered}
$$

Обычно используется на практике только первая алгебра, введенная С. Ли. Вторая алгебра скрыта от моделирования и эксперимента. Группа заполнения физических моделей содержит элементы двух видов. Первый вид ассоциирован с кватернионами, второй вид ассоциирован с антикватернионами. Поскольку этот объект един, желательно иметь алгебру, реализующую это единство. Нетрудно видеть, что такой вариант возможен.

Кватернионы и антикватернионы подчинены разным алгебрам. Укажем алгебру, которая их объединяет. Примем стандартные обозначения:

$$
[a,b] = ab - ba, \{a,b\} = ab + ba.
$$

Легко проверить справедливость первичного алгебраического закона, в котором коммутаторы и анти коммутаторы используются согласованно:

$$
\{x,[y,z]\} + [x,\{y,z\}] - [\{x,y\},z] - \{[x,y],z\} = 0.
$$

Действительно, получим

$$
\begin{gathered}
(xy)z + (yx)z - z(xy) - z(yx) + (xy)z - (yx)z + z(xy) - z(yx) = \\
= x(yz) - x(zy) + (yz)x - (zy)x + x(yz) + x(zy) - (yz)x - (zy)x.
\end{gathered}
$$

Это равенство справедливо при условии ассоциативности произведения. Оно выполняется для матриц и матричного произведения. *Новый закон есть сумма тождества Якоби и пары ассоциаторов:*

$$
\begin{gathered}
\{x,[y,z]\} + [x,\{y,z\}] - [\{x,y\},z] - \{[x,y],z\} = \\
= [x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] + (x,y,z) + (z,y,x) = 0.
\end{gathered}
$$

На множестве с ассоциативной операцией ассоциаторы равны нулю. Поэтому можно считать, что новое тождество есть скрытая форма тождества Якоби. Можно думать иначе: тождество Якоби есть вариант алгебры, скрывающей свойства антикватернионов. С физической точки зрения это возможно, если гравитационные эффекты несущественны и физика взаимодействия базируется на свойствах электрических зарядов и электромагнитного поля. Ситуация усложняется, если для матриц используется комбинаторное произведение. В этом случае нет ассоциативности. По этой причине указанное условие нужно дополнить ассоциаторами

$$
(x,y,z) = x(yz) - (xy)z, (z,x,y) = z(yx) - (zy)x.
$$

Обобщенный закон получает вид:

$$\{x,[y,z]\}+[x,\{y,z\}]-[\{x,y\},z]-\{[x,y],z\}-2(x,y,z)-2(z,y,x)=0.$$

Единство алгебраических свойств рассматриваемого множества матриц, на основе которых единым образом записываются как уравнения электродинамики, так и уравнения массодинамики, есть дополнительный аргумент для такого объединения.

Применим циклические перестановки элементов в первичном законе:

$$\begin{aligned}
&\{x,[y,z]\}+[x,\{y,z\}]-[\{x,y\},z]-\{[x,y],z\}=0,\\
&\{y,[z,x]\}+[y,\{z,x\}]-[\{y,z\},x]-\{[y,z],x\}=0,\\
&\{z,[x,y]\}+[z,\{x,y\}]-[\{z,y\},x]-\{[z,y],x\}=0.
\end{aligned}$$

Объединяя первый и четвертый столбец формул, а также второй и третий с изменением знаков, получим циклические законы:

$$\begin{aligned}
&\{x,[y,z]\}+\{y,[z,x]\}+\{z,[x,y]\}-\{[x,y],z\}-\{[y,z],x\}-\{[z,y],x\}=0,\\
&[x,\{y,z\}]+[y,\{z,x\}]+[z,\{x,y\}]+[\{x,y\},z]+[\{y,z\},x]+[\{z,y\},x]=0.
\end{aligned}$$

Они выполняются как на матричных, так и на комбинаторных операциях. У нас есть единые законы для ассоциативных и для неассоциативных множеств. Ранее было показано, что физические тела подчиняются ассоциативной матричной алгебре, а поведение сознаний и чувств базируется на неассоциативной матричной алгебре. В силу различия их свойств кажется необоснованным предположение о единстве законов, которым они подчинены. В рассматриваемом случае это именно так: *есть единые законы для ассоциативных и для неассоциативных множеств.* Практическое значение найденного единства можно интерпретировать так: **возможны единые законы для поведения тел, сознаний и чувств.**

Заметим, что тождество Якоби применяется в алгебре как аналог условия дифференцирования произведения по Лейбницу:

$$\lfloor x[yz]\rfloor=\lfloor [xy]z\rfloor+\lfloor y[xz]\rfloor.$$

Новая алгебра указывает возможности других «дифференцирований». Действительно, получим равенства:

$$\begin{aligned}
&\{x,[y,z]\}=\{[x,y],z\}+\{y,[x,z]\}+\{z,[y,x]\}-\{[z,y],x\}+\{y[z,x]\},\\
&[x,\{y,z\}]=-[\{x,y\},z]-[y,\{x,z\}]-[z,\{y,x\}]-[\{z,y\},x]+[y\{z,x\}].
\end{aligned}$$

Запишем закон для трех элементов произвольного множества с произвольной операцией произведения (универсальный 3-закон алгебры) в «зеркальном» виде:

$$\{x[yz]\}+\{z[yx]\}-(x,y,z)-(z,y,x)+[x\{yz\}]+[z\{yx\}]-(x,y,z)-(z,y,x)=0.$$

Универсальные 2-законы алгебры получаются из него при замене элементов $y\to x, z\to x$. Они таковы:

$$\{x[yx]\}+[x\{yx\}]-2(x,y,x)=0,$$

$$\{x[xz]\}+[x\{xz\}]+[z\{xx\}]-2(x,x,z)-2(z,x,x)=0.$$

Заметим, что пара элементов подчинена паре законов, тогда как три элемента подчинены одному закону. Ещё раз подтверждается опытный факт, что у множества с меньшим числом элементов может быть больше законов, чем у множества с большим количеством элементов.

Заметим, что возможна постановка *проблемы фундаментальности операций*. Ведь мы понимаем, что система операций может быть несовершенной или неполной. Поэтому нужны алгоритмы коррекции и вывода операций. В системе операций могут быть главные и второстепенные элементы. Их значимость и эффективность тоже может быть разной. Поскольку математические операции неотделимы от физических взаимодействий, желательно иметь эмпирический алгоритм конструирования операций.

Активные числа

Физические объекты характеризуются системой чисел. Объекты активны и обычно это свойство учитывается на основе системы операторов. Однако возможен и дополнительный подход к активности объектов: рассмотрение активных чисел. При размерности пространства представлений выше единицы роль чисел играют матрицы. Изменение каждого элемента матрицы можно рассматривать как числовое проявление активности физических объектов. При размерности представлений, равной единице, активность чисел обеспечивается приданием им дополнительных свойств. В частности, они могут реализоваться посредством применения новых операций для чисел с дополнительными свойствами. Следовательно, активность чисел имеет алгебраическую природу. Понятно, что активность чисел может иметь как аддитивное, так и мультипликативное выражение. Это обстоятельство имеет аналогию с алгоритмами образования сигруппы Галилея-Лорентца, которая следует как аддитивно, так и мультипликативно из обоих указанных групп.

Универсальные $k-$законы для множеств позволяют надеяться на построение моделей явлений, базирующихся на произвольных операциях и на активных числах. Концепция активных чисел имеет свои истоки в физической идее «двуликого Януса»: физические объекты могут иметь разные свойства в разных направлениях. В этом случае обычно говорят об анизотропии тел или их свойств. Поскольку принят постулат софистатности физических и математических изделий, естественно иметь дело с анизотропными числами. Их свойства различны при действии операции слева или справа. Так можно изменить как аддитивные, так и мультипликативные операции. Заметим, что мы не можем менять только одну операцию, если этого требует эксперимент. С математической точки зрения нет ограничений на изменение любой системы операций. Ведь согласие с экспериментом есть подчинение показаниям приборов. Это подчинение авторитарно, как и социальное подчинение. У его есть границы.

Предложим вариант записи анизотропных чисел на примере матриц. Например, слева стоит число, указывающее сдвиг столбцов влево, если матрица находится слева. Справа стоит число, указывающее сдвиг столбцов вправо, если матрица стоит справа. В отсутствие произведения числа слева и справа не проявляют себя. Они «незаметны» для измерительного прибора. Такой вариант аналогичен применению при произведении дополнительных, «скрытых» матриц. Так можно учесть внутренние степени свободы по структуре и активности физических изделий. Проиллюстрируем такой вариант.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_1 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2&a_3&a_1\\b_2&b_3&b_1\\c_2&c_3&c_1\end{pmatrix}.$$

Мы можем поступить иначе: принять вариант сдвига столбцов матриц на некоторое количество шагов. Этот вариант есть обобщение операции на множестве, так как тогда *согласованно действует пара операций*: трансляция плюс матричная операция. Введем обозначения для анизотропных чисел. Получим такие варианты:

$$\left(i|a|j\right)\rightarrow\left(0|a|0\right)\equiv a,\left(0|a|j\right),\left(i|a|0\right),\left(p|a|s\right).$$

Рассмотрим произведение таких чисел:

$$\alpha=(0\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{vmatrix}1),\beta=(2\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}0),$$

$$(0\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{vmatrix}1)\cdot(2\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}0)=(0\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}0)=(0\begin{vmatrix}0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\end{vmatrix}0),$$

$$(2\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}0)\cdot(0\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{vmatrix}1)=(2\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}1).$$

Следовательно,

$$\alpha\cdot\beta\neq\beta\cdot\alpha.$$

В рассматриваемом случае произведение может быть как ассоциативным в каком-то наборе матриц, так и неассоциативным в другом наборе. Его результат зависит от распределения «показателей неассоциативности чисел», расположенных слева и справа от базового числа. Понятно, что указанное правило может быть применено не только к матрицам, но и к их элементам. В этом случае ситуация существенно усложняется. Приняв условие локального изменения физических обстоятельств, как по структуре, так и по активности исследуемых изделий, мы можем найти совокупность локальных законов, которые не укладываются в рамки моделей с пассивными числами. С другой стороны, можно будет так «подобрать» активности чисел и операций, что согласие расчета с экспериментом может быть полным. Естественно, что задачи физики многопараметрические. Поэтому требуется рассмотреть согласования в системе параметров. Заметим, что возможен вариант активной анизотропии чисел, когда параметры анизотропии подчинены самостоятельным законам. Поскольку нас интересует согласование расчетов для физических тел, а также для сознаний и чувств, анизотропные числа совместно с универсальными законами алгебры могут стать основой для искомого объединения. Заметим, что расширение свойств чисел может иметь обоснование согласно концепции о наличии явных и скрытых свойств у физических объектов. Так, действительные числа можно отнести к явным характеристикам явления или изделия, а комплексные, двойные и дуальные числа могут быть проявлениями скрытых от эксперимента свойств изделий и явлений.

Рассмотрим совокупность матриц размерности 3×3 с целью получения алгебры Клиффорда на основе алгоритма активных чисел. Пусть заданы новые числа, дополненные буквенными индексами, которым сопоставлены значения некоторых углов поворота окружности. Пусть их произведение подчинено функциональному правилу:

$$1_a \cdot 1_b = 1 \cdot 1 \cdot \psi_{ab},$$

$$a \to 0, b \to \frac{\pi}{2},$$

$$\psi_{ab} = \delta_{ab} \cos(a-b) + (1-\delta_{ab}) \sin(a-b).$$

Тогда

$$1_a \cdot 1_a = 1_b \cdot 1_b = 1, 1_a \cdot 1_b = -1, 1_b \cdot 1_a = 1.$$

Матрицы

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1_a \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_b \end{pmatrix}$$

задают произведения

$$\gamma_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы имеем алгебру Клиффорда с соотношениями

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{ij} e.$$

У алгебры с такой размерностью матриц есть два центра: матрицы, которые не меняют исходных матриц при произведении как слева, так и справа. В качестве первой матрицы применяется единичная матрица e. Вторая матрица есть упорядоченное произведение базовых матриц и тех, которые они порождают. В данном случае получим

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_{12} = -e.$$

Следовательно, применение активных чисел может согласовываться с законами, которым подчиняются стандартные числа.

При описании Сознаний и Чувств следует ожидать, что не все их свойства будут описываться числами и операциями, привычными для нас и следующими из анализа структуры физических Тел и их динамики. Понадобятся новые числа (вероятно, с принципиально новыми свойствами), а также новые операции. Они могут быть «активны» и подчиняться «своей динамике». Однако в согласии с принципом софистатности уровней и свойств физической материи $[2]$, они имеют аналог в привычной для нас практике. Конечно, такое соответствие может быть сложным, скорее, следует ожидать трансфинитности соответствия.

Конструирование групп и их следствий

Конструирование групп можно выполнить разными способами. Укажем известный вариант, предложенный в прошлом веке Эйнштейном. Он вывел группу Лорентца, применяя введенное им правило синхронизации часов световым сигналом, распространяющимся в вакууме. На основе этой группы доказана инвариантность уравнений электродинамики. Получены новые решения. Возможны различные средства для «рождения» групп. Аналогичное замечание справедливо для алгебр. Однако всегда нужно остерегаться каких-либо окончательных выводов по применению и интерпретации групп и алгебр. Практика показывает, что и применения, и интерпретации трансфинитны. Есть много применений и много интерпретаций. Аналогично есть много ограничений и дополнительных условий. Если они не учтены или учтены некорректно, мы приходим к недостаточной или некорректной практике и интерпретациям. Так, попытка описать электромагнитное поле на основе свойств пространства-времени четырехмерного пространства Минковского, ассоциированного с группой Лорентца, имеет смысл. Однако у этой попытки есть свои возможности и границы. Пространство и время бесструктурны, а физическое электромагнитное поле представляет собой ансамбль структурных объектов. Поэтому нужно выходить за пределы непрерывной, полевой интерпретации электромагнитного поля.

Понятно также, что для понимания и корректной интерпретации преобразований Лорентца следует ввести пространство скоростей. Требование равенства «измеренного значения скорости» для пары наблюдателей можно представить выражениями:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c}{\sqrt{w}}=\frac{dx'}{dt'}\to\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{c^2}{w}=\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2\to wdx^2-c^2dt^2=wdx'^2-c^2dt'^2.$$

Тогда «срабатывают» соотношения дифференциалов координат вида

$$dx'=\frac{dx-vdt}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}},dt'=\frac{dt-w\frac{v}{c^2}dt}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Из них получим формулу для « условного сложения скоростей»:

$$u'=\frac{u-v}{1-\frac{w}{c^2}uv}$$

Если $w\neq 0$, она не соответствует законам сложения векторов в евклидовой геометрии. Физическая суть этого отличия в настоящее время полностью выяснена. Сложение скоростей соответствует правилам неевклидовой геометрии потому, что часть кинетической энергии анализируемых объектов «уходит» на изменение частоты электромагнитного поля. Рассматриваемые формулы не согласованы явно с таким изменением. Они носят условный характер: получены при указанном выше дополнительном условии инвариантности величины некоторой параметризованной скорости. Это различие является одновременно уроком для лиц, практикующих в физике. Действительно, *если обнаружено отличие от привычных, стандартных предсказаний, то причиной этого может быть некоторое дополнительное условие. Оно может иметь математический и физический смысл и обоснование.*

Учёт дополнительных условий можно реализовать усложнением математических объектов, на основе которых описываются объекты или явления. Так, сигруппу Галилея-Лорентца удобно представить в форме суммы трёх групп. Действительно, получим

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dt' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} = \left\{ \gamma \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix}.$$

В этом варианте обеспечивается дополнение группы Галилея новыми элементами, посредством которых учитываются эффекты «растяжения» и «отсчета временных интервалов». Евклидовость сложения скоростей становится частным случаем более общей ситуации. Группа Лорентца также является частным элементов в согласованной системе групп, посредством которых описываются параметры явления.

Фактор неевклидовости явлений, в широком смысле слова, выступил в роли дополнительного условия в физике и дополнительного постулата в геометрии. Подчинившись ему, геометрия смогла расширить границы своих владений. В приложении к физике неевклидовость сложения скоростей используется аналогично: рассматривается правило сложения без учета **всех** физических условий. Учет всей совокупности условий возможен как в рамках расширения физической модели, так и в рамках системы дополнительных постулатов, достаточных для математической модели релятивистских явлений. Но это вовсе не значит, что эти варианты противоречат друг другу. Ведь постулат обычно появляется там, куда «не может ступить нога» экспериментатора.

Теперь уже понятно, что *структурные свойства электромагнитного поля* учитываются не группой Лорентца, а группой заполнения физических моделей. Для описания электромагнитного поля мы применяли пару кватернионов. При произведении их элементов получаются антикватернионы. На их основе можно описывать гравитационное поле. С другой стороны, произведения элементов антикватернионов порождают кватернионы. Так получено математическое подтверждение идеи единства электромагнетизма и гравитации.

Легко преобразовать модель электродинамики, построенную на кватернионах, в модель, построенную на антикватернионах. Для этого можно использовать группу перестановок Клейна:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее можно трансформировать на основе знаковой группы, получив пару кватернионов:

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & e_1 & e_2 & e_3 & E & \square \\ \hline \downarrow & - & + & + & + & \downarrow \\ \downarrow & + & - & - & + & \downarrow \\ \downarrow & - & + & - & + & \downarrow \\ \downarrow & + & + & + & + & \downarrow \\ \hline \square & a_1 & a_2 & a_3 & E & \square \\ \hline \end{array} \right), \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & -e_1 & -e_2 & -e_3 & E & \square \\ \hline \downarrow & - & + & - & + & \downarrow \\ \downarrow & - & - & + & + & \downarrow \\ \downarrow & + & - & - & + & \downarrow \\ \downarrow & + & + & + & + & \downarrow \\ \hline \square & b_1 & b_2 & b_3 & E & \square \\ \hline \end{array} \right).$$

Действуя аналогично, можно преобразовать антикватернионы в кватернионы. Заметим, что различие в законах преобразования, следующее из таблицы, косвенно свидетельствует о различии метрик, посредством которых элементы разных кватернионов объединены в единую конструкцию.

У нас есть основания конструировать физические модели, в которых объединены свойства, относящиеся как к электромагнетизму, так и к гравитации. В настоящее время такая модель получена. Математическая конструкция, ей соответствующая, следует из *алгоритма дифференциального проектирования* уравнений Максвелла:

$$\Pi^i \partial_i \left(g^{ij} a_i \partial_j \Psi + r^{ij} b_i \partial_j \bar{\Psi} \right) = 0.$$

Здесь Π^i есть проекционные идемпотенты. Добавим к ней положительные и отрицательные слагаемые, содержащие третьи производные от четырехпотенциалов, которые в сумме равны нулю. Учтем антисимметричность тензора электромагнитного поля. Получим систему уравнений

$$\partial_m \left(\partial_k \Phi_{nl} - \partial_n \Phi_{kl} \right) + \partial_l \left(\partial_n \Phi_{km} - \partial_k \Phi_{nm} \right) = 0.$$

Она «порождает» обобщенные уравнения электродинамики и обобщенные уравнения массодинамики (гравитации), если их поля задаются, соответственно, антисимметричными и симметричными тензорами второго ранга, зависящими от их четырехпотенциалов.

Анализ структуры октонионов показал, что их можно получать, используя элементы группы заполнения. Например, можно взять кватернион с элементами a_i и один элемент из другого кватерниона, например b_1. Умножая первые элементы на выбранный элемент, получим элементы антикватернионов вида f_2, e_3, c_2. Вместе с единичной матрицей они образуют октонион. Понятно, что мы имеем семейство октонионов. На них можно конструировать новые физические модели. Матрицы, дополнительные первому кватерниону, таковы:

$$b^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На них можно конструировать модели по алгоритму, используемому в электродинамике и массодинамике. Заметим, что октонион получен на основе объединения нормальной подгруппы и одного смежного класса этой подгруппы. Имеем согласование, следующее из анализа группы заполнения физических моделей:

$$\xi A \Rightarrow \begin{cases} b_1, c_2, e_3, f_2, \\ b_2, c_1, e_1, f_3, \\ b_3, c_3, e_2, f_1. \end{cases}$$

Заметим возможность, индуцируемую моделью октонионов. Будем следовать аналогии с моделями электродинамики и массодинамики. «Оценим» по количеству элементов, относящихся к кватернионам и антикватернионам, физическую сущность предлагаемой модели. Так, в модели электрона Дирака есть два элемента, относящиеся к кватернионам и два элемента, относящиеся к антикватернионам. Тогда «аналог спина» есть величина, равная отношению количества элементов кватерниона к полному количеству базовых элементов. В данном случае получим $s=\frac{1}{2}$ При описании электромагнитного поля используются все шесть элементов кватерниона. Поэтому $s=1$. Если из 7 элементов есть только 2 элемента кватерниона, то $s=\frac{2}{7}$. Поэтому возникает предположение, что октонионы могут быть пригодны для описания совокупности объектов, содержащих электрические и гравитационные предзаряды: системы из предзарядов.

Используя антикватернионы, можно получить аналоги октонионов. Так, получим матрицы:

$$e_3, e_2, e_1, f_1, e_3 f_1 = b_2, e_2 f_1 = a_3, e_1 f_1 = c_2.$$

Они задают таблицу произведений:

$\times$	e_3	e_2	e_1	f_1	b_2	a_3	c_2
e_3	X	e_1	e_2	b_2	f_1	$-c_2$	$-a_3$
e_2	e_1	X	e_3	a_3	$-c_2$	f_1	$-b_2$
e_1	e_2	e_3	X	$-c_2$	a_3	b_2	$-f_1$
f_1	$-b_2$	$-a_3$	$-c_2$	X	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$
b_2	$-f_1$	c_2	a_3	e_3	$-X$	$-e_1$	$-e_2$
a_3	c_2	$-f_1$	b_2	e_2	$-e_1$	$-X$	$-e_3$
c_2	a_3	b_2	$-f_1$	$-e_1$	e_2	e_3	X

Это множество ассоциативно. Учитывая возможность использования активных чисел, мы можем добиться изменения знака произведений. Например, заменив на знак плюс знак минус произведения $f_1 \cdot b_2 = e_3$, получим неассоциативность произведения на c_2:

$$\left(f_1 b_2\right) c_2 = -a_3 \neq f_1 (b_2 c_2) = a_3.$$

Достаточно изменить отношения (изменить изотропию на анизотропию) для пары элементов, чтобы множество матриц получило новое качество: множество превратилось из ассоциативного семейства в неассоциативное. Как говорят в народе: «паршивая овца все стадо портит».

Уравнения движения жидкости в модели алгебры на антикватернионах

Уравнения движения жидкости можно записать в разных формах**.** В частности**,** они могут быть записаны на кватернионах**.** Рассмотрим уравнения Ньютона-Эйлера на антикватернионах. Этот вариант интересен тем, что он приближает нас к модели массодинамики, которую удобно записывать на антикватернионах. Уравнения имеют вид:

$$\left\{ v^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 & 0 \\ \partial_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 & 0 & 0 & 0 \\ v^3 & 0 & 0 & 0 \\ v^2 & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + v^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v^3 & 0 & 0 \\ 0 & v^0 & 0 & 0 \\ 0 & v^1 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$
+\left\{v^3\begin{pmatrix}0&\partial_3&0&0\\\partial_3&0&0&0\\0&0&0&\partial_3\\0&0&\partial_3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&v^2&0\\0&0&v^1&0\\0&0&v^0&0\\0&0&v^3&0\end{pmatrix}+v^0\begin{pmatrix}\partial_0&0&0&0\\0&\partial_0&0&0\\0&0&\partial_0&0\\0&0&0&\partial_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&v^1\\0&0&0&v^2\\0&0&0&v^3\\0&0&0&v^{\to 0}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f^1\\f^2\\f^3\\f^0\end{pmatrix}.
$$

«Волновая» часть уравнений такова:

$$
\left\{\partial_1\begin{pmatrix}0&0&0&\partial_1\\0&0&\partial_1&0\\0&\partial_1&0&0\\\partial_1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^0&0&0&0\\v^3&0&0&0\\v^2&0&0&0\\v^1&0&0&0\end{pmatrix}+\partial_2\begin{pmatrix}0&0&\partial_2&0\\0&0&0&\partial_2\\\partial_2&0&0&0\\0&\partial_2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&v^3&0&0\\0&v^0&0&0\\0&v^1&0&0\\0&v^2&0&0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+
$$

$$
+\left\{\partial_3\begin{pmatrix}0&\partial_3&0&0\\\partial_3&0&0&0\\0&0&0&\partial_3\\0&0&\partial_3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&v^2&0\\0&0&v^1&0\\0&0&v^0&0\\0&0&v^3&0\end{pmatrix}+\partial_0\begin{pmatrix}\partial_0&0&0&0\\0&\partial_0&0&0\\0&0&\partial_0&0\\0&0&0&\partial_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&v^1\\0&0&0&v^2\\0&0&0&v^3\\0&0&0&v^{\to 0}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\Delta\vec{v}.
$$

Сумма указанных выражений дает аналог уравнений Навье-Стокса. Общая структура уравнений очень проста. Она выражается через волновую функцию, сконструированную на основе группы перестановок Клейна и систему идемпотентов, формирующих указанные функции. Волновую часть можно рассматривать как дифференциальное продолжение кодифференциальной части (конвективных слагаемых). Естественно продолжить эти уравнения на дифференциальные и кодифференциальные слагаемых высших порядков. Заметим, что при использовании знаковой группы уравнения гидродинамики могут быть записаны на кватернионах. Понятно, что допустимо расширение механики на комплексные скорости и комплексные производные.

$$
av^k\partial_k(\ldots)+bg^{kn}\partial_k\partial_n(\ldots)+c\dot{v}^k\partial_k(\ldots)+d\partial_k\partial_k\partial_k(\ldots)+\ldots=\Phi.
$$

Слово механика имеет своим корнем славянское слово «мех», что соответствует сути и смыслу проводимого анализа и практики. В этот «мех», как оказывается, можно многое вложить.

В частности, через кватернион механика жидкости «подсказывает» математические «корни» гравитации. Гравитация задает систему отношений, выражаемую симметричными тензорами. В простейшем случае это будет тензор второго ранга. В общем случае величины будут задаваться более сложно. Заметим, что механика в формализме дифференциальных форм, как и простейшая электродинамика, формулируются на основе антисимметричных выражений. В рассматриваемом случае выражения симметричны.

Другой формализм описания гидродинамики и электродинамики «подсказывает» новые грани этих трансфинитных явлений. Структуры и активности можно рассматривать разными математическими и эмпирическими средствами с разных сторон. Такова практика. Она подтверждает софистатности физики и математики.

Неформальное единство различных групп

Не только при первом знакомстве с группами, но и при их применении на практике, кажется, что они «далеки» друг от друга по своей структуре и свойствам. Их единство по математическим свойствам, согласно принципу софистатности математических и физических изделий, может и должно проявлять себя в их физическом единстве. Покажем, что для этого есть неформальные основания. Начнем с циклической группы Гаусса. Её образующей является мнимая единица. Она порождает ещё три элемента, которым мы сопоставим номера мест: $\{i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1\} \leftrightarrow \{1,2,3,4\}$. Таблица произведений такова:

$\times$	i	-1	$-i$	1
i	-1	$-i$	1	i
-1	$-i$	1	i	-1
$-i$	1	i	-1	$-i$
1	i	-1	$-i$	1

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow i\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+(-i)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Она косвенно «порождает» четыре матрицы симметрической группы S_4. Взаимное произведение этих матриц дополняет их до группы, которая содержит, в частности, группу Клейна. Известно, что эта группа при действии на нее знаковой группы порождает группу заполнения физических моделей.

Другими словами, истоки группы заполнения есть в таблице произведений циклической группы Гаусса. Им соответствуют графические диаграммы:

$$i\to\begin{pmatrix}4&\longleftrightarrow&1\\ & & \\3&\longleftrightarrow&2\end{pmatrix},(-1)\to\begin{pmatrix}2&&1\\\updownarrow&&\\4&&3\end{pmatrix},(-i)\to\begin{pmatrix}4&&1\\\updownarrow&&\updownarrow\\3&&2\end{pmatrix},1\to\begin{pmatrix}2&&1\\&&\updownarrow\\4&&3\end{pmatrix}.$$

Другие матрицы группы S_4 получатся при замене мест элементов в указанных графических диаграммах. Например, получим вариант с заменой элемента с номером один на элемент с номером два:

$$i\to\begin{pmatrix}4&\longleftrightarrow&2\\ & & \\3&\longleftrightarrow&1\end{pmatrix},(-1)\to\begin{pmatrix}1&&2\\\updownarrow&&\\4&&3\end{pmatrix},(-i)\to\begin{pmatrix}4&&2\\\updownarrow&&\updownarrow\\3&&1\end{pmatrix},1\to\begin{pmatrix}1&&2\\&&\updownarrow\\4&&3\end{pmatrix}.$$

Полагая, что так заданы места элементов, получим, соответственно, матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При взаимном произведении они также «порождают» группу, которая содержит группу Клейна. Анализ показал, что для получения элементов симметрической группы типа E, F требуется рассматривать «цепь» из пары элементов группы Гаусса:

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & 4 \\ \hline \updownarrow & & \\ \hline 3 & \longleftrightarrow & 2 \\ \hline & & \updownarrow \\ \hline 4 & & 1 \\ \hline \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \to 3 \to 2 \to 1 \\ 1 \to 2 \to 3 \to 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, графические диаграммы при их объединении способны «порождать» новые элементы, которые отсутствуют при анализе единичных диаграмм. Заметим, что произведение матриц, «порожденных» единичными диаграммами, дает матрицы, соответствующие объединенным диаграммам. Другими словами, связанным графическим диаграммам может соответствовать произведение матриц, ассоциированных с несвязанными диаграммами. Такова новая связь геометрических, а также некоторых топологических задач с теорией конечных групп.

Заметим, что объединение группы Клейна с указанными дополнительными элементами можно рассматривать как объединение нормальной группы с её смежным классом. Эта нормальная группа есть типичный антикватернион. Следовательно, есть неформальная связь между группой Гаусса и моделью антикватернионов. Однако есть еще более глубокая неформальная связь. Мы знаем, что октонион можно сконструировать на основе кватерниона, выступающего в роли нормальной группы, и его смежного класса. Следовательно, исходные элементы произведения элементов группы Гаусса неформально связаны с моделью октонионов.

Есть другой вариант для связи элементов графических диаграмм группы Гаусса. Представим его в форме «ленты» Мёбиуса, на каждой поверхности которой представлена пара диаграмм:

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & 1 \\ \hline \updownarrow & & \\ \hline 3 & & 4 \\ \hline \updownarrow & & \\ \hline 1 & & 2 \\ \hline \end{array}\right) \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \longleftrightarrow & 2 \\ \hline & & \\ \hline 4 & & 3 \\ \hline & & \\ \hline 2 & \longleftrightarrow & 1 \\ \hline \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \to 3 \to 2 \to 1 \\ 1 \to 2 \to 3 \to 1 \end{Bmatrix}.$$

Таков другой способ получения матриц сектора E, F симметрической группы S_4.

При построении группы заполнения физических моделей мы использовали матрицы:

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим обоснование такого выбор. Здесь есть несколько вариантов. Первый вариант базируется на рассмотрении этих элементов в форме соединения элементов нормальной подгруппы с элементами смежного класса. Действительно, рассмотрим группу как «конденсатор», верхняя пластина которого соответствует нормальной подгруппе. Тогда получим

$$\left(\,{}^{G}\!/_{H}\Rightarrow\begin{array}{|cc|cc|}\hline \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}0&1\\-1&\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}\Rightarrow\frac{H}{G_H}\right).$$

Элементы из первого и третьего квадрантов образуют множество, которое «порождает» на основе тензорного произведения элементы группы заполнения с точностью до произведения их на минус единицу. Фактически этот способ есть вариант определенной «экономии усилий», так как можно, конечно, использовать тензорное произведение всех элементов друг на друга. Указанная группа есть группа $SL(2,R)$. Тензорное произведение её элементов задает матричные элементы группы Хопфа. Алгебра, ей соответствующая, есть алгебра Хопфа. Поскольку физические модели электромагнетизма и гравитации есть элементы групповой алгебры на группе Хопфа, следовательно, они принадлежат алгебре Хопфа. Однако не только они. Все фундаментальные уравнения физики могут быть записаны на основе группы Хопфа, названной группой заполнения физических моделей. Поэтому фундаментальная физика вложена в алгебру Хопфа. Это не случайно. Суть физики, как сейчас становится понятным, состоит в анализе и приложениях объектов, сконструированных их двух электрических и двух гравитационных предзарядов. Этим парам соответствует группа отношений между парой объектов. В частности, это группы $SL(2,R),SL(2,C)$. Их тензорное произведение аналогично указанному выше объединению графических диаграмм. Комплексификация модели соответствует учету не только внешних проявлений данных полей, но и совокупности их внутренних свойств.

С другой стороны, выбор базовых элементов для конструирования группы заполнения можно реализовать на основе «демократического выбора» порождающих элементов из совокупности минимальных групп. Они таковы:

$$a)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\alpha,b)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\beta,c)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\gamma,$$

$$\left(\,{}^{G}\!/_{H}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\delta,\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\to\frac{H}{G_H}\right).$$

Таблица произведения порождающих элементов такова:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \times & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline \alpha & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \beta & \alpha & -\delta & -\gamma \\ \gamma & \gamma & \delta & -\alpha & -\beta \\ \delta & \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{array}\right) =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы могут использоваться для конструирования физических моделей.

Физические истоки различия алгебр

Исходные элементы алгебры Клиффорда $U^R(2,0)$ вида

$$e^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

подчинены соотношениям:

$$e^a e^b + e^b e^a = 2\eta(a,b)e,$$
$$\eta(a,b) = diag(1,1).$$

Произведения элементов базиса на себя дают единичную матрицу. Произведения разных элементов базиса антикоммутативны и в сумме дают ноль. Заметим, что просто соотносятся базисы алгебры Клиффорда и алгебры Грассмана. Действительно, получим, например

$$e^{a_1} \overset{k}{\times} e^{a_2} = \frac{1}{2}\left(e^{a_1}e^{a_2} - e^{a_2}e^{a_1}\right) = e^{a_1}e^{a_2} - \frac{1}{2}\left(e^{a_1}e^{a_2} + e^{a_2}e^{a_1}\right) = e^{a_1}e^{a_2} - \eta^{a_1a_2}e...$$

Это означает, что *базисные элементы обоих алгебр* могут быть одинаковы. Отличие алгебр в выборе алгоритма их произведения.

В случае алгебры Грассмана метрика вырождена, так как имеют место соотношения

$$e^{a_1} \overset{k}{\times} e^{a_2} = -e^{a_2} \overset{k}{\times} e^{a_1} \Rightarrow e^{a_1} \overset{k}{\times} e^{a_2} + e^{a_2} \overset{k}{\times} e^{a_1} = 0 = \eta^{a_1a_2} e \Rightarrow \eta^{a_1a_2} = diag(0,0).$$

Аналогично выглядит ситуация, если исходное множество рассматривать как факторизованное множество с нормальной группой

$$e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, e^1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, e^{12}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$e^1e^1=e^2e^2=e, e^1e^2-e^2e^1=0.$$

Ему соответствует алгебра

$$e^ae^b+(-1)^{1-\delta(a,b)}e^be^a=2\delta(a,b)e,$$

$$\delta(a,b)=\begin{cases}1, a=b,\\ 0, a\neq b.\end{cases}$$

Выражение можно упростить, приняв общее правило для всех элементов множества

$$e^ae^b-e^be^a=0.$$

Изменим операции с целью получения универсальных законов, которые справедливы для элементов различных множеств и для различных операций. Пусть

$$a\circ b=k(ab+ba)=k\{a,b\},$$
$$a\circ b=k(ab-ba)=k[a,b].$$

Тогда выполняются законы «зеркала»:

$$(z\circ y)\circ x\equiv x\circ(y\circ z), \{\{z,y\},x\}=\{x,\{yz\}\}, [[z,y],x]=[x,[yz]].$$

Действительно, получим

$$(zy+yz)x+x(zy+yz)=x(yz+zy)+(yz+zy)x,$$
$$(zy-yz)x-x(zy-yz)=x(yz-zy)-(yz-zy)x.$$

Законы «зеркала» можно использовать для конструирования полиномиальных законов на системе операций, так как его элементы допускают такую возможность. *Эти выражения могут содержать полиномы разных степеней на разных операциях.* Кажется естественным рассматривать выражения указанного вида как универсальные законы «равновесия».

Ситуация становится более интересной, если рассматривать указанные выше произведения как «ортогональную систему». Для этого достаточно ввести множители с законами

$$\tilde{A}_i\tilde{A}_i=e, \tilde{A}_i\tilde{A}_j=\tilde{A}_j\tilde{A}_i=0,$$

определив операцию

$$a*b=\tilde{A}_1k_1(ab+ba)+\tilde{A}_2k_2(ab-ba).$$

Тогда

$$(a*b)*c=\tilde{A}_1k_1\left(\left(\tilde{A}_1k_1(ab+ba)+\tilde{A}_2k_2(ab-ba)\right)c+c\left(\tilde{A}_1k_1(ab+ba)+\tilde{A}_2k_2(ab-ba)\right)\right)+$$
$$+\tilde{A}_2k_2\left(\left(\tilde{A}_1k_1(ab+ba)+\tilde{A}_2k_2(ab-ba)\right)c-c\left(\tilde{A}_1k_1(ab+ba)+\tilde{A}_2k_2(ab-ba)\right)\right)=$$
$$=k_1^2(ab+ba)c+k_1^2c(ab+ba)+k_2^2(ab-ba)c-k_2^2c(ab-ba).$$

Аналогично получим

$$c*(b*a)=k_1^2(ab+ba)c+k_1^2c(ab+ba)+k_2^2(ab-ba)c-k_2^2c(ab-ba).$$

Следовательно,

$$a*(b*c)\equiv c*(b*a).$$

Специфической чертой данного закона является то, что он содержит в себе обе операции, но в силу их ортогональности частично скрывает их.

Алгоритмы конструирования групп, алгебр и их аналогов

Напомним, что при рассмотрении групп и алгебр используется множества классов: совокупность одинаковых элементов. Другими словами, эквивалентность задается условием равенства элементов. Символ, которым представляется элемент множества, есть выражение для класса элементов с таким символом. Конструирование конечных групп можно реализовывать разными способами. Элементарные группы получаются, например, при таких объединениях элементов:

$$1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ 2)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},4)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},5)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Объединение элементов таких групп порождает «консорциумы», способные превратиться при их дополнении новыми элементами в группы или в алгебры. Объединим элементы групп 2) и 3). Получим «консорциум»

$$G(K)\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},e_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Произведение двух последних элементов дает новый элемент, в совокупности с которым мы приходим к алгебре Клиффорда $U^R(2,0)$. В алгебре используется набор элементов, ограниченный правилом индексации: по первому и второму элементам базиса конструируется третий элемент. Произведение всех указанных элементов порождает новую группу:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Ситуация выглядит так: алгебра «богаче» на количество операций, группа «богаче» на количество элементов. Естественно, что указанные множества дополняют друг друга. Возможен разный выбор этих элементов с образованием новых множеств. Так, рассмотрим группы:

$$\alpha \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\beta \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Они подчинены закону

$$\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a = 0$$

для любой пары элементов из «своей» группы. В данном случае у групп и у алгебр число элементов одинаково.

Возможны различные варианты конструирования групп, ассоциированных с симметриями геометрических объектов. Симметрии правильного треугольника ассоциированы с его вращением на угол 120 градусов, а также с тремя зеркальными симметриями относительно трех его высот. На языке образующих группы получим 6 элементов

$$e, t, t^2, s, st, st^2.$$

Группа $GL(2, F_2)$ может быть сконструирована из элементов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с указанными обозначениями получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, t^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, st = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, st^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Они могут быть представлены в другой форме, которая эквивалентна первой по взаимным произведениям:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, t^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, st = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, st^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Комбинаторная операция на указанных матрицах показывает новую возможность: *на элементах группы «рождаются» элементы алгебры*. Действительно, получим

$$t \overset{k}{\times} t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, t \overset{k}{\times} \left(t \overset{k}{\times} t \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s\overset{k}{\times}t^2=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}...$$

Данную симметрию можно выразить матрицами большей размерности:

$$e=hh=ll=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},t=lh=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},t^2=hl=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$s=l=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},st=h=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},st^2=hlh=lhl=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Они интересны с физической точки зрения, так как на их основе можно записывать в удобной математической форме все основные физические законы. Совокупность матриц подчинена ряду «локальных» (частичных) законов. На матрицах s,t они таковы:

$$stst=tsts=e,$$

$$tst=t^2st^2=t^3st^3=s,$$

$$stts=t,tsst=t^2=sts=s^3ts^3.$$

На матрицах h,l получим $lh=t,hl=t^2$, а также

$$hllh=lhhl=e,hlhl=lh,lhlh=hl...$$

Заметим, что конструирование матриц и алгебр базируется на выборе различных элементов множеств и различных операций с ними. Дополнительно могут быть заданы, например, элементы знаковой группы или группы перестановки значимых элементов. Возможны варианты, как показано на примере сигрупп, аддитивного или мультипликативного объединения групп. Однако до физического использования данных алгоритмов конструирования анализ обычно «не доходит». Физические модели во многом рассматриваются как самостоятельные «изделия».

При анализе и использовании когомологий неясно их место и значение в физических моделях. Обычно для когомологий не используются динамические уравнения. Эти замечания составляют суть программы *применения когомологий в физических моделях*. Заметим, что речь должна идти не только о применении соответствующих функций, но и *динамики параметров, от которых зависят эти функции.* Иногда это не так сложно сделать. Так, фундаментальные физические модели удобно представить матрицами размерности 4.

Их базис образуют элементы симметрической группы. В который раз подтверждается тезис физиков, что все объекты структурны, они состоят из конечного числа других объектов. Ведь других экспериментальных данных на практике нет, мы не имеем информации о свойствах бесконечных объектов.

В частности, можно использовать элементы (с точностью до эквивалентности):

$$e = a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t = f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s = b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, st = c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, st^2 = d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В теории используется набор из 6 элементов, по одному из каждого класса. В моделях используются все элементы данной симметрической подгруппы. Они имеют вид *билинейных групповых алгебр на паре групп*.

Электродинамика Максвелла на симметрической группе S_3

Общепринят подход, согласно которому электромагнитное поле, равно как и индукции, задаются антисимметричными тензорами. В спинорной форме записи они записываются через кватернионы, которые также могут быть представлены антисимметричными матрицами. Идея единства электромагнетизма и гравитации инициирует задачу построения электродинамики на основе симметричных тензоров. Такие возможности есть. Модели в таком подходе конструируются *не на группах Ли, а на конечных группах.* Обычно физические модели конструируются на непрерывных группах Ли в рамках подхода Лагранжа или Гамильтона. Векторная и тензорная форма их записи *соответствует тривиальному представлению конечных групп*, когда матрицы заменяются единицами. Большинство задач физики решают на основе такого представления.

Вариант 1. Запишем уравнения электродинамики для полей на основе «выборки», составленной из элементов симметрической группы S_4. Получим, например, вариант модели вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial \begin{pmatrix} 0 \\ -E_y \\ E_z \\ B_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_y \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ -E_z \\ B_y \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_z \begin{pmatrix} -E_x \\ E_y \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Эти уравнения можно записать на паре нормальных подгрупп группы S_3:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\partial_x\begin{pmatrix}-E_y\\E_z\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\partial_y\begin{pmatrix}-E_z\\E_x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\partial_z\begin{pmatrix}-E_x\\E_y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{c}\partial_t\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}.$$

В другом виде получим

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}\partial_x\begin{pmatrix}E_y\\E_z\\E_x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}\partial_y\begin{pmatrix}E_z\\E_x\\E_y\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}\partial_z\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{(-1)}{c}\partial_t\begin{pmatrix}B_z\\B_y\\B_z\end{pmatrix}.$$

Теперь волновые функции представлены левыми идеалами от тензора

$$\begin{pmatrix}E_y&E_z&E_x\\E_z&E_x&E_y\\E_x&E_y&E_z\end{pmatrix}=E_x\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}+E_y\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+E_z\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Деформационный тензор, действующий справа, в форме

$$F_d=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}$$

не только «убирает» знак минус с волновых функций. Он позволяет рассматривать обобщенные уравнения электродинамики, которые переходят в известные при $\alpha\to 0$. Ситуация несколько меняется, если рассматривать произведения слева. Тогда получим матрицы, представляющие коммутативную группу:

$$x\to\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix},y\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&-1\end{pmatrix},z\to\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},xyz=-\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},ab=ba...$$

На их основе возможно обобщение правой части уравнений. Рассмотрим

$$\begin{pmatrix}B_z&\sigma B_y&\kappa B_x\\B_y&\sigma B_x&\kappa B_z\\B_x&\sigma B_z&\kappa B_y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}B_z&B_y&B_x\\B_y&B_x&B_z\\B_x&B_z&B_y\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\kappa\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Тогда при малых значениях величин σ,κ получаем вариант стандартной модели. Предлагаемое *расширение модели скрыто от анализа* при использовании её векторной или тензорной форм. Предложенная запись уравнений удобна для дифференциального продолжения. Состоит оно в том, что уравнения дифференцируются по той координате, по которой не было стандартного дифференцирования. Ситуация выглядит так:

$$\partial_z(-\partial_x E_y + \partial_y E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} - \alpha\partial_z E_z),$$
$$\partial_y(\partial_x E_z - \partial_z E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} - \alpha\partial_y E_y),$$
$$\partial_x(-\partial_y E_z + \partial_z E_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \alpha\partial_x E_x).$$

К аналогичному результату мы приходим, если матричные уравнения электродинамики, записанные на основе группы перестановок трех элементов, умножим слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x \end{pmatrix}.$$

Она есть элемент матричной алгебры, сконструированный на элементах в форме частных производных. Группа перестановок трех элементов играет на данном этапе удивительную роль: она «подсказывает», что фундаментальные свойства электродинамики базируются на системе, состоящей из трех объектов. Именно три объекта формируют «ячейку» трехмерного пространства. Именно три фундаментальных заряда есть у стабильной физической реальности: положительный и отрицательный электрический заряд и положительный массовый заряд. Именно группа перестановки трех элементов фундаментальна для моделирования электродинамики. Более того, такое моделирование «предлагает» глубинные варианты расширения стандартной модели: с применением дополнительных слагаемых в модели и на основе дифференциального продолжения. Заметим, что *аналогичные свойства имеют место в модели физической массодинамики*, сконструированной по аналогии с электродинамикой на основе симметричного тензора второго ранга.

Деформационная структура электродинамики базируется на элементах матричной алгебры. В силу этого обстоятельства необходимо знаковое расширение группы перестановок. Структура знаковой группы такова

$$\begin{pmatrix} + & + & - & - \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \\ + & - & + & - \end{pmatrix}.$$

Расширенная группа перестановок имеет элементы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Для элементов матричной алгебры, расположенных на главной диагонали, достаточно матриц

$$e=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Они составляют подгруппу расширенной группы перестановок и алгебраически задают необходимые элементы матричной алгебры:

$$a=\frac{1}{2}(e+\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},b=\frac{1}{2}(e+\beta)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},c=\frac{1}{2}(e+\gamma)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

а также деформационный тензор вида

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&\theta\end{pmatrix}=-a+b+\theta c.$$

Симметрическая группа S_3 может быть получена перестановками значимых элементов подгруппы:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Отметим специфические черты данного подхода:

а) анализ систематически проводится в рамках модели группы перестановок трех объектов, что позволяет, с физической точки зрения, трактовать электродинамику как модель учета перестановок базовых физических объектов, например, неких «кодонов», изготовленных из предзарядов,

б) для описания электродинамики можно использовать один кватернион или антикватернион,

в) уравнения электродинамики и гравитации могут быть «продолжены» посредством замены нулевых компонент стандартной теории ненулевыми значениями,

г) на основе этого подхода может быть модифицирована механика идеальной и вязкой жидкости, а также модели микроявлений,

д) в рамках нового подхода явно и конкретно учитываются деформационные степени свободы моделей, учитывающие как структуру модели, так и набор величин, посредством которых описываются явления.

Заметим, что «тензор деформаций модели» есть элемент матричной алгебры, поэтому мы имеем дело с алгебраической деформацией моделей. Деформация имеет самостоятельную динамику. У неё много форм. Классификация деформаций прямо или косвенно связана с когомологической структурой моделей. Это обстоятельство в модели сигрупп (систем групп) согласовано с динамикой процессов: *параметры деформации подчинены динамическим уравнениям*.

Если *когомологии подчинить динамике*, модель станет существенно более интересной. Она позволит точнее и глубже исследовать «активность» изделий, анализируемых в рамках данной модели. Достаточно очевидно, что когомологии ассоциированы с физической структурой исследуемых изделий. Понятно, что изменение структур должно быть подчинено изменениям когомологий. Нужны модели динамики когомологий.

Двойственность гомологий и когомологий согласуется с постулированной ранее *двойственностью структур и активностей физических изделий*. Гомологии и когомологии, равно как и параметры деформаций, указывают явные и скрытые свойства изделий и их активностей. Эти аспекты явлений важны для настоящей и будущей практики. **Гомологическая физика,** применяемая для описания равновесных и неравновесных состояний физических изделий и физических систем, приобретает права «сердца» фундаментальной физики.

Механика идеальной жидкости на группе перестановок.

Стандартные уравнения Ньютона-Эйлера имеют вид:

$$v^1\partial_1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\\v^0\end{pmatrix}+v^2\partial_2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^3\\v^1\\v^2\\v^0\end{pmatrix}+$$

$$+v^3\partial_3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^2\\v^3\\v^1\\v^0\end{pmatrix}+v^0\partial_0\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\\v^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f^1\\f^2\\f^3\\f^0\end{pmatrix}.$$

Они могут быть записаны в форме, аналогичной предыдущей записи уравнений электродинамики Максвелла, если представить волновые функции в виде простых левых идеалов от функции

$$\mathrm{H}=\begin{pmatrix}v^1&v^3&v^2\\v^2&v^1&v^3\\v^3&v^2&v^1\end{pmatrix}.$$

Получим модель

$$v^1\partial_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}+v^2\partial_2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^3\\v^1\\v^2\end{pmatrix}+v^3\partial_3\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^2\\v^3\\v^1\end{pmatrix}+v^0\partial_0\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f^1\\f^2\\f^3\end{pmatrix}.$$

Дополнительно требуется уравнение

$$v^i\partial_i v^0=f^0.$$

Его можно представить как элемент системы уравнений:

$$v^1\partial_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^0\\\psi\\\varphi\end{pmatrix}+v^2\partial_2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\v^0\\\psi\end{pmatrix}+v^3\partial_3\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi\\\varphi\\v^0\end{pmatrix}+v^0\partial_0\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^0\\\psi\\\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f^0\\\Phi\\\Pi\end{pmatrix},$$

сконструированной на левых идеалах волновой функции

$$\Lambda=\begin{pmatrix}v^0&\varphi&\psi\\\psi&v^0&\varphi\\\varphi&\psi&v^0\end{pmatrix}.$$

В механике, аналогично электродинамике, появляются возможности моделирования, скрытые при стандартном подходе. В данном случае механика представляется шестивектором в четырехмерном пространстве. Эта возможность меняет качество механики. В ней сейчас удобно рассматривать согласованное изменение «явных» и «скрытых» величин. Но тогда естественно ожидать расширения пространства дифференцирования: учет дополнительных переменных, по которым проводится дифференцирование.

Фактически мы рассматриваем представления группы перестановок для трех объектов в шестимерном векторном пространстве. Такой подход открывает новые возможности теоретической механики. С одной стороны, её уравнения могут быть продолжены на матрицы с размерностью, кратной шести, что позволяет моделировать механику многоуровневой материи. Это будет механика с внутренними переменными. В них каждому «блоку уравнений» соответствуют свои величины и свои свойства. С другой стороны, возможны, аналогично электродинамике, деформационные множители, посредством которых будет ослабляться или усиливаться роль и влияние уровней материи друг на друга. Наличие дополнительных величин, образующих тензор совместно с компонентой v^0, позволяет ввести в механику скрытые степени свободы. Они будут проявляться при расчете различных эффектов в макрофизике. Более того, поскольку теперь понятно, что *механика микромира аналогична механике макромира*, станет *возможным детальный анализ скрытых величин в микромире.* Кроме этого, есть возможность введения новых элементов, посредством которых согласуются «явные» и «скрытые» элементы механики.

Модель механики многоуровневой идеальной материи состоит из согласованных «блоков»:

$$\begin{pmatrix} 1 & a(1) & \tilde{b}(1) \\ a(2) & 2 & b(2) \\ \tilde{a}(3) & b(3) & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v\partial(1) & \alpha(1) & \beta(1) \\ \tilde{\alpha}(2) & v\partial(2) & \beta(2) \\ \alpha(3) & \tilde{\beta}(3) & v\partial(1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi(1) \\ \tilde{\Phi}(2) \\ \Phi(3) \end{pmatrix}+\ldots=\begin{pmatrix} \tilde{\pi}(1) \\ \pi(2) \\ \pi(3) \end{pmatrix}.$$

Величины с волной сверху характеризуют деформационные элементы модели. Эти обобщения пригодны для разных моделей.

Заметим, что модель вязкой жидкости получается аналогично добавлением «блоков», в которых компоненты скоростей заменены на частные производные с множителями, характеризующими «вязкость» и другие свойства жидкости, не учитываемые конвективными слагаемыми. «Блоки» имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & a(1) & \tilde{b}(1) \\ a(2) & 2 & b(2) \\ \tilde{a}(3) & b(3) & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma\partial(1)\partial(1) & \alpha(1) & \beta(1) \\ \tilde{\alpha}(2) & \sigma\partial(2)\partial(2) & \beta(2) \\ \alpha(3) & \tilde{\beta}(3) & \sigma\partial(3)\partial(1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi(1) \\ \tilde{\Phi}(2) \\ \Phi(3) \end{pmatrix}+\ldots=\begin{pmatrix} \tilde{\pi}(1) \\ \pi(2) \\ \pi(3) \end{pmatrix}.$$

Числами 1,2,3 обозначены элементы стандартных одноуровневых моделей механики. Согласования уровней материи могут задаваться другими матрицами, не тождественными тем, которые входят в «блоки» с конвективными слагаемыми. Теоретическое обоснование этот алгоритм пока не имеет. Понятно, что он ассоциирован с общими свойствами симметрий и алгебраических структур, на основе которых конструируются модели. Гомологическая алгебра и её разнообразные обобщения могут быть пригодны для решения этих проблем. В «смесях» типа

$$v(p)\partial(p),\sigma\partial(p)\partial(p)\rightarrow g_{ij}\Omega^{jk}v^i(p)\partial_k(p),c\Lambda^{rs}\partial_r(p)\partial_s(p)$$

присутствуют составляющие $g_{ij}\Omega^{jk},\Lambda^{rs}$, посредством которых учитываются как координатные эффекты, так и физические составляющие. «Блоки» в виде чисел и буквенных выражений могут быть самыми разными. Они содержат информацию, инвариантную с физической точки зрения. Информация верифицируется совокупностью измерительных устройств и имеет условную достоверность: другие приборы в аналогичной ситуации могут дать новую систему данных.

Многообразию математических моделей соответствует многообразие эмпирических данных. Эта *двойственность физического и математического образа реальности* конструктивна для практики.

Следует учесть также возможность использования в физических моделях *операционных матритов*: конструкций, в которых с одной матрицей ассоциирована система операций. В зависимости от того, как и в какой ситуации проявляется вся система операций или её часть, будет зависеть результат расчета и представление эмпирических данных. Воплощение *моделей многоуровневой материи* не только расширяет и углубляет представление о реальности, оно обеспечивает новые связи с Вселенной, что позволяет достичь *новой гармонии* с ней.

Физические аспекты теории деформаций для алгебр

Предыдущие исследования достаточны для понимания факта, что *физические модели представляют собой полилинейные функции на алгебрах*. По этой причине математический аппарат деформации алгебр может быть применён в качестве инструмента для анализа вариантов деформации физических моделей. Рассмотрим такие возможности. Они ассоциированы с основным физическим объектом: совокупностью базовых объектов. Таковы атомы, составленные из нуклонов и электронов. Таковы элементарные частицы, сконструированные из кварков. Таковы частицы света, изготовленные из предзарядов. Другими словами, *во многих случаях физики имеют дело с конечной системой базовых объектов*. Если им сопоставлена конечная совокупность математических объектов, мы получаем возможность моделирования физической системы. Наиболее естественно сопоставить объектам элементы алгебры, так как они «ближе всего» по форме, а также и по сути к физическим объектам. Понятно, что в реальной ситуации объекты влияют друг на друга. Эти влияния в их простейшей форме могут быть заданы функциями, ассоциированными с базовыми объектами. Изоморфизм физики и математики триедино проявляет себя: по используемым объектам, по функциям от них, по операциям, которые им следует сопоставить. Эти соотношения можно представить таблицей:

метод	*величины*	*свойства*	*взаимодействия*
физика	a_i	$f\left(a_i, a_i a_j \ldots\right)$	*механика*
математика	g_i	$f\left(g_i, g_i g_j \ldots\right)$	$+,-,\times,\otimes\ldots$

Рассмотрим с формальной точки зрения *условия «равновесия» взаимных влияний* в конечной системе объектов, функций и операций. Для двух объектов g_1, g_2 и функций взаимного влияния $f\left(g_1\right), f\left(g_2\right)$ постулируем первичные (базовые) законы равновесия:

$$f\left(g_1\right) = -f\left(g_2\right) = \alpha,$$

$$f(g_1g_2) = -f(g_2g_1) = \beta,$$
$$g_1 f(g_2) = -g_2 f(g_1) = \gamma.$$

Постулируем алгебраический закон равновесия в системе взаимных влияний:

$$\alpha + \beta = \gamma.$$

С позиции математиков, анализирующих алгебры, получаем стандартное условие для 1-коцикла:

$$g_1 f(g_2) - f(g_1g_2) + f(g_1) = 0.$$

Следовательно, есть возможность формального согласования модели равновесия взаимных влияний в конечных физических системах с условиями общей формальной однопараметрической деформации алгебраических объектов. *Двойственность физического и математического подхода к «деформации»* естественна и полезна. Она позволяет развивать не только теорию, но и практику деформаций.

Удобно использовать совокупность функций с циклическим изменением аргументов.

$$f(g_1) + f(g_2) = 0,$$
$$f(g_1g_2) + f(g_2g_1) = 0,$$
$$g_1 f(g_2) + g_2 f(g_1) = 0.$$

Проиллюстрируем этот алгоритм на примере конечной системы, состоящей из трех объектов. Рассмотрим для них систему уравнений равновесия взаимных влияний:

$$g_1 f(g_2, g_3) + g_2 f(g_3, g_1) + g_3 f(g_1, g_2) = 0,$$
$$f(g_1g_2, g_3) + f(g_2g_3, g_1) + f(g_3g_1, g_2) = 0,$$
$$f(g_1, g_2g_3) + f(g_2, g_3g_1) + f(g_3, g_1g_2) = 0,$$
$$f(g_1, g_2)g_3 + f(g_2, g_3)g_1 + f(g_3, g_1)g_2 = 0.$$

Альтернированное сложение элементов первого столбца (оно обусловлено указанными выше условиями равновесия факторов взаимных влияний) дает стандартное условие для 2-коциклов в теории когомологий Хохшильда для ассоциативных алгебр:

$$g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2g_3) - f(g_1, g_2)g_3 = 0.$$

При дополнении уравнений равновесия взаимных влияний дополнительными условиями, получим обобщения функциональных уравнений. В частности, функции взаимных влияний могут отличаться друг от друга. Более того, они могут быть подчинены системе динамических уравнений. Поскольку анализируемые функции естественно «встраиваются» в уравнения физической теории, мы получаем в практическое пользование алгоритм когомологического обобщения физических моделей. Изначально понятно, что свойства алгебр имеют самостоятельное значение и не все они будут использованы в моделях и на практике. Однако чем шире и глубже они будут исследованы, тем больше найдется их приложений. То обстоятельство, что когомологии ассоциированы с деформациями алгебр и могут быть использованы в моделях с «малыми» параметрами, не отрицает важности их анализа и применения. Ведь тонкости акустического взаимодействия людей в форме речи не учитываются в моделях механического поведения людей, хотя они во многом определяют динамику людей в форме выполнения команд. Еще меньшую роль играет в механике поведения людей учет мыслей, интенций и чувств, так как эти факторы имеют «малую массу». Но ведь именно они определяют реальную динамику. Поэтому «слабость» когомологических факторов может быть очень условна. Если эти факторы используются в модели в форме делителей, их роль становится определяющей. Аналогичное замечание справедливо для когомологий. То обстоятельство, что когомологические функции «взаимных влияний» подчинены системе сложных условий, требует от исследователя не только высокой квалификации, но и умения корректно учесть основные тонкости проблем и ситуаций. На смену стандартным моделям классической и квантовой физики приходят модели гомологической физики. Поскольку известные модели базируются на полилинейных алгебрах, речь идет о потребности анализа таких алгебр и их приложений.

Алгоритмы введения когомологий в физические модели

Начальный вариант применения когомологий в физических моделях следует из анализа теории деформаций ассоциативной алгебры с элементами a,b,c пространства V. В этом случае ассоциативное однопараметрическое семейство деформаций принято подчинять правилам:

$$f_t(a,b) = ab + tF_1(a,b) + t^2F_2(a,b) + ...,$$

$$f_t(f_t(a,b),c) = f_t(a, f_t(b,c)).$$

Из него следует общее условие на когомологические функции вида

$$\sum_{\lambda+\mu=\nu,\lambda,\mu\geq 0} F_\lambda(F_\mu(a,b),c) - F_\lambda(a,F_\mu(b,c)) = 0.$$

Из него следует система соотношений. Например,

$$\nu = 0 \to a(bc) = (ab)c.$$

При $\nu = 1$ получим

$$aF_1(b,c) - F_1(ab,c) + F_1(a,bc) - F_1(b,a)c = 0.$$

При выполнении данного условия принято говорить об интегрируемости F_1. В общем случае

$$\sum_{\lambda+\mu=\nu,\lambda,\mu\geq 0} F_\lambda(F_\mu(a,b),c) - F_\lambda(a,F_\mu(b,c)) = \delta F_\nu(a,b,c).$$

Функция от трёх переменных является «ассоциатором» F_1. Ненулевой когомологический класс этого элемента является препятствием к интегрируемости. Линейная часть «ассоциатора» лежит в $Z^2(A,A)$ и «порождает» 3-коцепь вида

$$[F,G](a,b,c)=F(G(a,b),c)-F(a,G(b,c))+G(F(a,b),c)-G(a,F(b,c)).$$

Таков частный случай препятствия для интегрируемости 2-коцикла. Если $H^3(A,A)=0,$ то все препятствия обращаются в ноль, и тогда каждый коцикл $F_1 \to Z^2(A,A)$ интегрируем. Известно, что для любой конечномерной сепарабельной полупростой алгебры A и двухстороннего модуля P (например, всей алгебры) нет препятствий для интегрируемости, так как $H^n(A,P)=0, n \succ 0.$

Получим тот же результат простым расчетом. Пусть

$$f_t(a,b)=ab+tF_1(a,b)+t^2F_2(a,b),$$

$$f_t(f_t(a,b),c)=f_t(a,f_t(b,c)).$$

Тогда в первом приближении получим

$$f_t(f_t(a,b),c)\cong(ab)c+tF_1(a,b)c+tF_1(ab,c),$$
$$f_t(a,f_t(b,c))\cong a(bc)+taF_1(b,c)+tF_1(a,bc).$$

Отсюда следует, что

$$aF_1(b,c)-F_1(ab,c)+F_1(a,bc)-F_1(b,a)c=0.$$

Для функций

$$F_{11}(\xi,\varsigma)=f(\alpha,\beta)(\xi\cdot\varsigma),$$
$$F_{1a}(\xi,\varsigma)=\sum_{i=1}^{a} f_i(\alpha,\beta)(\xi\cdot\varsigma)...$$

это условие выполняется тождественно. Оно соответствует обобщению физической модели на основе дополнения входящих в нее произведений матриц новыми слагаемыми. В частности, есть вариант расширения, базирующийся на одной функции:

$$ab \Rightarrow ab+tf(\xi,\varsigma)(a,b)$$

Она может зависеть от новых физических переменных и дополнительных условий. В частности, на основе системы функций и параметров задачи может быть учтена «тонкая структура» и динамика физических объектов и явлений.

Учет когомологий в физической модели соответствует следующему алгоритму:

а) представим физическую модель в форме, содержащей произведения элементов алгебры,

б) заменим произведения указанными функциями деформации алгебры, в) учтем возможность изменения операторов и операций в модели,

в) примем дополнительные условия, согласующиеся с физикой явления, при проведении расчетов и при сравнении их с экспериментами.

Алгоритм позволяет превратить модель, имеющую форму «цилиндра», в модель живого, активного объекта, имеющего тонкую структуру и сложнейшую динамику. Матрицы, используемые в модели, выполняют разные функции. Есть матрицы, которые можно назвать *носителями тела* модели. Они образуют ее алгебраический фундамент. Есть матрицы, посредством которых задаются функции, прямо или косвенно представляющие экспериментальные данные. Они являются *носителями информации* модели. Есть *операторные носители* модели: матрицы, которые согласованно с операторами объединяют систему носителей. Есть проекторы и деформационные матрицы, выступающие в роли *носителей деформаций*. У каждой системы носителей есть свои механизмы активности и деформации. Более того, они зависят от применяемой для анализа системы операций. Каждый из указанных элементов владеет алгоритмами активности и деформаций.

Легко видеть, что на множестве с произвольной операцией выполняется условие

$$\{a,\{b,c\}\}=\{\{c,b\},a\},\{b,c\}=bc+cb.$$

Рассмотрим деформацию вида

$$f_t(b,c)=\{b,c\}+t\varphi(b,c)+\ldots$$

с условием

$$f_t(a, f_t(b,c))=f_t(f_t(c,b),a).$$

Тогда

$$\begin{aligned}f_t(a, f_t(b,c))&=\{a,\{b,c\}\}+t\{a,\varphi_1(b,c)\}+t\varphi_1(a,\{b,c\})+\ldots\\ f_t(f_t(c,b),a)&=\{\{c,b\},a\}+t\{\varphi_1(c,b),a\}+t\varphi_1(\{c,b\},a)+\ldots\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\{a,\varphi_1(b,c)\}+\varphi_1(a,\{b,c\})=\{\varphi_1(c,b),a\}+\varphi_1(\{c,b\},a).$$

В другой форме получим новое условие для когомологий:

$$\{a,\varphi_1(b,c)\}-\varphi_1(\{c,b\},a)+\varphi_1(a,\{b,c\})-\{\varphi_1(c,b),a\}=0.$$

Это условие настолько изящно, что его желательно проанализировать даже в том случае, если оно неверно.

Замечание. Отсюда не следует алгоритм расширения физических моделей. В частности, непонятно, как таким образом выполнить расширение модели электромагнитных явлений.

Проиллюстрируем этот тезис на основе рассмотрения произведения преобразования группы Лорентца и модифицированной группы Лорентца. Так, имеем

$$\tilde{g}_1=\gamma_1 A_1, \tilde{g}_2=\tilde{\gamma}_2\tilde{A}_2=\left(\gamma_2+\tau\frac{1}{2}\frac{u_2^2}{c^2}\right)\left(A_2+\tau B\right)=\gamma_2 A_2+\tau\left(\gamma_2 B+\frac{1}{2}\frac{u_2^2}{c^2}A_2\right)+\tau^2\frac{1}{2}\frac{u_2^2}{c^2}B,$$

$$\tilde{g}_1\tilde{g}_2=g_1g_2+\tau\gamma_1 A_1\left(\gamma_2 B+\frac{1}{2}\frac{u_2^2}{c^2}A_2\right)+\tau^2\gamma_1 A_1\frac{1}{2}\frac{u_2^2}{c^2}B=g_1g_2+\tau F_1\left(g_1,g_2\right)+\tau^2 F_2\left(g_1,g_2\right)+\ldots$$

Анализ электродинамики сверхсветовых скоростей показал возможность нетривиального введения параметра деформаций τ в материальные уравнения. При этом меняется также выражение для скоростей, которые зависят от скорости первичного источника излучения и от скорости среды. Более того, параметр может быть подчинен динамическим уравнениям. В частности, он связан с показателем преломления. Дополнительное изменение уравнений электродинамики может быть реализовано так:

а) заменить матрицы, которые входят в уравнения физики, на их произведения,

б) заменить произведения на их расширения, ассоциированные с когомологиями,

в) задать динамические уравнения для новых слагаемых,

г) найти место этим и другим слагаемым в исходной системе уравнений.

Согласование фундаментальной физики с гомологической алгеброй

Релятивистская физика согласуется с классической физикой на основе сигруппы Галилея-Лорентца. Её удобно представить в виде суммы трех элементов:

$$\gamma\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что *сигруппа есть элемент алгебры* с базисом вида

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \gamma_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\gamma_1\to\sigma_1=1,\quad \gamma_2\to\sigma_2=-1.$$

Алгебра подчинена соотношениям

$$\gamma_i\gamma_j+\gamma_j\gamma_i=(\sigma_i\sigma_j+\frac{\left(\sigma_i+\sigma_j\right)^2}{4})e=\left(\sigma_i\left(\sigma_i+3\sigma_j\right)+\left(3\sigma_i+\sigma_j\right)\sigma_j\right)e=Ke.$$

Действительно, получим

$$\gamma_1\gamma_1=\gamma_2\gamma_2=e,$$

$$\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_2\gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеет место закон

$$\gamma_1\gamma_1 + \gamma_2\gamma_2 + 2(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1) = 0.$$

Элементы, указанные выше, есть эквивалентные представления группы перестановок. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому произведение элементов сигруппы есть произведение деформированных элементов алгебры перестановок, относящиеся к эквивалентным представлениям группы перестановок. Следовательно, к анализу симметрии процессов можно применять общую теорию деформаций ассоциативной алгебры. В этой задаче можно использовать базис алгебры

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = st, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -st^2$$

с аналогичными свойствами. По форме он «ближе» к стандартным базисам, используемым в теории групп перестановок. Деформации симметрий описываются когомологиями Хохшильда, которые, как известно, подчинены алгебре Герштенхабера.

Физические модели принято задавать в четырехмерном пространстве. В этом случае в роли сигруппы может быть использована конструкция

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \hat{+} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

свойства которой аналогичны свойствам, указанным выше для двумерных матриц. Покажем, что аналогичный прием и приложения пригоден для физических моделей. Рассмотрим, в частности, *электродинамику движущихся сред без ограничения скорости*. В ней деформированы только связи между полями и индукциями. Их легко представить в матричной форме на основе группы перестановок. Действительно, рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} B_x + w\left(E_y u_z - E_z u_y\right) &= \mu H_x + \mu\left(D_y u_z - D_z u_y\right), \\ B_y + w\left(E_z u_x - E_x u_z\right) &= \mu H_y + \mu\left(D_z u_x - D_x u_z\right), \\ B_z + w\left(E_x u_y - E_y u_x\right) &= \mu H_z + \mu\left(D_x u_y - D_y u_x\right). \end{aligned}$$

Запишем левую часть уравнений в матричном виде.

Получим

$$w\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}u_x\begin{pmatrix}0\\-E_y\\E_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}u_y\begin{pmatrix}0\\-E_z\\E_x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}u_z\begin{pmatrix}0\\-E_x\\E_y\end{pmatrix}\right\}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}=\ldots$$

$$\varepsilon\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}u_x\begin{pmatrix}0\\B_y\\-B_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}u_y\begin{pmatrix}0\\B_z\\-B_x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}u_z\begin{pmatrix}0\\B_x\\-B_y\end{pmatrix}\right\}+\varepsilon\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix}=\ldots$$

Эти уравнения удобно записать на основе матриц размерности 6×6, располагая значимые матрицы по диагонали (по аналогии со структурой прямой суммы матриц). Тогда коэффициенты перед матрицами получаются на основе произведения на диагональную матрицу с разными величинами в первой и во второй тройке диагональных элементов. Следовательно, *материальные уравнения имеют скрытую алгебраическую структуру*, так как получить такую матрицу можно только алгебраически на основе элементов матричной алгебры. Эта структура была бы «видна» изначально, если бы могли ранее записать уравнения в такой форме (даже без введения в электродинамику показателя отношения). Естественно обобщить эти уравнения. Для этого можно использовать функции

$$\begin{pmatrix}\sigma E_x&\sigma E_y&\sigma E_z\\-E_y&-E_z&-E_x\\E_z&E_x&E_y\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\sigma&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-\sigma B_x&-\sigma B_y&-\sigma B_z\\B_y&B_z&B_x\\-B_z&-B_x&-B_y\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}-\sigma&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}.$$

Получим деформационные матрицы вида

$$\begin{pmatrix}\sigma&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\sigma a+(-1)b+c,$$

которые представляют собой элементы матричной алгебры, сконструированной *на основе коммутативной группы*:

$$e=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$a=\frac{1}{2}(e+\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},b=\frac{1}{2}(e+\beta)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},c=\frac{1}{2}(e+\gamma)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, связи между полями и индукциями записаны в форме произведения элементов ассоциативной алгебры. В наглядной форме алгебраическая структура деформаций в электродинамике проявляется при записи уравнений на основе матриц размерности 6×6. Так, например, связи между полями и индукциями можно представить в форме слагаемых вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix} u_x \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}.$$

В данном случае реализовано обобщение стандартных теорий на основе *замены исходных матриц их деформационным алгебраическим расширением.* Оно сконструировано из единичной матрицы и элементов, полученных из нее на основе знаковой группы. Деформационная матрица есть элемент матричной алгебры в шестимерном пространстве.

Аналогичные изменения возможны в механике, теории гравитации, в калибровочных теориях. *Фундаментальные физические модели явно согласованы с формализмами гомологической алгебры.* Когомологические модели алгебр могут непосредственно использоваться *в любых физических моделях, описывающих процессы*, так как процессы, с симметрийной точки зрения, описываются сигруппами. С другой стороны, если исследовать явления только на основе решения уравнений, то аналогичные изменения в форме произведения элементов алгебр будут иметь место в физических моделях.

В силу указанных обстоятельств гомологическую алгебру можно рассматривать как математический «двигатель» физических моделей. Его роль и значение усилятся при согласовании с физикой, которая поставляет экспериментальные данные для конкретных ситуаций. Поскольку возможно построение новых моделей, алгебраическая структура которых базируется на комбинаторном произведении, возможно построение динамических моделей Сознаний и Чувств, а также алгоритмов деформации этих моделей. Применение других операций позволит учесть дополнительные свойства физических объектов. Для согласования свойств Тел, Сознаний, Чувств, следуя концепции трансфинитности, понадобятся трансфинитные модели реальности. Постулат софистатности тел физических объектов с телами Сознаний и Чувств может выполнить функцию интеллектуального инструмента моделирования. Речь идет не только о структурах этих тел, но и об их активностях.

Согласованность функций на многообразии

Покажем, что когомологические условия можно трактовать как условия для класса функций. Рассмотрим уравнение для 1-коцикла

$$f(g_1g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1).$$

На матричной операции это уравнение выполняется тождественно на функциях вида

$$f(g) = \varphi(\xi)(ga - a).$$

Ситуация меняется при использовании других функций и других операций. Например, рассмотрим функции на комбинаторном произведении:

$$f(g_1g_2) = 2\left(g_1 \overset{k}{\times} g_2\right)\overset{k}{\times} a,\ f(g_2) = g_2 \overset{k}{\times} a,\ f(g_1)g_2 = (g_1 \overset{k}{\times} a)\overset{k}{\times} g_2.$$

Пусть

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для них

$$f(g_1g_2) = f(g_1)g_2 - f(g_2).$$

Следовательно, условия указанного вида обеспечивают возможность сравнения функциональных взаимоотношений различных матриц (с физической точки зрения им соответствуют разные физические объекты) при задании управляющего объекта и действующей системы операций. Законы зависят от выбора каждого из указанных объектов. Однако на этом множестве выполняются также универсальные законы, не зависящие от выбора элементов и системы операций. Другими словами, общие гомологические закономерности могут быть дополнены частными условиями. Эти условия могут быть формальными, но интересными с математической точки зрения. Они могут иметь физическое обоснование и соответствие с системой экспериментальных данных.

Естественно рассмотреть другие функциональные условия. У них есть много граней и возможностей. Исследуем с этой стороны сигруппу Галилея-Лорентца. Так как

$$\gamma\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} - \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -b^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\gamma_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

на матричном произведении получим закон:

$$(\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_0)=(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_0)(\gamma_1+\gamma_2).$$

Возможности когомологического расширения групп

Покажем, что неоднородные функциональные уравнения для когомологий можно применять в качестве алгоритма для расширения групп симметрии. В качестве иллюстрации применим его для получения сигруппы Галилея-Лорентца. Рассмотрим уравнение

$$g_1 f(g_2)-f(g_1g_2)+f(g_1)=g_2$$

при условии $f(g)=g+\Lambda.$ Тогда

$$g_1(g_2+\Lambda)-(g_1g_2+\Lambda)+g_1+\Lambda=g_1(1+\Lambda)=g_2,$$

порождая как мультипликативный, так и аддитивный вариант расширения группы:

$$g_2\Rightarrow g_1\kappa, g_2\Rightarrow g_1+\sigma .$$

Пусть, например, группа g_1 есть униполярная группа. Тогда получим соотношения вида

$$g_1+\sigma=g_1(1+\Lambda), g_1=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\sigma=\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix},\Lambda=b\begin{pmatrix}-a & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$g_1\Lambda=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}b\begin{pmatrix}-a & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}=\sigma.$$

Сигруппа (система групп) Галилея-Лорентца следует из треугольной группы и частного решения когомологического уравнения. Рассмотрим другую возможность, которая следует из неоднородного когомологического уравнения

$$aF_1(b,c)-F_1(ab,c)+F_1(a,bc)-F_1(b,a)c=b.$$

Получим выражение для группы b на основе частного решения данного уравнения, элементов a,c и дополнительной величины Ω. Пусть $F(\xi,\varsigma)=(\xi\varsigma)+\Omega.$ Тогда

$$b=a\Omega-\Omega c,$$

$$b+\Omega c=\frac{1}{2}\left([a\Omega]+\{a\Omega\}\right).$$

Укажем значения функций на предыдущем примере

$$a=\gamma\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix},\Omega=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},c=\gamma\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\beta & 0\end{pmatrix},$$

$$b=a\Omega-\Omega c=\gamma\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ \beta & 1\end{pmatrix}.$$

На этих примерах показано, что алгоритм функционального расширения групп пригоден для вывода сигруппы с параметрами, подчиненными динамическим уравнениям.

Система метрик, ассоциированная с матрицами Дирака

Мы исследовали ранее вариант тензорного произведения элементов алгебры Клиффорда

$$e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\gamma_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\gamma_{12}=\gamma_1\gamma_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Они порождают матрицы Дирака, которые подчинены антикоммутационным соотношениям

$$\{\gamma_a,\gamma_b\}=\gamma_a\gamma_b+\gamma_b\gamma_a=2\eta_{ab}1.$$

Матрицы Дирака образуют группу, состоящую из 32 элементов:

$$\pm 1,\quad \pm\gamma_i, i=0,1,2,3,\quad \pm\gamma_i\gamma_j\to i\neq j,$$

$$\pm\gamma_i\gamma_j\gamma_k\to i\neq j\neq k,\quad \pm\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l\to i\neq j\neq k\neq l\,.$$

Группа состоит из 6 антисимметричных матриц, обозначаемых буквами a_i,b_j, квадраты которых равны единичной матрице с минусом, а также из 10 симметричных матриц, обозначенных буквами e,c_k,e_l,f_m, квадраты которых равны единичной матрице. При выборе базовых матриц по Дираку две матрицы антисимметричны и две симметричны. Поэтому метрика имеет вид (с точностью до порядка в расположении базовых элементов)

$$\eta_{ab}=dial\left(-1,-1,1,1\right).$$

Анализ показал, что возможен иной выбор базовых матриц, которые порождают всю группу:

$$\eta_{ab}=dial\left(-1,1,1,1\right).$$

В этом случае одна матрица выбирается антисимметричная, а три матрицы будут симметричными. Возможен и обратный вариант. В силу указанных обстоятельств группе соответствует система метрик. Указанные метрики можно умножить на минус единицу. Кроме этого, допустимо по-разному переставлять знаки в выражении для метрики. Если алгебра конструируется над полем комплексных чисел, возможной становится евклидова метрика. Отметим, что уравнения физической теории могут содержать метрики, независимые от метрик, ассоциированных с алгебрами. Поскольку *конструкция алгебры порождает на основе группы систему метрик*, это обстоятельство открывает новые возможности для физического моделирования и для интерпретации экспериментальных данных. В частности, четырехмерное расстояние между одними и теми же точками будет разным в зависимости от того, с каким базисом алгебры ассоциирована четырехметрика. В таком случае *отсутствует единственность экспериментального результата*, если он не согласован с измерением структуры базиса алгебры, управляющей явлением.

Аналог алгебры Клиффорда для циклической группы

Рассмотрим таблицу произведений

$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix}$
$\begin{matrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{matrix}$
$\begin{matrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{matrix}$
$\begin{matrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{matrix}$

.

Эти элементы задают группу, подчиненную закону $\xi^6 = e,$ где $\xi -$ любой элемент группы, $e-$ единичная матрица. Множество элементов формирует подгруппы:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \gamma_{11} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}, \gamma_{12} = \begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \gamma_{01} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \gamma_{02} = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \gamma_{21} = \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}, \gamma_{22} = \begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \gamma_{31} = \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}, \gamma_{32} = \begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Введем операции проектирования элементов строк на элементы первой строки:

$$\bar{\gamma}_{ia} = \pi \gamma_{ia}.$$

Это можно реализовать на основе умножения рассматриваемых элементов на элементы с ненулевой диагональю. Тогда на множестве выполняются соотношения, аналогичные условиям в алгебре Клиффорда, когда сумма произведений элементов каждой строки в прямом и обратном порядке дает две единичных матрицы, а аналогичное произведение элементов разных строк дает ноль. Закон имеет вид

$$\bar{\gamma}_{ia}\bar{\gamma}_{ib}+(-1)^{1-\delta_{ij}}\,\bar{\gamma}_{ib}\bar{\gamma}_{ia}=(1-\delta_{ab})2e.$$

Оставшиеся элементы образуют новую группу диагональных элементов:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\gamma_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\gamma_3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Они подчинены также аналогу алгебры Клиффорда

$$\gamma_i\gamma_j+(-1)^{1-\delta_{ij}}\,\gamma_j\gamma_i=(1-\delta_{ij})2e.$$

Одна группа порождает два семейства алгебр, аналогичных алгебрам Клиффорда. Группу из четырех элементов можно объединить с предыдущими группами, спроектировав их на единичный элемент и придав элементам дополнительный индекс: $\gamma_a\to\bar{\gamma}_{4a}$.

Применим к элементам симметрической группы комбинаторную операцию $\overset{k}{\times}$. Для удобства записи результатов анализа введем обозначения

$$1\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\alpha\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\beta\to\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Тогда взаимные произведения элементов сгруппируются как по матричному, так и по комбинаторному произведению. Имеют место соотношения:

$$1\times1=1,\alpha\times\beta=\beta\times\alpha=1\Rightarrow 1\overset{k}{\times}1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\alpha\overset{k}{\times}\beta=\beta\overset{k}{\times}\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$1\times\alpha=\alpha=\alpha\times1,\beta\times\beta=\alpha\Rightarrow 1\overset{k}{\times}\alpha=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\alpha\overset{k}{\times}1,\beta\overset{k}{\times}\beta=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$1\times\beta=\beta=\beta\times1,\alpha\times\alpha=\beta\Rightarrow 1\overset{k}{\times}\beta=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\beta\overset{k}{\times}1,\alpha\overset{k}{\times}\alpha=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матричное произведение матриц, полученных при комбинаторном произведении на исходную матрицу своего ряда. Получим матрицы, которые дополняют рассматриваемую исходную группу до симметрической группы S_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так как

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае косвенно подтверждается известный факт, что комбинаторное произведение ассоциировано с вращениями, потому что новые матрицы соответствуют учету зеркальной симметрии правильного треугольника относительно его вершин.

Единство полевых моделей фотонов и электронов

Попытка единого описания фотонов и электронов должна иметь математическую реализацию. Проанализируем эту возможность. Теория электрона сконструирована на матрицах Дирака

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Они следуют из кватернионных матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

после умножения на элементы знаковой группы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем в обобщенной форме уравнения Фарадея-Ампера

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\partial_z\right\}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ \sigma\varphi \end{pmatrix} +$$

$$+\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_x \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \\ \chi\psi_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \\ \chi\psi_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\partial_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \\ \chi\psi_z \end{pmatrix}\right\} -$$

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{c}\partial_t \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ a_t \end{pmatrix}.$$

Возможна структурная модификация этих уравнений: замена одних структурных матриц на другие, например, при преобразовании вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исходные уравнения $g^{sr}a_s\partial_r\Phi = 0$ можно преобразовать в новую систему (в том числе в уравнения типа Дирака), приняв предположение, что есть единая система уравнений

$$\chi^{sr}_{kl}\left(\alpha^k a_s p^l + \left(1-\alpha^k\right)a_s b^l\right)\partial_r\tilde{\Phi} = \tilde{\Pi}.$$

Здесь a_s – структурные матрицы класса физических моделей, p^l, b^l – матрицы деформации моделей. Нормирующие величины

$$\chi^{sr}_{kl}, \alpha^k \to [0-1]$$

регулируют соотношение различных элементов модели. Они могут подчиняться динамическим условиям, которые должны быть согласованы с оператором преобразования «волновых функций». Ведь, например, в случае электромагнетизма элементы волновой функции соответствуют изменяемым значениям величин, а в случае уравнения Дирака мы используем компоненты, которые с экспериментом связаны косвенно. Указанные аспекты отчетливо проявляют себя при сравнении уравнений электродинамики и уравнений Дирака в спинорной форме. Действительно, модель

$$a^k \partial_k \Phi = 0$$

при условиях

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

задает уравнения Фарадея-Ампера, если $\partial_0 = -i\frac{1}{c}\partial_t$ и мы рассматриваем лишь действительные слагаемые (без членов с комплексными единицами). Деформация указанных матриц до матриц Дирака и замена волновой функции дает аналог безмассового уравнения Дирака.

Заметим, что структурная деформация класса уравнений имеет аналогию в выражениях, используемых для связи полей и индукций в электродинамике. С одной стороны, в качестве нормирующего множителя используется показатель отношения w. С другой стороны, в модели применяется выражение для связи скоростей вида

$$\vec{u} = (1-w)\vec{u}_{fs} + w\vec{u}_m.$$

Здесь $\vec{u}_{fs}$ – скорость первичного источника излучения, $\vec{u}_m$ – скорость физической среды, в которой распространяется излучение. Другими словами, в материальных уравнениях электродинамики применялся алгоритм деформации ковекторов физической модели. Понятно, что аналогично можно использовать деформацию дифференциальных операторов. В частности, так можно рассматривать переход от частных производных к ковариантным производным, дополняя частные производные компонентами связностей и системой проекторов. Отметим особую роль «деталей» в решаемых задачах. Так, если бы изначально в теории электромагнитных явлений применялась четырехметрика, которая учитывала показатель преломления и показатель отношения

$$ds^2 = d\vec{r}^{\,2} - w\frac{n^2}{c^2}dt^2,$$

то и физики, и математики быстрее бы поняли ситуацию и корректно использовали бы её. Важно стремиться не только к интересным и привлекательным фактам и приемам, но, прежде всего, к корректному учету реальных физических факторов и обстоятельств.

Заметим, что формализм калибровочных полей, базирующийся на подходе Лагранжа в теории полей, не учитывает структуру и свойства скоростей и ускорений, присутствующих в полевых моделях. Ситуация меняется *при рассмотрении физических моделей как элементов функциональной алгебры.* В этом случае дифференциальные операторы могут быть заменены на кодифференциальные (скорости, ускорения). К ним можно применить разнообразные алгоритмы деформаций. Начальная модель может иметь форму, аналогичную молекуле ДНК. Другие модели становятся их деформационным образом. В моделях сознаний и чувств, как нам уже известно, могут быть применены все те элементы, которые применяются в моделях физических тел и полей. Только в этом случае могут быть другие величины и операторы, а также новые способы согласования элементов модели между собой.

Электродинамика на комбинаторной операции

Уравнения $a^k\partial_k\Phi = 0$ сконструированы на матрицах и волновой функции вида

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

при использовании матричной операции. Она стандартно применяется в физике. Как записать эти же уравнения на комбинаторной операции? Получим

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \partial_x \begin{pmatrix} 0 & \psi_z & \psi_y & \psi_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \partial_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_z & 0 & \psi_x & \psi_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \partial_z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_y & \psi_x & 0 & \psi_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \partial_\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Модель в данном случае основана на левых идеалах, комбинаторной операции и на проекциях волновой функции

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \psi_z & \psi_y & \psi_x \\ \psi_z & 0 & \psi_x & \psi_y \\ \psi_y & \psi_x & 0 & \psi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z & 0 \end{pmatrix},$$

Их легко выразить на основе элементов группы Клейна. Так, получим

$$\Phi=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot 0+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\psi_z+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\psi_y+\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\psi_x.$$

Поскольку в данном случае транспонированная волновая функция совпадает с исходной волновой функцией, матричное и комбинаторное проектирование дает одинаковый результат. Например, получим

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix}0&\psi_z&\psi_y&\psi_x\\\psi_z&0&\psi_x&\psi_y\\\psi_y&\psi_x&0&\psi_z\\\psi_x&\psi_y&\psi_z&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&\psi_z&\psi_y&\psi_x\\\psi_z&0&\psi_x&\psi_y\\\psi_y&\psi_x&0&\psi_z\\\psi_x&\psi_y&\psi_z&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\psi_z&\psi_y&\psi_x\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, электродинамика может быть записана как на матричной операции с мономиальными матрицами, так и на комбинаторной операции с матрицами в форме левых идеалов. Поскольку принята точка зрения, что мономиальные матрицы ассоциированы с гравитационными предзарядами, мы имели до сих пор только «гравитационную» модель электродинамики. При использовании комбинаторной операции мы получили «электрическую» модель электродинамики, так как левые идеалы трактуются как модели электрических предзарядов. Поскольку частицы света составлены из электрических и гравитационных предзарядов, мы получаем возможность их описания в форме суперпозиции «электрического» и «гравитационного» представлений. Так выглядит физически полная модель электродинамики, соединяющая в себе не только модели электрических и гравитационных предзарядов, но и специфику их взаимодействий.

Заметим, что модель имеет один и тот же векторный вид, если матричные уравнения умножить слева на мономиальную матрицу. Можно говорить о комбинаторной устойчивости уравнений, описывающих физические явления. Более того, матрицы, аналогичные матрицам группы Клейна, устойчивы (с точностью до знаков) к комбинаторным операциям. Они дают одинаковый результат при разном умножении строк и столбцов. Это обусловлено тем, что матрицы группы Клейна не меняются при операции трансформации. Эти аспекты «устойчивости» косвенно подтверждают *важность тезиса о «выживаемости» при деформациях.*

Представление треугольников неевклидовой геометрии элементами симметрии

Рассмотрим три вида треугольников: со сторонами внутри евклидова треугольника, сам евклидов треугольник, а также со сторонами вне евклидова треугольника. Так представлены три возможности объединения в треугольник трех точек: расположенных на поверхности отрицательной кривизны, на плоской поверхности и на сферической поверхности. Сопоставим им матрицы отношений. Проанализируем три элемента данных симплексов: два отрезка между двумя точками (первый и второй элементы), а также точку пересечения вершин указанных треугольников. «Плоский» треугольник расположим снаружи треугольника, ассоциированного с поверхностью отрицательной кривизны. Во втором случае совместим его с исходным евклидовым треугольником. В третьем случае расположим его внутри треугольника, ассоциированного со сферической поверхностью. Назовем стороны «плоского» треугольника первичными объектами, а стороны других треугольников назовем вторичными объектами. Во всех указанных случаях возможно построение отношений первичных и вторичных объектов. Применим для построения анизотропную модель отношений. Зададим их выражением

$$\sigma(\xi)=\begin{cases}1,\xi\succ 0,\\ 0,\xi=0,\\ -1,\xi\prec 0.\end{cases}$$

Величину ξ зададим анизотропно:

а) пусть отношения первичного объекта к вторичному объекту описываются функцией

$$\xi=\cos\frac{l-l_0}{l_0},$$

б) пусть отношения вторичного объекта к первичному объекту задаются функцией

$$\xi=\sin\frac{l-l_0}{l_0}.$$

Здесь $l-$ расстояние от точки пересечения вершин треугольника вторичного объекта, l_0- расстояние от точки пересечения вершин треугольника первичного объекта. На этой основе получим представление трех треугольников матрицами:

$$i(-)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},i(0)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},i(+)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Тогда появляется новая возможность описания площади треугольников. Зададим её формулой

$$S=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1a_2+i(a_1b_2+a_2b_1)+iib_1b_2.$$

Эти формулы, если не учитывать выражений с введенными единицами, будут давать величины площади, зависящие от произведения этих единиц. Заметим, что «площадь» получает новое толкование, так как может быть представлена матрицами.

Алгоритм состоит из ряда элементов:

- рассматривается *выборка*, состоящая из трех объектов в форме пары отрезков с общими началами и одного точечного объекта,

- вводится *дополнительная характеристика* в форме расстояния от точки до отрезка,

- вводится *оценочный фактор* на паре (l,l_0) вида $\eta=\dfrac{l-l_0}{l_0}$,

- устанавливается иерархия в паре исходных объектов с названием первого (базового) объекта и второго (анализируемого) объекта,

- введено *анизотропное отношение* в форме функционального различия факторов отношений объектов, например, $\xi_{1,2} = \cos\eta_{1,2}, \xi_{2,1} = \sin\eta_{2,1}$,

- задано *правило нормировки* отношений вида

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1, \xi \succ 0, \\ 0, \xi = 0, \\ -1, \xi \prec 0. \end{cases}$$

- принят алгоритм согласования данных об отношениях в форме матриц размерности (2×2):

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Действуя указанным образом, получим представление отношений в анализируемой тройке элементов, соответственно, для треугольников на поверхности отрицательной кривизны, на плоской поверхности, на сферической поверхности:

$$a(-) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, a(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a(+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы изобрели интеллектуальный инструмент для анализа ситуаций в отсутствие эмпирического оборудования. Так почти всегда конструируется алгоритм, удобный для интеллектуальной практики. Он может быть необычайно далек от законов, удобных для самих исследуемых объектов, их сознания, реакций, чувств. Современная практика настаивает на переходе от «бессознательных моделей» к моделям с элементами сознаний и чувств. Такой переход может быть подвержен критике. Но нужно помнить, что те, кто критикует без понимания сути, критикуют самих себя. Любители критиковать делают это обычно ради критики, не более. Редко достигают те, кто критикует, уровня конструктивизма. *Лишь иногда критика дает толчок к развитию практики*. Заметим, что то, что знаешь и чувствуешь, не так просто выразить словами или символами. Но не так просто понять то, что выражено кем-то его словами и символами. Система полученных матриц и их произведений порождает семейство алгебр. Проанализируем некоторые варианты:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2g_{ij}e, g_{ij} = diag\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\sigma_{ij}e, \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = -2\sigma_{ij}e, \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = \pi_{ij}e, \pi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = \delta_{ij}\left(\gamma_i + \gamma_j\right).$$

Следовательно, переход от группы к системе алгебр напоминает переход от черно-белого представления системы отношений к «системе цветов», различие которых обеспечивается разными наборами элементов. Понятно, что алгебра имеет богатую совокупность свойств, что ставит её на первое место при исследовании сложных объектов и явлений. По этой причине всякое исследование, которое ограничивается в выборе совокупности операций, следует признать неполным. Полнота достигается при исследовании не только элементов, но и всевозможных операций, которые ассоциированы с ними. Например, возможно весовое использование разных операций. Правило

$$a\left((1-\alpha)\overset{m}{\times}+\alpha\overset{k}{\times}\right)b$$

способно давать удивительные результаты, так как есть «гибкость» изменений, заложенная не только системой операций, но и совокупностью «весовых функций». Новая физика из одной модели «порождает» спектр моделей. Ситуация становится более сложной, если весовые операционные изменения частичны или подчинены уравнениям динамики.

Пространство скоростей и преобразования Мебиуса

При построении электродинамики, учитывающей скорости, можно было принять во внимание факт, что при прохождении света в экспериментальной установке любого инерциального наблюдателя его скорость будет одна и та же. Другими словами, свет «подстраивается» под инерцию наблюдателя. Тогда квадрат его скорости будет один и тот же для разных инерциальных наблюдателей:

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\frac{c^2}{n^2}w=\xi^2=\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt'^2}.$$

Различие дифференциалов координат и времени следует вводить в том случае, если мы желаем согласовать их друг с другом, учитывая то обстоятельство, что измерения проводятся с влиянием на поле и в разных измерительных устройствах. Следует принять во внимание, что при измерении параметров света согласованно меняется скорость и частота. По этой причине изменение «отсчета» основывается не на фундаментальном принципе синхронизации часов, как предложил Эйнштейн. Его реальная основа в необходимости корректного учета различия частот света, измеренных разными наблюдателями. В упрощенном виде мы требуем, чтобы выполнялось условие

$$dx_1^2-\tilde{c}^2dt_1^2=dx_2^2-\tilde{c}^2dt_2^2.$$

По этой причине экспериментальные точки расположены на гиперболе. Требуется найти пересечение гипербол с прямыми линиями, выходящими из начала координат. В пространстве скоростей угол их наклона задает скорость наблюдателя. Поэтому при перерасчете требуется использовать соотношения дифференциалов координат и дифференциалов времен. Пространство скоростей не тождественно пространству размеров. Оно имеет самостоятельный смысл и самостоятельное значение. В электродинамике без сингулярностей использовано условие

$$\frac{dx^2}{dt^2}=\frac{c^2}{n^2}w=\xi^2=\frac{dx'^2}{dt'^2}.$$

Оно выполнено при соотношениях дифференциалов координат и времени вида

$$dx'=\gamma\left(dx-udt\right),dt'=\gamma\left(dt-\frac{uwn^2}{c^2}dx\right).$$

Тогда

$$\frac{dx'}{dt'}=\frac{\frac{dx}{dt}-u}{1-\frac{uwn^2}{c^2}\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dx}{dt}-u}{1-\frac{u}{\tilde{c}^2}\frac{dx}{dt}}\Rightarrow z'=\frac{az+b}{pz+q}.$$

Модель пространства скоростей есть модель проективного пространства. В электродинамике без сингулярностей к одному классу эквивалентности относятся характерные скорости

$$\tilde{c}=\frac{c}{n\sqrt{w}}.$$

Поскольку показатель преломления и показатель отношения имеют свои диапазоны изменения, характерные скорости имеют диапазон изменений от очень малых до очень больших значений. Возможно обобщение. Рассмотрим, например, соотношения

$$dx'=\gamma\left(adx-budt\right),dt'=\gamma\left(adt-\frac{bu}{\tilde{c}^2}dx\right),$$

$$\begin{pmatrix}dx'\\dt'\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}a & -bu\\ -\frac{bu}{\tilde{c}^2} & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\dt\end{pmatrix}.$$

В классе унимодулярных преобразований получим

$$\gamma=a^{-1}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\frac{u^2}{\tilde{c}^2}\right)^{-1/2}.$$

Соотношения «переопределяют» скорости, задавая для них множитель $\frac{b}{a}$. Физического смысла эта «нормировка» пока не имеет. Установим связь проективных преобразований *с геометрией и алгеброй симплексов*. Выполним проективное представление треугольной пирамиды, допуская возможность использования не только различных ребер, но допуская также возможность описания отношений между объектами, ассоциированными с вершинами пирамиды. Проведем развертку пирамиды на три прямоугольника с сохранением порядка расположения вершин. Сопоставим вершинам, которые обозначены координатами, функции. Примем аналогию с проективной геометрией для конструирования аналога ангармонического отношения. Заметим, что речь может идти не только о некоторых пространственных свойствах симплекса. Применяемые функции могут задавать любые отношения между элементами симплекса. Другими словами, речь может идти о построении геометрии отношений $[6,7]$. Получим соответствия:

		x_1		
	□		□ □	
x_4				x_2
	□		□	
		x_3		

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{f(x_1,x_3)}{f(x_1,x_4)} \frac{f(x_2,x_4)}{f(x_2,x_3)} = K,$$

		x_1		
	□		□ □	
x_2				x_3
	□		□	
		x_4		

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \frac{f(x_1,x_4)}{f(x_1,x_2)} \frac{f(x_3,x_2)}{f(x_3,x_4)} = L,$$

		x_1		
	□		□ □	
x_3				x_4
	□		□	
		x_2		

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \frac{f(x_1,x_2)}{f(x_1,x_3)} \frac{f(x_4,x_3)}{f(x_4,x_2)} = M.$$

Принимая «независимость» применяемых функций от порядка аргументов, получим закон

$$K \cdot L \cdot M = 1.$$

В общем случае, анализ которого актуален, функции могут зависеть от порядка аргументов, а также могут иметь дополнительные свойства, например, знаки. Фактически симплекс представляет как геометрию объекта, так и систему отношений между четырьмя объектами. Эти отношения «двухсторонние»: они подчиняются некоторому алгоритму равновесия. При аналогии с физикой простого взаимодействия «сила действия равна силе противодействия»:

$$f(x_i, x_j) = -f(x_j, x_i).$$

В этом случае произведение трех сложных отношений меняет знак. Аналогично могут быть изменены знаки у элементов матриц, ассоциированных с анализируемой системой отношений. Принимая возможность разных отношений на разверстках, а также возможность нахождения на вершинах системы объектов (в частности, пар предзарядов) легко получить алгебраическое выражение «развернутых» отношений объектов на разных гранях симплекса, укладывающееся в рамки модели группы. В частности, на этой основе можно анализировать соотношение отрезков различных прямых, которые пересекают окружность. Это могут быть алгебраические выражения в форме матриц. Например, получим

$$a_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Единичная матрица будет соответствовать «разъединенной» совокупности объектов. Этот вариант можно интерпретировать иначе: есть состояние без внешних отношений, аналог «сна» объектов. Увеличив количество базовых объектов на вершинах симплекса, можно получить всю совокупность матриц, используемых в физических моделях.

Понятно, что при анализе симплекса на основе системы отношений мы использовали аналог ангармонического отношения проективной геометрии. Действительно, на проективной прямой

$\leftrightarrow$	x_1	$\leftrightarrow$	x_2	$\leftrightarrow$	x_3	$\leftrightarrow$	x_4	$\leftrightarrow$

оно задается выражением

$$\alpha=\frac{x_1-x_3}{x_1-x_4}\cdot\frac{x_2-x_4}{x_2-x_3}.$$

Этот инвариант проективных преобразований широко используется в геометрии. Применяемые функции есть аналог ангармонических отношений. Если мы представим указанные выше функции разностями координат точек прямой линии, то получим проективное представление разверток данного симплекса. Однако функциональный подход задает новые возможности, открывая другие стороны «проективного» описания симплексов, представляющих реальные физические объекты. Геометрический подход к симплексам в его проективном отображении не является максимально общим. *Алгебра матриц, ассоциированная с симплексом, «ближе» к физическим моделям, так как матрицы непосредственно входят в структуру уравнений, описывающих явления.* Следовательно, матрицы отношений, применяемые в теории, могут быть ассоциированы с симплексами. Ранее мы видели, что связи компонент скоростей для света, ассоциированные с разными инерциальными наблюдателями, задаются проективными преобразованиями координат в пространстве скоростей. В силу этого обстоятельства мы имеем дополнительные аргументы в пользу конструктивности принципа софистатности структур и активностей: *свойства, которые имеет изделие, имеют аналогию с активностью этого изделия.* В данном случае речь идет о наличии проективных свойств. Заметим, что в проективном подходе четыре точки распределяются по парам. Стандартное ангармоническое отношение задает «геометрический» вариант «отношений» одной пары точек с другой парой точек. Ситуация становится принципиально более общей, если точкам сопоставлены реальные физические объекты. Тогда возможно конструирование величин, ассоциированных со структурой и свойствами этих объектов. Ближайший путь для такого анализа следует из структурной модели света. В ней имеется две пары различных физических объектов: пара электрических предзарядов и пара гравитационных предзарядов. Структура и активность изделий, составленных из них, зависит от отношений между ними. Они могут быть заданы алгебраически системой матриц, ассоциированной с группой перестановок. Однако та же система матриц следует из анализа разверток симплекса, если предзаряды располагаются на разных вершинах анализируемой пирамиды. Алгоритмы проективной геометрии не мешают реализации такой возможности. Более того, проективная геометрия, учитывающая функциональные отношения, задает дополнительные характеристики данной системы объектов. В частности, это могут быть расстояния в пространстве отношений. Конечно, важны не только расстояния, но и другие геометрические величины, ассоциированные с ними. В частности, это могут быть тензоры кривизны и кручения симплексов, а также аналогичные тензоры для пространства скоростей и ускорений. Математическая фундаментальность проективной геометрии может найти новое применение при представлении фундаментальных свойств физической материи. В частности, это может иметь место при анализе структуры частиц света и их физических свойств. Введение ангармонических отношений для функций, ассоциированных с парами точек, обобщает стандартные физические модели, позволяя *дополнить алгебраическую их часть системой функциональных связей.* Матрицы, сопоставленные разверсткам, задают *циклическую подгруппу* группы перестановок. Она хорошо известна. Однако важнее другой факт: симплексу сопоставлена группа, посредством которой учитывается распределение вершин симплекса. Аналог ангармонических отношений в форме функций задает *дополнительные свойства симплекса*, выходящие за рамки геометрических принципов и постулатов. Для них можно ввести аналог дифференцирования. Дифференцирование одного отношения по другому зададим формулой, ассоциированной с определением длины в проективной геометрии:

$$\delta_B\left(A\right)=\ln A\cdot B.$$

Тогда, например, получим

$$\delta_L\delta_M\left(K\right)=\delta_{LM}\left(K\right)=\ln KLM=0,$$

так как $KLM=1.$ Развертка пирамиды с прямоугольным основанием представляется матрицами

$$e=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},a=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Они образуют циклическую группу: $a^2=b,a^3=c,a^4=e.$ Группа абелева, так как

$$ab=ba=c,dc=cb=a,ac=ca=e,bb=e.$$

Она разрешима, так как коммутаторы $aba^{-1}b^{-1}$ есть единичные матрицы. По этой причине, следуя теории Галуа, симплексы могут описываться разрешимыми многочленами. Они образуют «слова» физической теории и могут использоваться как средство теоретического анализа некоторых возможностей для новых физических моделей. Коэффициенты многочленов учитывают физические различия структуры разных симплексов одного типа. Наличие пары объектов как основы физической реальности предполагает фундаментальность числа 2 в теории и на практике. Объекты могут различаться физически потому, что в них содержится четное или нечетное количество первичных базовых объектов.

Тогда естественно отнести их к разным классам. Математически это обстоятельство может быть выражено сравнением объектов по модулю два. Тогда получим фактор-пространство в форме конечного поля

$$Z/_{2Z} \to \{0,1\} = Z_2.$$

Оно имеет стандартные свойства:

$$0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0,$$

$$0\cdot 0=0\cdot 1=1\cdot 0=0, 1\cdot 1=1.$$

Модель частиц света подтверждает такую возможность алгоритмически. В ней частицы света представлены в форме полимерных молекул с базовыми блоками, состоящими из двух пар: пары электрических предзарядов и пары гравитационных предзарядов. Однако этот нелокальный объект успешно описывается моделью локального объекта, имеющего один блок. Другими словами, принята точка зрения, что один объект может представить свойства класса объектов. Именно это свойство фиксируется в модели фактор-пространства $Z/_{2Z}$. Следовательно, концепция конечных числовых полей неявно применяется в физических полевых теориях.

Кватернарные соотношения

Объединение тензорных моделей электромагнетизма и гравитации достигнуто на основе дифференцирования уравнений Фарадея-Ампера и дополнения их выражениями с нулевой суммой. Итоговая система уравнений содержит четыре индекса для обозначения частных производных и компонент волновых функций. Естественно предположить, что аналогичным образом могут быть изменены соотношения для элементов алгебр, применяемых в физике. Покажем это. Примем за основу соотношения Якоби для элементов $x, y, z.$ Тогда справедливо соотношение

$$\lfloor a\lfloor x[yz]\rfloor\rfloor+\lfloor a\lfloor y[zx]\rfloor\rfloor+\lfloor a\lfloor z[xy]\rfloor\rfloor+\lfloor x\lfloor [yz]\rfloor a\rfloor-\lfloor x\lfloor [yz]\rfloor a\rfloor=0.$$

Объединим первый и предпоследний элементы. Получим

$$\lfloor x[yz]\rfloor = x(yz-zy)-(yz-zy)x = x(yz)-x(zy)-(yz)x+(zy)x,$$

$$\left[a\left[x[yz]\right]\right] = a\big(x(yz)-x(zy)-(yz)x+(zy)x\big)-\big(x(yz)-x(zy)-(yz)x+(zy)x\big)a,$$

$$\left[x\left[[yz]a\right]\right] = x\big((yz)a-(zy)a-a(yz)+a(zy)\big)-\big((yz)a-(zy)a-a(yz)+a(zy)\big)x,$$

$$\left[[yz]a\right] = (yz-zy)a-a(yz-zy) = (yz)a-(zy)a-a(yz)+a(zy).$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
& ax(yz)-ax(zy)-a(yz)x+a(zy)x-x(yz)a+x(zy)a+(yz)xa-(zy)xa+ \\
& +x(yz)a-x(zy)a-xa(yz)+xa(zy)-(yz)ax+(zy)ax+a(yz)x-a(zy)x= \\
& ax(yz)-ax(zy)+(yz)xa-(zy)xa-xa(yz)+xa(zy)-(yz)ax+(zy)ax= \\
& =a(x[yz])+([yz]x)a+x(a[zy])+([zy]a)x=[[ax][yz]]=[[zy][ax]].
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$\lfloor a\lfloor x[yz]\rfloor\rfloor+\lfloor x\lfloor [yz]a\rfloor\rfloor=\lfloor [ax][yz]\rfloor=\lfloor [zy][ax]\rfloor.$$

Преобразуем исходное выражение к форме

$$\lfloor a\lfloor y[zx]\rfloor\rfloor+\lfloor x\lfloor a[yz]\rfloor\rfloor+\lfloor [zy][ax]\rfloor+\lfloor\lfloor z[yx]\rfloor a\rfloor=0.$$

Запишем его иначе

$$\lfloor a\lfloor y[xz]\rfloor\rfloor+\lfloor\lfloor z[xy]\rfloor a\rfloor=\lfloor x\lfloor a[yz]\rfloor\rfloor+\lfloor [zy][ax]\rfloor.$$

Оно имеет вид «уравновешенной пары» двух «зеркал», заданных с точностью до перестановки скобок. Следовательно, кватернарные соотношения сложны даже в случае ассоциативности произведения.

Связь релаксационных процессов со статистикой

Физики принимают пару статистик, соответствующих равновесным состояниям: для частиц с целым спином применяется статистика Бозе-Эйнштейна, для частиц с полуцелым спином применяется статистика Ферми-Дирака. Среднее число частиц в определенном энергетическом состоянии задается формулами

$$n_b=\frac{1}{\exp\phi_b-1},\phi_b=\frac{\varepsilon_b-\mu}{kT},\quad n_f=\frac{1}{\exp\phi_f+1},\phi_f=\frac{\varepsilon_f-E_f}{kT}.$$

При рассмотрении задачи взаимодействия предзарядов мы обнаруживаем аналогию поведения конечной системы и статистической системы. Действительно, если принять модель парных «отношений» (в частности, характеристик, относящихся к столкновениям), то получаются мономиальные матрицы, которые мы ассоциируем с гравитационными предзарядами. С одной стороны, они имеют аналогию с «окружностью» в топологическом смысле этого слова. С другой стороны, они задаются мономиальными матрицами, которые есть элементы кручения, так как порождают единичную матрицу при некотором конечном количестве взаимных произведений. С физической точки зрения им можно сопоставить вращение физического объекта. У частиц света и гравитации это обстоятельство существенно. Если принять модель полного объединения объектов одного класса с элементами второго класса, мы приходим к матрицам в форме правых и левых идеалов по матричному произведению. Мы ассоциируем их с электрическими предзарядами. Они принципиально другие, так как не являются элементами кручения. В статистической физике принята аналогичная точка зрения, соответственно, для фермионов и бозонов. По этой причине следует ожидать наличия аналогии между свойствами конечных систем и свойствами статистических систем. Рассмотрим такую возможность. При построении электродинамики движущихся сред без сингулярностей при скоростях, равных скорости света, мы положили в основу модели релаксационное уравнение для скорости, которая входит в материальные уравнения. Этот шаг был успешным и конструктивным. На его основе рассмотрим вариант релаксационного уравнения для анализа статистических аспектов конечных систем. Зададим следующие величины: Z – количество допустимых мест для объектов, N_a – количество действующих объектов, N – количество вакантных мест для объектов. Пусть величина ξ характеризует энергетические свойства исследуемой совокупности. Проанализируем динамику изменения вакантных мест при наличии указанных величин. Зададим её уравнением для безразмерных величин, которое аналогично уравнению для релаксации скоростей в электродинамике. Пусть

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{N+N_a}{Z-\sigma N_a}\right)=-P_a\left(\frac{N+N_a}{Z-\sigma N_a}\right).$$

Имеем решение

$$\frac{N+N_a}{Z-\sigma N_a}=A\exp(-P_a\xi).$$

Поэтому

$$N+N_a=\left(Z-\sigma N_a\right)A\exp(-P_a\xi)\to N_a\left(1+A\sigma\exp(-P_a\xi)\right)=Z\exp(-P_a\xi)-N.$$

Исследуем ситуацию, когда вакантных мест нет, полагая $N=0.$ Тогда среднее число частиц в определенном состоянии задается формулой

$$\frac{N_a}{Z}=\frac{1}{A^{-1}\exp\left(P_a\xi\right)+\sigma}=\bar{n}.$$

В таком варианте одна статистика может динамически преобразоваться в другую. Такой «переход» реализуется на «плоскости» с переменными A,σ. Для его описания требуются динамические уравнения. В частном случае модель содержит статистики Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака, которые соответствуют значениям параметров

$$A^{-1}=1,\sigma_1=-1,\sigma_2=1.$$

Такой подход направлен на реализацию концепции объединения электромагнетизма и гравитации. Он предполагает единое описание объектов (не только статистическое) и не только с разными спинами, но и с разными зарядами. Естественно использовать также проективные свойства реальности с новыми возможностями, которые вытекают из моделирования геометрии отношений.

Операция для описания Чувств

При построении модели, согласованно учитывающей структуру и поведение Тел, Сознаний и Чувств, мы можем использовать для этого одни и те же объекты, подчинив их разным операциям. Для Тел принято использовать матричную операцию, Сознания мы желаем описывать на основе системы комбинаторных операций. Естественно предложить новые операции для описания Чувств. Поскольку модели будут сконструированы на основе матриц, требуется система новых операций для Чувств. Рассмотрим вариант операции, согласно которой столбцы первой матрицы комбинаторно умножаются на строки второй матрицы. В некотором смысле эта операция будет «обратна» стандартной комбинаторной операции. Естественно обосновать её неассоциативность. Покажем, что новая и известная комбинаторные операции согласуются друг с другом.

Умножим комбинаторно пару матриц. Пусть

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix} = \begin{array}{|ccc|}\hline a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline b_1 & b_4 & b_7 \\ b_7 & b_1 & b_4 \\ b_4 & b_7 & b_1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|ccc|}\hline a_4 & a_5 & a_6 \\ \hline b_2 & b_5 & b_8 \\ b_8 & b_2 & b_5 \\ b_5 & b_8 & b_2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|ccc|}\hline a_7 & a_8 & a_9 \\ \hline b_3 & b_6 & b_9 \\ b_9 & b_3 & b_6 \\ b_6 & b_9 & b_3 \\ \hline \end{array} = A \overset{k}{\underset{\rightarrow}{\times}} B =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_4 + a_3b_7 & a_1b_7 + a_2b_1 + a_3b_4 & a_1b_4 + a_2b_7 + a_3b_1 \\ a_4b_2 + a_5b_5 + a_6b_8 & a_4b_8 + a_5b_2 + a_6b_5 & a_4b_5 + a_5b_8 + a_6b_2 \\ a_7b_3 + a_8b_6 + a_9b_9 & a_7b_9 + a_8b_3 + a_9b_6 & a_7b_6 + a_8b_9 + a_9b_3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим по новому правилу пару матриц в обратном порядке. Тогда

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix} \overset{p}{\underset{\leftarrow}{\times}} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} = \begin{array}{|ccc|}\hline b_1 & b_4 & b_7 \\ \hline a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|ccc|}\hline b_2 & b_5 & b_8 \\ \hline a_4 & a_5 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_4 \\ a_6 & a_4 & a_5 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|ccc|}\hline b_3 & b_6 & b_9 \\ \hline a_7 & a_8 & a_9 \\ a_8 & a_9 & a_7 \\ a_9 & a_7 & a_8 \\ \hline \end{array} = B \overset{p}{\underset{\leftarrow}{\times}} A =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_4 + a_3b_7 & a_1b_7 + a_2b_1 + a_3b_4 & a_1b_4 + a_2b_7 + a_3b_1 \\ a_4b_2 + a_5b_5 + a_6b_8 & a_4b_8 + a_5b_2 + a_6b_5 & a_4b_5 + a_5b_8 + a_6b_2 \\ a_7b_3 + a_8b_6 + a_9b_9 & a_7b_9 + a_8b_3 + a_9b_6 & a_7b_6 + a_8b_9 + a_9b_3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, обе операции согласованы друг с другом:

$$A \underset{\rightarrow}{\overset{k}{\times}} B = B \underset{\leftarrow}{\overset{p}{\times}} A.$$

В более сложных ситуациях могут использоваться функциональные произведения или комбинации указанных произведений. Только практика способна «расшифровать» реализующиеся возможности. Понятно, что их очень много. По этой причине мир *«черно-белых» операций уступает место миру «многоцветных» операций.*

Деформация операций

Система операций, анализируемая нами, устроена таким образом, что она естественно «допускает» деформации. С одной стороны, они обусловлены вариантами выбора комбинаторики произведения строк и столбцов (или столбцов и строк). Возможно произведение первой строки на второй столбец, а второй строки на первый столбец. Таковы комбинаторные деформации одного типа. С другой стороны, возможно изменение последовательности и системы знаков в матрицах, ассоциированных с анализируемыми произведениями. Такова комбинаторика другого типа. Паре операций, указанных выше, соответствует пара наборов матриц:

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$
$$\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Они согласованно задают группу перестановок из трех элементов. Их локальная или знаковая деформация не только способна существенно изменить законы взаимодействия. *Она допускает классификацию, а потому указывает алгоритмы коррекции «нарушений» в исследуемой системе*. Это замечание справедливо для Тел, Сознаний, Чувств. Если в модели дополнительно есть деформация величин и дифференциальных операторов, ситуация становится особо сложной. Принимая модель трансфинитной реальности, мы вправе принять модель алгебр с системой деформаций. Может быть так, что важнейшей задачей является исследование не столько самих явлений и изделий, как их деформаций. Но тогда на первый план выдвигается проблема классификации и коррекции деформаций.

Матричную операцию можно рассматривать как комбинаторную операцию с одинаковой «базой». Тогда элементы строк первой матрицы циклически следуют друг за другом в таблице произведений, а «управляемые элементы» заданы «стационарно» в форме транспонированной второй матрицы. Получим модель вида

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_4&a_5&a_6\\a_7&a_8&a_9\end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\\b_4&b_5&b_6\\b_7&b_8&b_9\end{pmatrix}=\begin{array}{|ccc|}\hline a_1&a_2&a_3\\\hline b_1&b_4&b_7\\b_2&b_5&b_8\\b_3&b_6&b_9\\\hline\end{array}\oplus\begin{array}{|ccc|}\hline a_4&a_5&a_6\\\hline b_1&b_4&b_7\\b_2&b_5&b_8\\b_3&b_6&b_9\\\hline\end{array}\oplus\begin{array}{|ccc|}\hline a_7&a_8&a_9\\\hline b_1&b_4&b_7\\b_2&b_5&b_8\\b_3&b_6&b_9\\\hline\end{array}.$$

Новые операции имеют разную «базу». По этой причине мы вправе считать, что они учитывают не столько «глобальные свойства» второй матрицы, сколько совокупность их скрытых локальных свойств. Тогда возникает предположение, что ассоциативность произведения матриц обусловлена «стационарностью базы» комбинаторного произведения. Изменение стационарности базы ассоциировано с неассоциативностью.

Система алгебр, ассоциированная с группой заполнения

Ранее нами рассмотрен алгоритм построения базиса для группы, на основе которого можно получить все элементы группы. Анализ показал, что это можно сделать на основе трехступенчатого алгоритма. На первом этапе следует выбрать две матрицы, которые не равны единичной. На втором этапе выбирается элемент, отличный от произведения первой пары элементов. На третьем этапе выбирается элемент, отличный от взаимных произведений в указанной тройке элементов. По этой причине есть конечная система базисов. Они отличаются друг от друга алгебраически. При использовании базисов типа Дирака получим алгебру Клиффорда

$$\frac{1}{2}\left(\gamma_i\gamma_j+\gamma_j\gamma_i\right)=\delta_{ij}e.$$

Рассмотрим базис

$$c_1,c_2,f_2,f_1\to\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4.$$

Получим алгебру

$$\frac{1}{2}\left(\gamma_i\gamma_j-\sigma(i,j)\gamma_j\gamma_i\right)=\delta_{ij}e,\sigma(i,j)=\begin{cases}1,i+j\neq 5,\\-1,i+j=5.\end{cases}$$

Рассмотрим базис $a_1,b_1,a_2,b_2\to\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$. Получим алгебру

$$\frac{1}{2}\left(\gamma_i\gamma_j-\sigma(i,j)\gamma_j\gamma_i\right)=\delta_{ij}e,$$

$$\sigma(i,j)=\begin{cases}1,i+j=2n,\\-1,i+j\neq 2n.\end{cases}$$

Поскольку указанные пары элементов при произведении элементов одного типа порождают третий элемент, мы получаем подгруппы группы заполнения. Произведения элементов пары подгрупп порождают все остальные элементы группы заполнения. Следовательно, есть система алгебр, ассоциированная с группой заполнения. У каждой такой алгебры есть система базисов. Аналогичная ситуация имеет место у алгебры Клиффорда на группе заполнения. Однако как базисные элементы алгебры, так и любые другие элементы подчинены единой 3- алгебре

$$\left\{x,[y,z]\right\}+\left[x,\{y,z\}\right]-\left[\{x,y\},z\right]-\left\{[x,y],z\right\}-2(x,y,z)-2(z,y,x)=0.$$

Единая 2- алгебра имеет «расщепление» в форме пары законов:

$$\{x[yx]\}+[x\{yx\}]-2(x,y,x)=0,$$
$$\{x[xz]\}+[x\{xz\}]+[z\{xx\}]-2(x,x,z)-2(z,x,x)=0..$$

Специфика согласования структуры и динамики Тел, Сознаний, Чувств

Исходным пунктом такого согласования принята точка зрения, что модель, построенная для физических Тел, может быть применена для описания Сознаний и Чувств, ассоциированных с этим телом. Для этого требуется дополнить волновые функции для Тел, волновыми функциями для Сознаний и Чувств. Если волновая функция для тел есть спинор, то и для Сознаний и Чувств также применяются спиноры. Кроме этого, следует применять разные операции: матричную, комбинаторную, обратную комбинаторной и т.д. Следует присоединить к рассматриваемой триединой модели элементы, соответствующие Предназначению объекта. Такой вариант представляется более полным и правильным. Понятно, что как объединение волновых функций, так и применение комбинаторики разных операций, следуя концепции трансфинитной реальности, могут быть трансфинитными.

На данной стадии исследования ясно, что мы вправе использовать в модели разные соединения матриц, применяемых в качестве «позвоночника» данной теории. Возможны такие варианты:

$$a_i, ea_i, a_i e, \sigma_i^{jk} e_j f_k ...$$

При «сохранении» вида уравнений для Тела, эти представления выразят разные оттенки Сознаний и Чувств, ассоциированные с Телом. Происходит так потому, что по-разному «реагируют» на форму уравнений применяемые операции. С аналогичной ситуацией мы имеем дело при анализе совокупности циклических уравнений. В них входят произведения разных величин, которые задают р*азные условия равновесия для Тел, Сознаний, Чувств, Предназначений.* Задача состоит в том, чтобы исследовать законы и аспекты их согласования между собой в структуре и динамике. Заметим, что конструирование полной модели явлений, следуя концепции объединения электромагнитных и гравитационных свойств, мы можем использовать для этого всю группу заполнения физических моделей: пару кватернионов и тройку антикватернионов. Примерный вид уравнений будет таков:

$$\sigma_1\left(g^{ik}a_i\partial_k\hat{\Psi}+r^{ik}b_i\partial_k\Psi\right)+\sigma_2\left(r^{ik}f_i\partial_k\hat{\Theta}+g^{ik}e_i\partial_k\Theta\right)=0...$$

С весовыми функциями в единой системе применены кватернионы и антикватернионы. Из таблицы произведения матриц группы заполнения, указанных в Приложении 1, следует, что матрицы типа $\{c_i\}$ обеспечивают взаимное превращение кватернионов в антикватернионы.

Это обстоятельство важно с физической точки зрения. Оно индуцирует гипотезу, что преобразование полей может быть выполнено посредством системы «свободных» объектов нейтрального типа. Мы можем иметь дело с некоторой системой нейтральных полей, которая необходима и достаточна для взаимного преобразования электромагнитных и гравитационных полей. Поскольку мы ассоциируем с полями совокупность структурных частиц, изготовленных из предзарядов, предполагаемые нейтральные «поля» есть совокупность нейтральных объектов, изготовленных из предзарядов.

Фундаментальная группа физической теории

При рассмотрении физических моделей в матричном виде нам желательно иметь инструменты, на основе которых это можно выполнить единым образом. Такой подход, имеющий математическое обоснование, важен для утверждения точки зрения о единстве исследуемых физических объектов и явлений. Такого «единства» можно достичь, применяя в моделях совокупность матриц, которая порождает элементы матричной алгебры. В четырехмерном пространстве этого достичь легко. Есть группа, из которой следует указанный результат.

Рассмотрим матрицы вида

$$\sigma_0^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad \sigma_0^1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad \sigma_0^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\quad \sigma_0^3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^0=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad \sigma_1^1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad \sigma_1^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\quad \sigma_1^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_2^0=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\sigma_2^1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\sigma_2^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\sigma_2^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_3^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\sigma_3^1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\sigma_3^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\sigma_3^3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Введем обозначения:

$$a^1=\sigma_1^2,\quad a^2=\sigma_2^0,\quad a^3=\sigma_3^2,$$

$$b^1=\sigma_2^1,\quad b^2=\sigma_2^3,\quad b^3=\sigma_0^2,$$

$$c^1=\sigma_0^3,\quad c^2=\sigma_3^3,\quad c^3=\sigma_3^0,$$

$$e^1=\sigma_1^1,\quad e^2=\sigma_1^0,\quad e^3=\sigma_0^1,$$

$$f_1=\sigma_2^2,\quad f_2=\sigma_1^3,\quad f_3=\sigma_3^1.$$

Они образуют, с точностью до умножения на минус единицу, группу. Представим совокупность матриц, а также таблицу их взаимных произведений рисунками.

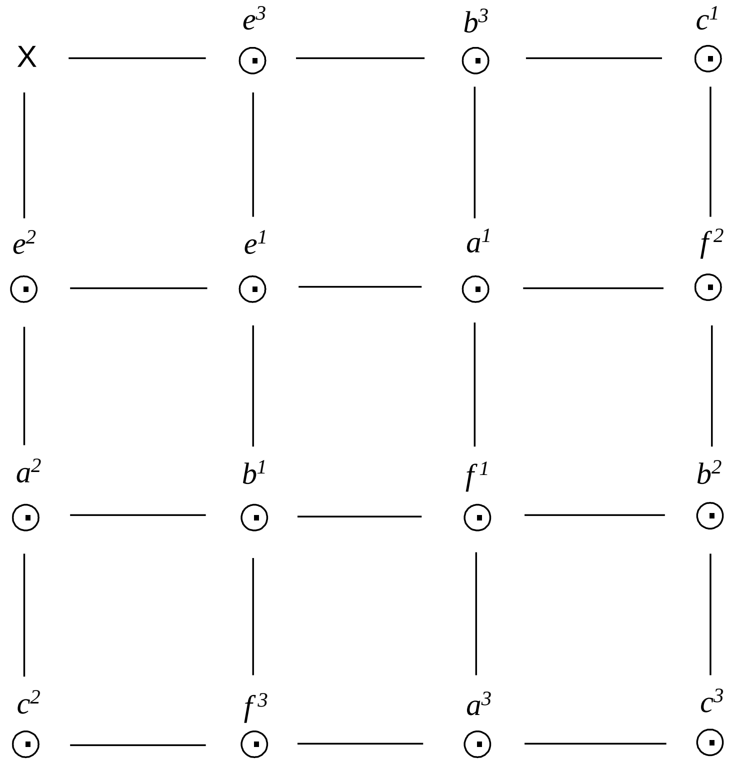

Рис. 1. Расположение элементов группы $V(4)$

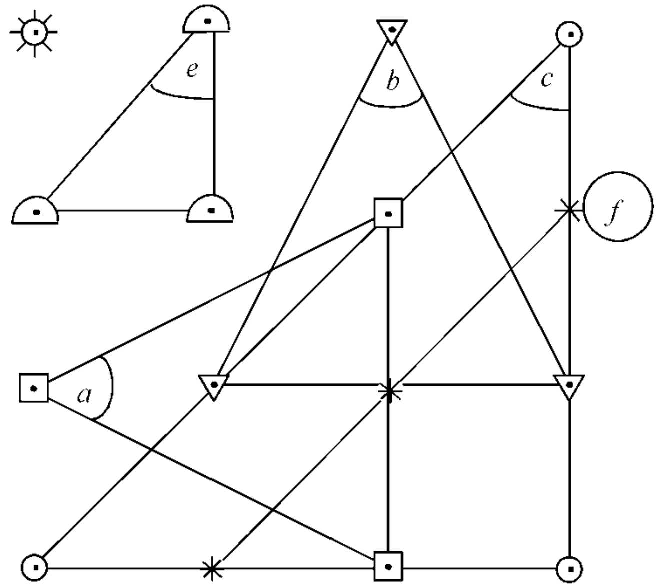

Рис.2. Графическое представление элементов подгрупп.

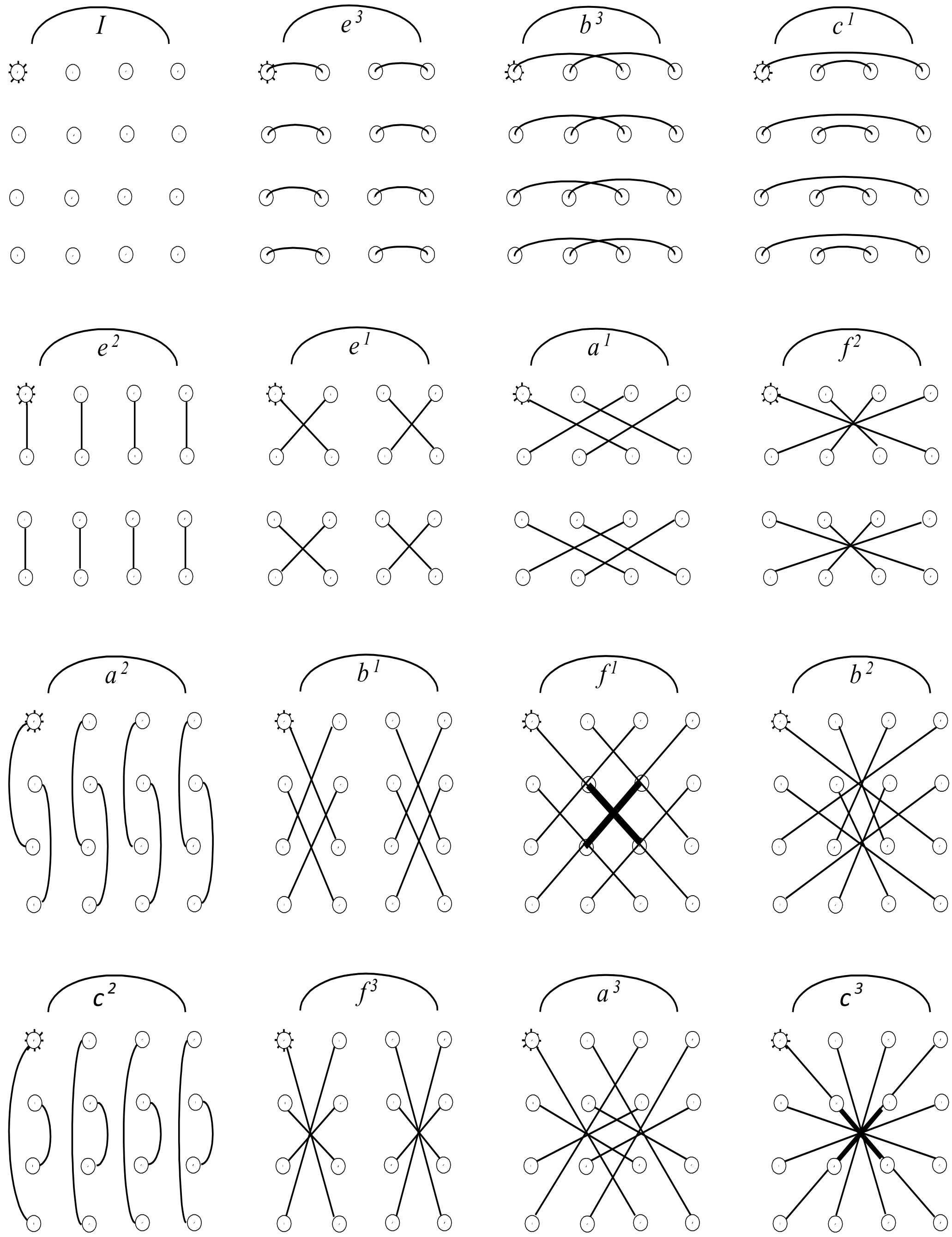

Рис. 3. Графическое представление итогов парных произведений

Заметим, что на основе данного представления можно получать произведение матриц, не используя математических операций. Для этого достаточно рассмотреть те точки, в которых оканчивается линия, идущая от единичного элемента. Тогда линия, соединяющая обе конечных точки, будет найдена на одном из графических представлений. Она задаёт, с точностью до знака, результат произведения. Если же учесть иерархию элементов и порядок их произведения, мы легко без расчетов получаем также знак элемента. Операция Кронекера одно множество превратило в другое. Операция графического сопоставления упрощает анализ произведений матриц.

Операционные свойства группы перестановок трех объектов

К первичным задачам взаимодействия, с физической точки зрения, относится задача взаимоотношений одного объекта с парой других объектов. Рассмотрим её аспекты с точки зрения теории операций. Ограничим анализ простейшей ситуацией, когда отношения между объектами в паре задаются каноническими мономиальными матрицами, образующими простую группу:

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Сконструируем систему матриц третьего порядка по правилу композиции одного объекта и пары объектов. Применим алгоритм конструирования в форме операции, которая перемещает единицы по первой строке и подставляет элементы исходных матриц на свободные места в матрицах третьего порядка. Получим систему матриц:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&X\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&Y\end{pmatrix},\ldots\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Обозначим их буквами и запишем в другой последовательности:

$$a_1=I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\left\{a_2=\sigma=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},a_3=\sigma\tau=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},a_4=\sigma\tau^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{a_5=\tau=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},a_6=\tau^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Легко доказать, что это группа с парой образующих:

$$a_2=\sigma=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},a^5=\tau=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Они формируют фундаментальный закон:

$$\sigma^2=\tau^3=I_3.$$

Следуя ему, можно сконструировать аналогичные группы с точностью до выбора элементов группы и размерности представления.

Элементы группы распределены по трем смежным классам: совокупностям элементов, дополнительных трем нормальным (инвариантным) подгруппам. Два класса образованы тривиальным «расщеплением» элементов на нормальную подгруппу и аналогичный смежный класс:

$$\left(G/H\right)_1\to(a_1,a_1),\left(G/H\right)_2\to(a_1,a_5,a_6).$$

Третий смежный класс состоит из элементов (a_2, a_3, a_4), дополнительных нормальной подгруппе, имеющей вид $H = (a_1, a_5, a_6)$. Известно, что совокупность элементов рассматриваемого множества задает группу движений правильного треугольника. С другой стороны, она характеризует подстановки трех элементов:

$$a_1 = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}\right), a_2 = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline\end{array}\right), a_3 = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline\end{array}\right),$$

$$a_4 = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}\right), a_5 = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline\end{array}\right), a_6 = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline\end{array}\right).$$

Мономиальные матриц «показывают», *на каком месте* стоит каждый пронумерованный объект после перестановки. Элементы группы перестановок можно представить графически:

$$a_1 \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline 3 & & 2 \\ \hline\end{array}, a_1 \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline 3 & \leftrightarrow & 2 \\ \hline\end{array}, a_1 \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline & & \square \\ \hline 3 & & 2 \\ \hline\end{array},$$

$$a_1 \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline \square & & \\ \hline 3 & & 2 \\ \hline\end{array}, a_1 \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline \square & & \square \\ \hline 3 & \leftarrow & 2 \\ \hline\end{array}, a_1 \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline \square & & \square \\ \hline 3 & \to & 2 \\ \hline\end{array}.$$

Рисунки (графы) показывают различие смежных классов: есть ситуации без взаимных отношений, с отношениями в парах, а также с циклическими отношениями разных «ориентаций». Оно интересно с физической точки зрения.

Три класса сопряженных элементов ассоциированы, согласно теореме Бернсайда, с тремя неприводимыми представлениями. Одно из них нульмерное: все элементы группы отображаются в единицу. Второе представление знаковое, оно задается парой чисел $[-1,1]$, характеризуя, например, четность перестановки элементов. Указанные представления типичны для любых конечных групп. Третье представление двумерно. Для его получения нужно выполнить довольно тонкую «работу» с диаграммами Юнга, сопоставляемыми перестановкам, и получить по разработанной методике числа Ямагучи, из которых формируются по определенному «сценарию» искомые матрицы.

Применим для достижения желаемого результата феноменологический прием. Укажем общепринятый вариант неприводимого двумерного представления для группы перестановок:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получим это представление другим методом. Выполним «расширение» матриц третьего порядка, указанных выше, начальными матрицами X, Y. Представим алгоритм расширения в форме *условного тензорного произведения*.

Оно состоит из пяти «звеньев»:

а) на место единиц, представляющих отдельный объект, подставим единичные матрицы,

б) пусть элементы на строках, дополнительные к занятым местам, будут равны нулю,

в) оставшиеся строки дублируем неединичными матрицами, которые на них представлены,

г) если единичная матрица ставится на второстепенную диагональ, то элементы на оставшихся строках умножаются на вторую исходную матрицу и дублируются по строкам трансформируемой матрицы,

д) получив матрицы размерности 4×4, спроектируем их на матрицы размерности 2×2, рассматривая четыре блока матриц и вычисляя значения определителей в них.

В рассматриваемом случае этот алгоритм дает матрицы:

$$a_1^* = \left(\begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right), a_2^* = \sigma^* = \left(\begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}\right), a_3^* = \left(\begin{array}{|cc|cc|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right),$$

$$a_4^* = \left(\begin{array}{|cc|cc|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right), a_5^* = \tau^* = \left(\begin{array}{|cc|cc|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right), a_6^* = \left(\begin{array}{|cc|cc|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}\right).$$

Выполним проектирование матриц четвертого порядка на матрицы второго порядка, вычисляя детерминанты блоков. Получим стандартное неприводимое двумерное представление группы перестановок из трех элементов:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нами применен феноменологический алгоритм конструирования одних симметрий по другим симметриям, рассматриваемым в качестве базовых симметрий. Все симметрии имеют то или другое представление и интерпретацию. Переход от матриц нечетной размерности к матрицам четной размерности частично использует правило тензорного произведения матриц. Кроме подстановки матриц на выделенные места используются дополнительные условия. Назовем данный алгоритм конструирования симметрий так: ***условное тензорное произведение***.

Ситуацию можно упростить, если учесть, что матрицы (σ, τ) согласованы между собой на основе исходной матрицы Y :

$$Y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для построения двумерного представления достаточно получить одну из указанных матриц и использовать затем исходную порождающую матрицу и взаимное произведение данной тройки элементов. Алгоритм условного тензорного произведения можно применить к одному элементу группы перестановок, заданной матрицами третьего порядка. Матрицы двумерного представления оставляют инвариантной матрицу Y :

$$\xi\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\xi^T=\xi^T\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\xi=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$
$$\xi=a_1,a_2,...a_6.$$

Можно рассчитывать четность перестановок:

$$(a_1,a_5,a_6)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\eta(+)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},(a_2,a_3,a_4)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\eta(-)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$
$$\eta(+)=\eta(a_1,a_5,a_6)=1,\eta(-)=\eta(a_2,a_3,a_4)=-1.$$

Заметим, что все используемые системы матриц подчинены условию

$$1+\tau+\tau^2-\left(\sigma+\sigma\tau+\sigma\tau^2\right)=0.$$

Для матриц второго и третьего порядка соотношения между матрицами соответствуют принятым обозначениям. Для матриц четвертого порядка имеет место только алгоритм сложения матриц. Для того, чтобы достичь соответствия с обозначениями, нужно изменить произведение этих матриц. Проанализируем произведения новых матриц. Оно в основном дублирует произведение исходных матриц порядка три. Однако появляются и дополнительные слагаемые. Их структура такова:

$$a_2^*\cdot a_2^*=a_1^*+[3],a_2^*\cdot a_3^*=a_5^*+[3],a_3^*\cdot a_2^*=a_6^*+[1],a_2^*\cdot a_5^*=a_3^*+[4],$$
$$a_5^*\cdot a_2^*=a_4^*+[1],a_2^*\cdot a_6^*=a_4^*+[3],a_6^*\cdot a_2^*=a_2^*+[3],a_3^*\cdot a_3^*=a_1^*+[2],$$
$$a_3^*\cdot a_5^*=a_4^*+[1],a_5^*\cdot a_3^*=a_2^*+[2],a_6^*\cdot a_6^*=a_5^*+[4].$$

Числа в квадратных скобках обозначают матрицы:

$$[1]\Rightarrow\left(\begin{array}{|cc|cc|}\hline 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array}\right),[2]\Rightarrow\left(\begin{array}{|cc|cc|}\hline 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array}\right),[3]\Rightarrow\left(\begin{array}{|cc|cc|}\hline 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ \hline\end{array}\right),[4]\Rightarrow\left(\begin{array}{|cc|cc|}\hline 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ \hline\end{array}\right).$$

Произведения матриц порождают не только «свои элементы», но также «начальный генетический материал» в виде суммы исходных матриц:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Мы получили в пользование качественно новый математический «инструмент», роль и значение которого пока что непонятны. Представляет интерес задача анализа свойств данного множества, которые выходят за рамки указанной выше аналогии с исходной группой.

Ситуация интересна потому, что произведение элементов множества четвертого порядка «наследует свойства» группы матриц третьего порядка, а также суммы элементов группы матриц второго порядка. Мы получили *«множество с наследственной памятью»*.

Введем новую операцию как разность двух произведений: стандартного произведения матриц минус матричное произведение измененных матриц. Изменение матриц произведем по такому алгоритму: заменим нулями строки в первой матрице, имеющие в исходной матрице блок нулей, а во второй матрице аналогично заменим нулями столбцы. Запишем новое произведение:

$$\xi[\times]\eta = \xi\cdot\eta - \hat{\xi}\cdot\hat{\eta}.$$

Запишем матрицы четвертого порядка в блочной форме:

$$E=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, \sigma=\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Y \end{pmatrix}, \sigma\tau=\begin{pmatrix} Y & Y \\ 0 & X \end{pmatrix}, \sigma\tau^2=\begin{pmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix} Y & Y \\ X & 0 \end{pmatrix}, \tau^2=\begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Y \end{pmatrix}.$$

Таблица произведений такова:

		σ	$\sigma\tau$	$\sigma\tau^2$	τ	τ^2
	$\times$	$\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ 0 & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ X & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$
σ	$\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & 0 \\ \ast & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ X & \ast \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ \ast & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & X \\ X & \ast \end{pmatrix}$
$\sigma\tau$	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ 0 & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ast & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & \ast \\ 0 & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ X & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ast & X \\ X & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & \ast \\ Y & Y \end{pmatrix}$
$\sigma\tau^2$	$\begin{pmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ X & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ 0 & X \end{pmatrix}$
τ	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ X & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ast & X \\ X & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & \ast \\ Y & Y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ 0 & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ast & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & \ast \\ 0 & X \end{pmatrix}$
τ^2	$\begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ \ast & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & X \\ X & \ast \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & 0 \\ \ast & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y & Y \\ X & \ast \end{pmatrix}$

Здесь

$$\delta_{ab}(\xi,\eta) = XY + Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X + Y \Rightarrow \ast.$$

Рассмотрим примеры новых произведений:

$$\tau[\times]\tau = \begin{pmatrix} Y & Y \\ X & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Y & Y \\ X & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Y & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix} = \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Y \end{pmatrix},$$

$$\sigma[\times]\tau = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Y & Y \\ X & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & Y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Y & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & Y \\ 0 & X \end{pmatrix},\ldots$$

Тогда элементы, полученные на основе условного тензорного произведения, имеют свойства исходной группы по функциональным проявлениям и по таблице произведений. Новая операция на множестве матриц четвертого порядка состоит из двух операций. Следовательно, мы имеем дело с алгеброй. Однако эта алгебра такова, что её элементы «наследуют» свойства группы, из которой получена алгебра. Алгебры и группы принято рассматривать как «несмешивающиеся жидкости». В данном случае стало возможным их единое рассмотрение.

Заметим специфику подхода и новые задачи, им индуцируемые:

А) Применение к группе перестановок знаковой группы существенно «обогащает» её структуру и свойства. Их анализ представляет собой самостоятельную задачу. Она важна потому, что в фундаментальном физическом моделировании обычно используются матрицы с противоположными знаками.

Б) Условное тензорное произведение относится к категории задач деформации объектов и их свойств. Именно деформация метрики Минковского позволила разобраться с физикой релятивистских явлений, а также с учетом условий измерения в электродинамике. Так получилась система групп: сигруппа Галилея-Лорентца, необходимая для анализа динамических процессов. Деформация симметрий согласно условному тензорному произведению является новым инструментом анализа и практики. По этой причине его необходимо тщательно изучить и найти физические приложения такой операции. В частности, требуется исследовать новые алгебры, порождаемые такой операцией.

В) Сохранение своего генетического материала» в форме произведения матриц является принципиально новым элементом теории, который, вероятно, может найти применение в генетике.

Г) Анализ проводился в рамках стандартного матричного произведения. Сейчас понятно, что оно не даёт полной картины явлений. Комбинаторное произведение позволяет дополнить данную «картину» явлений новыми чертами и свойствами. Естественно предположить, что так можно учесть дополнительные условия в системе анализируемых объектов. Ранее было сделано предположение, что так могут проявлять себя свойства Сознаний и Чувств. Каковы они? Что сознает и чувствует правильный треугольник?

Анализируемая группа есть группа симметрии правильного треугольника. Мы предполагали ранее, что новое множество «проявляет сознание и чувства» правильного треугольника. В силу указанных обстоятельств и проведенного исследования симметрий кажется конструктивным для практики принять две гипотезы:

а) **«сознание и чувства» могут быть подчинены тем же законам, что и физические тела,**

б) они «работают» на разных объектах и по разным правилам.

Заметим, что применение знаковой группы к указанным матрицам позволяет приблизить формальные симметрии к реальной практике физического моделирования. Вся физика базируется на мономиальных матрицах, модифицированных знаковой группой. Условное тензорное произведение открывает возможности систематического конструирования новых алгебр. Элементы этих алгебр, если дополнить их комбинаторным произведением, могут стать основой качественно новых моделей в естествознании. Это может быть любой раздел науки, в котором применяется математическое моделирование. С другой стороны, так «открываются» принципиально новые черты реальности.

Мы понимаем, что условное тензорное произведение способно охватить и проявить некоторые черты Сознаний и Чувств. Эти свойства могут быть достаточно необычны в рамках применения системы операций.

Таблица характеров (сумм диагональных элементов матриц представлений) выглядит так:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\chi(0)$	1	1	1	1	1	1
$\chi(1)$	1	–1	–1	–1	1	1
$\chi(2)$	2	0	0	0	–1	–1

.

Сумма всех характеров в данном случае равна порядку (количеству элементов) группы перестановок.

Гомологические операции для конечных систем

Анализ симплексов в теории топологических пространств базируется на математических объектах, имеющих ряд аналогий с физическими объектами. Есть О-симплекс в форме точки, обозначаемой числом, 1-симплекс в форме отрезка с парой точечных объектов обозначаемых парой чисел. 2-симплекс задает ориентированный треугольник с обозначенными вершинами. Его можно интерпретировать физически как совокупность трех бесструктурных объектов, соединенных между собой ориентированными одномерными «струнами». Представим его рис.4, учитывающим две возможные ориентации стрелок:

		0		
	□		□	
2		←		1

,

		0		
	□		□	
2		→		1

.

Рис.4. 2-симплекс.

Рассмотрим несколько вариантов математического представления данного изделия. Напомним, что свойства геометрической симметрии правильного треугольника относительно вращений и зеркальных отражений составляют предмет всех стандартных учебников по симметриям. Однако они не охватывают других возможностей математического анализа данного объекта.

Подойдем к анализу рис.4 с точки зрения теории гомологий. Для этого следует явно представить его «цепи»: аналог элементов алгебры, а также провести дифференцирование «цепей». В данном случае зададим числами a_0, a_1, a_2 длины отрезков, соединяющих точки, лежащие напротив вершин, обозначенных числами. Сконструируем «цепь» вида

$$\xi = a_0[1,2] + a_1[2,0] + a_2[0,1].$$

Выражения в квадратных скобках указывают на отрезок, выступающий в роли «репера» алгебры. Выполним дифференцирование $\partial\xi$ «цепи», используя алгоритм гомологической алгебры. Согласно ему, выражения в квадратных скобках «сохраняют» число, стоящее на нечетном месте, со знаком плюс. Число, стоящее на четном месте, «сохраняется» со знаком минус. Получим выражение

$$\partial\xi = a_0[1] - a_0[2] + a_1[2] - a_1[0] + a_2[0] - a_2[1] =$$
$$= (a_2 - a_1)[0] + (a_0 - a_2)[1] + (a_1 - a_0)[2].$$

Если этот выражение равно нулю, мы имеем «цикл». В других случаях «цепь» задает границу. Рассмотрим условия для реализации «цикла». Они имеют вид

$$a = a_0 = a_1 = a_2.$$

Цикл получается в том случае, когда указанные точечные объекты соединены между собой отрезками одинаковой длины. Эти отрезки ориентированы, но могут иметь разную форму, что не учитывается при начальном анализе. Если же отрезки, которыми соединены точки, имеют разную длину, то «цепь» есть граница. Понятно, что и границ, и цепей много. Однако уже сейчас можно предложить правило эквивалентности для цепей: цепи эквивалентны, если они отличаются на цикл. Другими словами. Есть эквивалентность двух цепей

$$\xi \sim \eta + \partial c.$$

Это возможно потому, что у данных «цепей» мы при дифференцировании получим одинаковый результат. Эта ситуация аналогична эквивалентности функций, определенных с точностью до константы. При их дифференцировании получится одинаковый результат.

Второе дифференцирование обращает «цепь» в ноль. Действительно, рассмотрим, например, вариант $\xi = a[1,2,3]$. Тогда

$$\partial\xi = a[2,3] - a[1,3] + a[1,2],$$

$$\partial\partial\xi = a[2] - a[3] - a[1] + a[3] + a[1] - a[2] = 0.$$

Дифференциал типа $\partial a[N] \equiv 0$ *по определению*. Нахождение факторгруппы границ по подгруппе циклов составляет раздел гомологической алгебры. В рассматриваемом случае, если расстояния между точками задавать целыми числами, группой гомологий будет группа целых чисел Z. Понятно, что её физическая содержательность недостаточна для решения конкретных задач или для анализа технологических устройств. Однако гомологическая алгебра в данном случае дает обоснование различия симметрий. Один класс относится к разряду правильных фигур, а второй класс относится к разряду неправильных фигур. Аналогично можно оценивать на только отрезки, но и площади, и объемы, и точки. Задача состоит в том, чтобы включить такой анализ в расчетную физическую модель.

Симплексам рис.4 можно поставить в соответствие пару матриц. Примем алгоритм математического представления симплекса в соответствии с системой отношений между точками, которые задаются ориентированными стрелками. Здесь объект, обозначенный числом 0, имеет отношения (связь) с объектом, обозначенным числом 1. Далее $1 \to 2, 2 \to 0$. Запишем отношения нулевого объекта на первой строке матрицы с размерностью 3, а для других объектов предоставим следующие строки. Зададим отношения канонически числами, равными единице.

Получим пару матриц

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = b.$$

Их произведение даёт единичную матрицу

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы получили совокупность объектов, называемых конечной группой. Её порядок (число элементов) равен трём. Группа имеет единичный элемент, содержит обратные элементы. Группа коммутативна, произведение в паре элементов не зависит от порядка сомножителей. Произведение ассоциативно:

$$(ab)c = a(bc).$$

Другими словами, связи между объектами (отношения) могут быть заданы группой. Эта группа дополнительна, с информационной точки зрения, группе, индуцируемой гомологическим анализом.

Возможно построение *числовой группы* для рассматриваемого симплекса. Используем три числа $0,1,2$ как элементы новой группы. Для реализации такой возможности введем новую сумму чисел. Паре $(a+b)$ поставим в соответствие элемент c, получаемый при движении точки от элемента a на b шагов. При ориентации симплекса по часовой стрелке получим коммутативную, ассоциативную группу:

		0		
	□		□	
2		$\leftarrow$		1

$$0+0=0, 0+1=1, 0+2=2, 1+0=1, 2+0=2,$$

$$1+1=2, 1+2=0, 2+1=0, 2+2=1.$$

При ориентации симплекса против часовой стрелки получим некоммутативное множество:

		0		
	□		□	
2		$\rightarrow$		1

$$0+0=0, 0+1=2, 0+2=1, 1+0=1, 2+0=2,$$

$$1+1=0, 1+2=2, 2+1=1, 2+2=0.$$

Оно не является группой, потому что нарушается ассоциативность. Например, получим

$$(2+2)+1=2\neq 2+(2+1)=1.$$

Этот пример подтверждает известный факт, что у конечного множества может быть *система операционных свойств*. Они по-разному выражают структуру объектов и отношения между объектами. Усложняя или деформируя операции, мы получаем систему математических объектов, ассоциированных с физическими объектами.

При ориентации симплекса по часовой стрелке получим три варианта «воздействия» на числа. Так, «воздействие» нуля задается равенствами

$$0+0=0=0+0, 0+1=1=1+0, 0+2=2=2+0 \Rightarrow 0\to 0, 1\to 1, 2\to 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для математического выражения этой ситуации примем точку зрения, что нулю ставится в соответствие единица в первом столбце, единице – во втором столбце, двойке – в третьем столбце. «Свои» места есть места на диагонали. Тогда указанные выше равенства представятся единичной матрицей. Рассмотрим пару других «воздействий» и сопоставим им матрицы по указанному способу. Тогда получим

$$\begin{aligned} &1+0=1=0+1 \Rightarrow 0\to 1, \\ &1+1=2=1+1 \Rightarrow 1\to 2, \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &1+2=0=2+1 \Rightarrow 2\to 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2+0=2=0+2 \Rightarrow 0\to 2, \\ &2+1=0=1+2 \Rightarrow 1\to 2, \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ &2+2=1=2+2 \Rightarrow 2\to 1. \end{aligned}$$

Эти три матрицы задают группу, что согласуется с групповым свойством числовой системы с пошаговым сложением. При ориентации симплекса в противоположном направлении ситуация задается совокупностью матриц симметрической группы S_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Некоммутативное, неассоциативное множество представлено некоммутативной группой, которая «скрыла» неассоциативность. Возникает предположение, что предложенный алгоритм сопоставления числовому множеству матриц, может быть расширен. Это возможно при введении в множество матриц комбинаторной операции. Например, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такая возможность реализуется в модели воздействия симплекса на симплекс:

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & 0 & & \\ \hline & \square & & \square & \\ \hline 2 & & \leftarrow & & 1 \\ \hline \end{array} \right) * \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & 1 & & \\ \hline & \square & & \square & \\ \hline 2 & & \leftarrow & & 0 \\ \hline \end{array} \right) \Rightarrow 0+1=1, 1+0=1, 2+2=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот вариант интересен тем, что ему соответствует *«операторная конденсация»*: объекты, имеющие разные места, расположились в одном месте. Мы видим, что один и тот же симплекс, рассматриваемый «с разных сторон», может иметь разные модели и разные свойства.

К операционным аспектам квантовых групп

При анализе алгебр Клиффорда, равно как и при рассмотрении алгебр, описывающих квантовые эффекты, иногда используется условие

$$AB = \omega BA.$$

Представление произведения элементов группы заполнения в форме

$$AB = \omega BA$$

допускает возможность обобщения. Легко получить в этом случае аналог алгоритма, используемого в модели «квантовых групп». Заменим указанное частное условие более общим выражением. Оно соответствует алгоритму деформации матриц. Легко проверить, что трансформация столбцов во второй матрице не меняет произведения, хотя выводит его за «границы» группы. Аналогичный результат получается, если вторую матрицу умножить на диагональную матрицу. Ситуация меняется, если выполнить «спинорную деформацию» вторых матриц (выполнить «подготовку» к взаимодействию). Например, мы умножаем элементы первой строки на величину a, а элементы второй строки на величину b. Тогда получим, например

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = xy,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix} = yx.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили формальное обоснование условия типа

$$yx = qxy.$$

Потребуем для штрихованных величин выполнения условия «инвариантности» в форме

$$y'x' = qx'y'.$$

Для анализа его сущности и возможностей рассмотрим преобразование

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Получим условия на элементы матрицы:

$$ca = qac, db = qbd,$$
$$ad - da = q^{-1}cb - qbc.$$

Выполнив аналогичную процедуру для транспонированной матрицы, получим

$$ba = qab, dc = qcd,$$
$$ad - da = q^{-1}bc - qcb.$$

Из их согласования следует, что $bc = cb.$ Следовательно, *деформация произведения матриц* прямо или косвенно может быть связана с алгоритмами, используемыми в моделях квантовых групп. Поскольку естественно рассматривать произведение матриц как проявление взаимодействия объектов, мы вправе считать квантовые группы начальным инструментом учета граней такого взаимодействия. Упростим анализ. Рассмотрим произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Тогда $yx = \theta xy$,

$$\theta = \begin{pmatrix} ab^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ba^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем соотношение

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ba^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, рассмотрев разные ситуации, мы приходим к выводу, что выражения, используемые в модели «квантовых групп», могут применяться как для стандартных ситуаций, так и для анализа всевозможных деформаций. По своей физической сути мы не выходим за рамки некоторого алгоритма изменения отношений между физическими объектами. У таких деформаций есть свои законы. Формализм квантовых групп частично приоткрывает тайны этих законов.

Заметим, что указанный вариант деформации группы нетривиален. Деформации подлежат не отдельные элементы, а упорядоченная совокупность их произведений. Эти произведения получаются по алгоритму «рассыпания» деформирующей группы по совокупности всех произведений. «Рассыпание» реализуется на основе произведения Даламбера. Значит, возможен алгоритм обобщения модели квантовых групп. Согласно ему реализуется система квантовых групп на многообразии её элементов. Эта реализация может быть разной, подчиняясь **дополнительным условиям**. Поскольку деформации симметрий соответствует некое взаимодействие, система квантовых групп будет описывать систему взаимодействий. В рассматриваемом случае группа заполнения непосредственно связана с электромагнитным и гравитационным взаимодействием. В частности, на этой основе реализуется объединение электромагнетизма и гравитации. По этой причине система квантовых групп может быть полезна для анализа явлений электромагнетизма и гравитации, равно как и их взаимосвязей.

Операционные свойства кватернионов

Сначала проиллюстрируем их на примере кватерниона размерности 2×2. Мы имеем в этом случае систему матриц $\left(i^2 = -1\right)$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, z = xy = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, x^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, z^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Образующие x, y подчинены соотношениям

$$x^4 = x^2 y^2 = xyxy^{-1} = 1.$$

Кватернионная группа есть **метабелева 2-группа** (двухступенно разрешимая). В ней выполняется условие

$$\lfloor [x, y], [z, t] \rfloor = 1_2.$$

Обозначение 1_2 соответствует единичной матрице размерности 2×2. Квадратные скобки обозначают коммутатор

$$[x, y] = x^{-1} y^{-1} xy.$$

Кватернион есть **нильпотентная группа** класса нильпотентности 2. Её элементы подчинены условию

$$\lfloor [x, y], y \rfloor = 1_2.$$

Изменение размерности матриц представления не нарушает указанные законы. Они справедливы также для кватернионов, представленных матрицами размерности 4×4. Это заключение легко проверить расчётом.

Фундаментальная группа физических моделей представлена не только парой кватернионов, но и тройкой антикватернионов. Используемые в физической модели электромагнетизма кватернионные единицы задаются антисимметричными матрицами. Тензорная модель гравитации базируется на тройке антикватернионов (альтернионов), задаваемых симметричными матрицами. Другими словами, *симметрия структуры кватернионных и альтернионных единиц согласована со структурой исследуемых физических полей*. Более того, кватернионы и альтернионы задают отношения между четырьмя физическими объектами. Этого достаточно, чтобы принять гипотезу, что оба указанных явления базируются на паре электрических и паре гравитационных предзарядов. Поскольку группа заполнения математически едина, появляются основания рассматривать физическое единство электромагнетизма и гравитации.

Альтернионы подчинены соотношениям:

$$x^2 = y^2 = xyxy = 1_2.$$

Каждый альтернион есть **метабелева 2-группа** (двухступенно разрешимая). В ней выполняется условие

$$\lfloor [x, y], [z, t] \rfloor = 1_2,$$

так как $[x, y] = 1$. Обозначение 1_2 соответствует единичной матрице размерности 2×2. Квадратные скобки обозначают коммутатор $[x, y] = x^{-1} y^{-1} xy$.

Альтернион есть **нильпотентная группа** класса нильпотентности 2. Её элементы подчинены условию

$$\lfloor [x,y],y \rfloor = 1_2.$$

Альтернионы можно рассматривать как кватернионы с другой системой определяющих соотношений. Поскольку кватернионы антисимметричны, а альтернионы симметричны, их можно называть антикватернионами, фиксируя именно различие в их симметрийной структуре. Структура группы заполнения физических моделей удобна для иллюстрации фундаментальных свойств групп. Интересен тот факт, что так задаются отношения между четырьмя объектами. Отношения в тройке объектов дополнительны указанным условиям. Ситуация становится более сложной, если в рассмотрение ввести комбинаторную операцию вместо матричной. Дополнительный интерес представляет математическая конструкция, образованная прямой суммой элементов кватернионов и антикватернионов, располагая их в матрицах размерности 8×8 по диагонали.

Деформация множеств на основе операций знаковой группы

Общепринятая теория электромагнитных явлений представлена на основе пары кватернионов $(I,a_1,a_2,a_3),(I,b_1,b_2,b_3)$ $[1-6]$. Их явный вид такой:

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, a_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, b_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Они антисимметричны, что изначально делает их «родственными» антисимметричным тензорам электромагнитного поля и индукций. Удобство их применения в теории электромагнетизма состоит в том, что частные производные согласованы с положением значимого элемента в четвертом столбце. Если значимый элемент на первом месте, используется производная по координате x и т.д. Два кватерниона нужны потому, что в теории нужны как комплексные величины, представленные спинорами, так и сопряженные комплексные величины, представленные сопряженными спинорами. У каждого спинора есть свой «носитель». Пара кватернионов фундаментальным образом выражает общепринятую точку зрения в физике: у каждой частицы есть античастица. Другими словами, реальность во многом определяется наличием и взаимодействием пары объектов. Пара кватернионов выступает в роли пары фундаментальных математических объектов. Принимая эту точку зрения, подтвердим ее математическим анализом. Умножим элементы кватернионов друг на друга. Получим совокупность матриц:

$$c_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$e_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$f_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Эти матрицы симметричны. Их можно назвать антикватернионами или альтернионами. На них базируется современная модель массодинамики $[1-6]$. При умножении альтернионов друг на друга получаем элементы кватерниона и элементы c_1,c_2,c_3. Матрицы c_1,c_2,c_3. удобны для преобразования кватернионов и альтернионов друг в друга. Фундаментальность всего рассматриваемого семейства матриц очевидна. *Математика «подсказывает» явно, что электромагнетизм и гравитация могут и должны описывать единым образом*.

Заметим, что все рассматриваемые матрицы мономиальны (есть только один элемент в каждой строке и в каждом столбце). Их базовая структура задается группой перестановок Клейна:

$$\alpha=e_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\beta=e_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\gamma=e_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\delta=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Проанализируем структуру их матричных произведений. Расположим элементы в таком порядке:

γ	β	α	δ
β	γ	δ	α
α	δ	γ	β
δ	α	β	γ

$\Leftrightarrow$

3,0	2.0	1,0	0,0
2,0	3,0	0,0	1,0
1,0	0,0	3,0	2,0
0,0	1,0	2,0	3,0

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}0\hat{\times}0=1\hat{\times}1=2\hat{\times}2=3\hat{\times}3=0,\\ 1\hat{\times}2=3,1\hat{\times}3=2,2\hat{\times}3=1...\end{matrix}\right\}.$$

Заметим, с одной стороны, что таблица произведений матриц дублирует, с точностью до перестановки, структуру рассматриваемых матриц. Примем точку зрения, что произведение матриц «аналогично» взаимодействию физических объектов. Тогда мы *принимаем взаимное соответствие структуры объектов как изделий и структуры их взаимодействия.* Это замечание имеет фундаментальное значение, если применять его в форме **принципа**

взаимного соответствия структур и их взаимодействий. Конструируя математическую реальность по аналогии с физической реальностью, и обнаружив на практике новые физические объекты, мы вправе по аналогии с ними искать новые математические объекты и математические операции, описывающие взаимодействия этих объектов. С другой стороны, принятая таблица произведения чисел, согласующаяся с таблицей произведения матриц, получает «эмпирическое обоснование». Новые отношения в системе чисел не являются простой формальностью. Они по-новому отображают и структуру, и взаимодействие физических объектов. Обратим внимание на *операционный алгоритм* получения рассматриваемой совокупности матриц. Все они получены модификацией матрицы с положительными единицами посредством знаковой матрицы, состоящей из знаков $(+,-)$. Произведение столбца знаковой матрицы на матрицу (слева или справа) проводится на основе изменения знаков в соответствующей строке. Расположим матрицы в соответствии с принятыми ранее индексами мест. Тогда получим такое распределение элементов знаковой матрицы по элементам:

$$
\begin{array}{|c|c|c|}\hline & e & \\\hline + & + & + \\\hline + & + & + \\\hline + & + & + \\\hline + & + & + \\\hline 0 & 0 & 0 \\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|c|c|}\hline & c & \\\hline + & + & + \\\hline - & - & + \\\hline + & - & - \\\hline - & + & + \\\hline 1 & 2 & 3 \\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|c|c|}\hline & f & \\\hline + & + & + \\\hline - & - & + \\\hline - & + & - \\\hline + & - & - \\\hline 2 & 1 & 3 \\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|c|c|}\hline & b & \\\hline + & + & + \\\hline + & - & - \\\hline - & - & + \\\hline - & + & - \\\hline 3 & 2 & 1 \\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|c|c|}\hline & a & \\\hline + & + & + \\\hline - & + & - \\\hline + & - & - \\\hline - & - & + \\\hline 1 & 3 & 2 \\\hline\end{array}.
$$

Знаковая группа выполнила расширение базовой группы с элементами e_i. Это расширение, в частности, позволяет сгруппировать полученные элементы в такой форме:

$$
\begin{array}{|c:c|c|c|c|}\hline e_3 & a_3 & b_2 & c_2 & f_1 \\\hline e_2 & a_2 & b_1 & c_3 & f_3 \\\hline e_1 & a_1 & b_3 & c_1 & f_2 \\\hline\end{array}.
$$

Мы получили разбиение множества на смежные классы. Элементы, расположенные на «полочках», при их взаимном произведении преобразуются в элементы семейства e_i. Они меняются местами, если на них слева или справа действуют элементы нормальной подгруппы e_i. Другими словами, смежные классы инвариантны относительно действия подгруппы, которая их «породила». В данном случае мы имеем три смежных класса элементов, инвариантных относительно действия группы. При взаимном произведении элементов из разных смежных классов они преобразуются в другой смежный класс. Мы имеем стандартный вариант факторгруппы G/E. Её можно рассматривать как группу 0-когомологий $H^0(E,A)$ данного множества E. Роль инвариантных элементов $ga=a, g\to e_i$

выполняют смежные классы. Учтем тонкости ситуации. В данном случае инвариантные элементы получены на основе расширения базовой группы посредством знаковой группы, которая выступает в роли «теневого элемента» модели. Более того, так предъявлены только пара аспектов конструктивного сотрудничества обоих групп. Более того, базовая группа ничего не меняет в структуре знаковой группы. Однако *у знаковой группы есть еще другие функциональные свойства*, которые обнаруживаются при внимательном рассмотрении ситуации. В частности, введем функцию $\Phi(g_1 ... g_n) = nab\varphi$. Здесь $n -$ число элементов группы в произведении, $\varphi -$ элемент знаковой группы. Выберем $\varphi = col(+,+,-,-)$. Тогда для пары элементов

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняется условие дифференцирования по Лейбницу:

$$\Phi(ab) = \Phi(a)b + a\Phi(b) \Rightarrow 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта же функция на паре элементов

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

порождает правило

$$\Phi(\alpha\beta) = \Phi(\alpha)\beta - \alpha\Phi(\beta) \Rightarrow 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, функции с учетом знаковой группы обобщают концепцию дифференцирования. Они допускают «гибкое» дифференцирование, зависящее от того, какая пара элементов используется для этого. К аналогичной ситуации мы приходим, введя функцию, учитывающую «внешние факторы». Пусть его роль выполняет матрица

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем функцию

$$f(g_1 g_2 ... g_n) = n g_1 g_2 ... g_n \sigma.$$

Пусть, например, выбраны матрицы

$$g_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},g_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Получим соотношение привычного вида:

$$f(g_1g_2)=f(g_1)g_2+g_1f(g_2)\Rightarrow 2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Проанализируем другие возможности, используя введенное ранее комбинаторное произведение матриц. Пусть заданы матрицы

$$g_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},g_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},a_0=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Введем функцию

$$f(g_1g_2...g_n)=g_1g_2...g_n\overset{k}{\times}a_0.$$

Знак $\overset{k}{\times}$ обозначает комбинаторное произведение, другое произведение матричное. Тогда

$$f(g_1g_2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},f(g_1)g_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},f(g_2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Данная тройка матриц и принятая функция порождает систему законов:

$$f(g_1g_2)=\begin{cases}f(g_2)-f(g_1)g_2,\\ f(g_2),\\ f(g_2)+f(g_1)g_2.\end{cases}$$

Это обстоятельство типично для законов, индуцируемых комбинаторной операцией. В тех ситуациях, в которых матричная операция дает один или два закона, комбинаторная операция сама по себе, а также при соединении с матричной операцией, даёт расширение множества законов. При этом законы имеют разную меру общности: разные пары элементов могут быть подчинены разным совокупностям законов. Заметим, что такая закономерность характерна для живых объектов, особенно если это касается алгоритмов выбора или принятия решений.

Выполним анализ таблицы умножения элементов данной группы, объединяющей единичную матрицу, пару кватернионов и тройку альтернионов. Используем числа 0,1,2,3 для построения нового алгоритма произведения элементов групп. Сначала рассмотрим таблицу произведения элементов пары кватернионов. Расположим их «по координатным осям» x, y. Проиндексируем элементы указанными числами в соответствии с местом их расположения. Единичному объекту припишем пару нулевых индексов, располагая его в «начале координат». Примем таблицу условного суммирования для введенных индексов, полагая, что на конечном числовом множестве введена дополнительная структура. Получим базовую совокупность таблиц, которые представляют расположение элементов, их индексную нумерацию и таблицу попарного сложения индексов:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline b_3 & c_2 & e_3 & f_2 \\ \hline b_2 & f_3 & c_1 & e_1 \\ \hline b_1 & e_2 & f_1 & c_3 \\ \hline I & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline (0,3) & (1,3) & (2,3) & (3,3) \\ \hline (0,2) & (1,2)` & (2,2) & (3,2) \\ \hline (0,1) & (1,1) & (2,1) & (3,1) \\ \hline (0,0) & (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline \hat{+} & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 0 \hat{+} 0 = 0.$$

Будем рассматривать произведение элементов (пока без учета знаков) на основе «векторного» суммирования индексов, соответствующих данным элементам. Анализ показал эффективность такого подхода. Так, например, получим правильные результаты, как прямым умножением матриц, так и сложением согласно таблице индексов:

$$a_1 \cdot b_2 = f_3,$$

$$(1,0) \hat{+} (0,2) = (1,2),$$

$$f_1 \cdot f_2 = f_3,$$

$$(3,3) \hat{+} (2,1) = (1,2)\ldots$$

Аналогично можно выполнять расчет многократных произведений. В частности, это могут быть произведения трех элементов:

$$(1,2) \hat{+} (3,2) \hat{+} (1,0) = (3,0) \Rightarrow f_3 \cdot e_1 \cdot a_1 = a_3. \ldots$$

Правильные результаты без прямого расчета матриц можно получить на основе алгоритма «визуализации»: выбора третьего элемента по паре первых, используя «тонкую» систему отношений между объектами. Отнесем элементы кватернионов к управляющим объектам, а остальные объекты будем рассматривать как второстепенные. Этот подход означает введение первичного статуса управления в системе объектов. В данном случае система имеет 2-местный статус управления. Объекты типа $(0,i)$ управляют по вертикали. Объекты типа $(i,0)$ управляют по горизонтали. Кроме этого, *введем статус места*, учитывающий расположение управляемых объектов по отношению к управляющим объектам (элементам). Произведения управляемых элементов на своей строке порождает объекты a_i. Произведения управляемых элементов по своему столбцу порождают объекты b_i. Так легко обнаруживаются смежные классы рассматриваемых кватернионов. Произведения по диагонали среди управляемых элементов порождает свои же элементы:

$$(1,3)\hat{+}(2,2)=(3,1)...$$

Аналогично выглядят произведения элементов, которые в совокупности образуют внутренний треугольник:

$$(1,2)\hat{+}(2,1)=(3,3),(2,3)\hat{+}(1,2)=(3,1)...$$

Более сложно выглядит визуализация умножения при произведении управляющих и управляемых объектов. Однако при этом сохраняется тип перемещения по базовой таблице, соответствуя стилю управляющего элемента. Так, получим соотношения

$$(0,2)\hat{+}(3,3)=(3,1),(1,0)\hat{+}(2,2)=(3,2)...$$

Мы обнаружили три принципиально важных момента, следующие из анализа таблицы произведения элементов пары кватернионов.

Во-первых, в таком множестве можно ввести статус управления и статус мест. Это наблюдение приближает привычную для нас математику к ситуациям управления. *Впервые статус мест и статус управления объединены в одно согласованное семейство.* Но ведь именно на этом основано поведение любых разумных объектов, а также динамика их подчинений и ощущений. Следовательно, мы имеем новое подтверждение идеи, что физический мир можно рассматривать как социальную систему. Математические истоки построения таких моделей наметились теперь с достаточно конструктивной полнотой. Ведь для анализа сложения индексов требуется выполнение конечной совокупности сознательных действий.

Во-вторых, сложность отношений, установленная на визуальном рассмотрении таблицы произведения элементов, оказывается иллюзорной, потому что существует более простой способ понимания результата и получения его с минимальными затратами усилий и времени. Вероятно, так может быть записана таблица произведения чисел. Другими словами, то, что очень сложно в одном подходе или алгоритме, может быть существенно более простым в другом подходе и алгоритме. Столь фундаментальная точка зрения обоснована всей практикой. Однако в данном случае важно заметить, что она инициируется иным рассмотрением стандартной таблицы умножения определенной совокупности матриц: имеет эмпирический фундамент.

В-третьих, конечная совокупность чисел $[0,1,2,3]$ на основе новой операции превращена в группу, обратные элементы которой совпадают с исходными элементами. Следовательно, индексная структура множества матриц управляется группой, утверждая закон сохранения суммы индексов: последовательная сумма индексов по каждой строке и по каждому столбцу равна индексу единичного элемента. Например

$$(0,3)\hat{+}(1,3)\hat{+}(2,3)\hat{+}(3,3)=(0,0)...$$

Это доказывает, что последовательное произведение всех элементов на любой строке, как и в любом столбце, «порождает» единичную матрицу (с точностью до знака).

Обобщена модель характеристики поля, так как при суммировании обращаются в ноль не только суммы единиц:

$$0 \hat{+} 0 = 0, 1 \hat{+} 1 = 0, 2 \hat{+} 2 = 0, 3 \hat{+} 3 = 0.$$

Формальное рассмотрение такой возможности обосновать трудно. С физической точки зрения модель выглядит просто. Примем наличие ориентированных отрезков и определенных правил их сложения. В практике физиков им соответствуют «струны» с ориентацией. Расположим систему, состоящую из струн, в форме «ёлки».

		$\leftarrow$	$\rightarrow$		
	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	
$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$

Примем правила сложения.

а) Если складываются одинаковые струны, этому соответствует их поворот друг к другу. Тогда их проекция на плоскость равна нулю. *Так могут складываться и более сложные объекты.*

б) Если складываются разные объекты, они дополняют друг друга. Однако, если установлен лимит в форме границы, за которую нельзя выйти, то струны «идут» в другом направлении и «компенсируют» друг друга.

Ничего физически необычного в этом нет. Но ситуация становится еще более интересной, если предположить, что физические системы «несут на себе» свой индекс (аналог номера). Дополним эту картину реализацией считывания информации друг о друге. Мы получаем тогда качественно новую модель взаимодействия объектов: *взаимодействие объектов обусловлено взаимными реакциями на систему их индексов.* Но тогда можно попытаться сконструировать новые физические модели, способные учитывать статус управления и статус мест, а также новые отношения между объектами.

Достаточно интересно проанализировать совокупность отношений между объектами (матрицами) по распределению знаков $(+,-)$ в таблице произведения элементов группы заполнения. Опираясь на проведенный анализ, рассмотрим иерархию управления в системе объектов. Она имеет вертикаль по оси $0y$ и горизонталь по оси $0x$. По горизонтали расположены «родственные» системы матриц, по вертикали расположены уровни иерархии систем объектов.

В рассматриваемом случае можно принять такой вариант:

3	f_i				e_i
2			c_i		
1	a_i				b_i
0			X		

.

Знаковые таблицы для кватернионов выглядят так:

$$\begin{pmatrix} \times & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & -X & - & + \\ a_2 & + & -X & - \\ a_3 & - & + & -X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \times & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & -X & + & - \\ b_2 & - & -X & + \\ b_3 & + & - & -X \end{pmatrix},$$

Интерпретируем их так: «объекты» с такой системой отношений при самовоздействии порождают «негатив». При взаимодействии друг с другом объекты a_i «порождают позитив» при условии отрицательной ориентации. Объекты b_i «порождают позитив» при условии положительной ориентации. Эти условия иллюстрируются указанными выше рисунками. Их можно рассматривать как один и тот же «треугольник», рассматриваемый с двух противоположных сторон. Так учтена дополнительность «точек зрения», а не только их противоречивость. Рассмотрим взаимное влияние данных «объектов» в рамках анализа распределения системы знаков. Получим произведения элементов вида

$$\begin{pmatrix} \times & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & - & f_3 & - \\ a_2 & - & - & f_1 \\ a_3 & f_2 & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \times & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & - & - & f_2 \\ b_2 & f_3 & - & - \\ b_3 & - & f_1 & - \end{pmatrix}.$$

		a_1		
	□		□	
a_3		$\rightarrow$		a_2

,

		b_1		
	□		□	
b_3		$\leftarrow$		b_2

.

Можно трактовать эту ситуацию так: знаковое управление подчинено законам произведения того объекта, который «находится наверху». Можно подойти иначе. Из произведений следует, что «позитивное отношение» объекты обоих семейств имеют только к семейству элементов f_i. К другим элементам при их взаимном взаимодействии их отношение отрицательное. Каково же отношение между элементами в семействе f_i? Оно задается таблицей:

$$\begin{pmatrix} \times & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & X & -f_3 & -f_2 \\ f_2 & -f_3 & X & -f_1 \\ f_3 & -f_2 & -f_1 & X \end{pmatrix}.$$

Из неё следует, что только к себе элементы f_i относятся положительно. При взаимодействии между собой они порождают подобных себе, но с отрицательным знаком. Можно предположить, что «световые матрицы» a_i, b_i при взаимодействии между собой берут на себя функцию «позитивного шефства» над множеством элементов f_i. По-видимому, у других семейств ситуация иная. Анализ показывает, что это действительно так. Рассмотрим произведения элементов множеств c_i, e_i между собой:

$$\begin{pmatrix} \times & c_1 & c_2 & c_2 \\ c_1 & X & + & + \\ c_2 & + & X & + \\ c_3 & + & + & X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \times & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & X & + & + \\ e_2 & + & X & + \\ e_3 & + & + & X \end{pmatrix}.$$

Действительно, они только позитивно влияют на себя. При взаимном влиянии друг на друга в одном семействе порождаются только плюсы. Рассмотрим влияния элементов a_i, b_i на элементы множества c_i. Получим произведения:

$$\begin{pmatrix} \times & c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & - & b_1 & - \\ a_2 & b_2 & - & - \\ a_3 & - & - & b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \times & c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & - & a_1 & - \\ b_2 & a_2 & - & - \\ b_3 & - & - & a_3 \end{pmatrix}.$$

В данном случае элементы a_i «передают» знак плюс «родственникам» b_i, а элементы b_i действуют аналогично. Это обстоятельство можно интерпретировать как «поддержку родственников», когда элементы c_i находятся на втором плане: в «подчинении». За эту «уступку» анализируемые элементы позитивно поддерживают элементы c_i в других произведениях, в которых они «управляют» ситуацией: стоят на первом месте. Получим

$$\begin{pmatrix} \times & e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & c_1 & + & + \\ a_2 & + & c_3 & + \\ a_3 & + & + & c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \times & e_1 & e_2 & e_3 \\ b_1 & c_3 & + & + \\ b_2 & + & c_2 & + \\ b_3 & + & + & c_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \times & f_1 & f_2 & f_3 \\ a_1 & c_3 & - & - \\ a_2 & - & c_2 & - \\ a_3 & - & - & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \times & f_1 & f_2 & f_3 \\ b_1 & c_1 & - & - \\ b_2 & - & c_3 & - \\ b_3 & - & - & c_2 \end{pmatrix}.$$

В таком взаимодействии «позитивное предпочтение» отдано элементам множества c_i. Элементы c_i находятся на более высоком уровне в иерархии объектов, что можно рассматривать как дополнительный фактор взаимных отношений: позитив по отношению к тем, кто «наверху». Уважение к статусу объектов в данном случае выражается знаками плюс.

$$\begin{pmatrix} \times & e_1 & e_2 & e_3 \\ c_1 & + & + & + \\ c_2 & + & + & + \\ c_2 & + & + & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \times & f_1 & f_2 & f_3 \\ c_1 & + & + & + \\ c_2 & + & + & + \\ c_2 & + & + & + \end{pmatrix}.$$

«Благодарность» стороны семейства c_i выражается в произведениях с управлением с их стороны. Теперь порождаются только плюсы. Эти пары «настроены» на позитив к элементам a_i, b_i если первыми в произведениях являются элементы множества c_i. Ситуация принципиально меняется при изменении «управления». Действительно, получим

$$\begin{pmatrix} \times & c_1 & c_2 & c_3 \\ e_1 & - & - & - \\ e_2 & - & - & - \\ e_3 & - & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \times & c_1 & c_2 & c_3 \\ f_1 & - & - & - \\ f_2 & - & - & - \\ f_3 & - & - & - \end{pmatrix}.$$

Заметим, что пара множеств e_i, f_i отдает предпочтение элементам c_i:

$$\begin{pmatrix} \times & f_1 & f_2 & f_3 \\ e_1 & c_2 & - & - \\ e_2 & - & c_1 & - \\ e_3 & - & - & c_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, знаковая группа «вносит» в множество элементов аспекты взаимодействия, похожие на взаимодействия, принятые в социальной среде. Можно ввести термин «*психология отношений»* в системе матриц. Действительно, мы на матрицах обнаружили совокупности законов, которые проявляют себя в социальной практике:

а) результат зависит от того, кто управляет и что управляется,

б) есть «родственные» связи, а также иерархический статус в данном множестве,

в) разные подмножества формируют разные смежные классы, им подчиненные,

г) итог «взаимодействия» можно рассчитывать на основе индексов матриц, без прямого их умножения друг на друга, что позволяет по-новому оценивать как объекты, так и скорости их реакций на воздействие.

Операционное «спонсорство»

При рассмотрении математических изделий желательно выделять их главные элементы, знание и понимание которых позволяет быстро и точно ориентироваться в информации. Таких главных элементов немного. Во-первых, это те или иные математические объекты: числа, матрицы, функции и т.д. С другой стороны, это некоторые операции. Их можно рассматривать как алгоритмические средства изменения объектов, той или иной их трансформации. С физической точки зрения, имеющей чаще всего экспериментальное обоснование, мы имеем дело с математическим представлением неких физических объектов и их взаимодействий. Поскольку реальность «играет» с большим семейством разнообразных объектов, они, так или иначе, находят свое выражение в математических средствах. Среди наиболее распространенных математических объектов можно выделить группу. Это множество имеет одну операцию, единичный элемент, обратные элементы и обладает ассоциативностью: $a(bc)=(ab)c$. Привычные множества могут быть более бедными по своим свойствам.

Однако для них возможно *операционное спонсорство*. Рассмотрим вариант превращения базиса трехмерного пространства в группу. Рассмотрим базис вида

0	0	0	$\to$	0
1	0	0	$\to$	1
0	1	0	$\to$	2
0	0	1	$\to$	3

.

Введем операцию на множестве:

$$a_i \hat{+} b_j = -\frac{1}{2}\pi a_i b_j + \sigma(i,j)\left(a_i + b_j\right),$$

$$\sigma(i,j) = \begin{cases} \delta_{ij}, i, j \neq 0, \\ 1, \lfloor i, j = 0 \rfloor \end{cases}$$

$$\pi = \begin{cases} ++ \Rightarrow 2, \\ =- \Rightarrow 0, \\ -- \Rightarrow (-2). \end{cases}$$

Тогда выполняются соотношения:

$$0 \hat{+} 0 = 0, 0 \hat{+} 1 = 1 \hat{+} 0 = 1, 0 \hat{+} 2 = 2 \hat{+} 0 = 2, 0 \hat{+} 3 = 3 \hat{+} 0 = 3,$$

$$1 \hat{+} (-1) = (-1) \hat{+} 1 = 0, 2 \hat{+} (-2) = (-2) \hat{+} 2 = 0, 3 \hat{+} (-3) = (-3) \hat{+} 3 = 0,$$

$$1 \hat{+} 1 = 1, 2 \hat{+} 2 = 2, 3 \hat{+} 3 = 3,$$

$$1 \hat{+} 2 = 2 \hat{+} 1 = 0, 1 \hat{+} 3 = 3 \hat{+} 1 = 0, 2 \hat{+} 3 = 3 \hat{+} 2 = 0.$$

В этом множестве есть «единица», роль которой выполняет строка с нулями, есть обратные элементы, выполняется ассоциативность. Операция на конечном множестве «породила» группу на элементах, которые не имели ранее свойств элементов группы.

Мы понимаем, что рассмотрение сложных структур и активностей возможно при усложнении применяемых в модели сложных величин и операций. С другой стороны, по одним структурам и операциям мы вправе конструировать другие структуры и операции. Операционное спонсорство в форме «дарения» своих операций от одного множества к другому множеству может быть дополнено структурным спонсорством. В этом варианте структуры одного множества «подсказывают» возможность их наличия и функционирования в другом множестве. Все указанные замечания укладываются в рамки предложенного ранее принципа софистатности структур и активностей.

Когомологии для пары объектов в форме обобщенных условий равновесия

При анализе конечной системы физических объектов на первом месте стоит задача описания влияний одного объекта на второй. Понятно, что оно содержательно и имеет смысл только при задании свойств каждого объекта. Пусть эти свойства задаются матрицами. Тогда пара объектов характеризуется величинами g_1, g_2. Пусть объекты влияют друг на друга. Определим взаимное влияние функциями $f\left(g_i\right), i=1,2$. Сформулируем модель равновесия системы влияний друг на друга. Под равновесием будем понимать, следуя Ньютону, некоторую компенсацию влияний. Так, 0-равенство

$$f\left(g_1\right)=-f\left(g_2\right)$$

есть аналог закона о равенстве и противоположной направленности «силы» действия и «силы» противодействия. Запишем его в другой форме:

$$\sigma=0 \rightarrow f\left(g_1\right)+f\left(g_2\right)=0.$$

Ситуация становится более сложной, если параметры одного объекта «смешиваются» с параметрами другого объекта. Этот вариант соответствует некоторому «общению» информационных систем в предположении, что общение может давать разный результат, зависящий от того, кто ведет диалог, какие матрицы стоят на первом месте. Тогда естественно ввести (в упрощенном варианте) функцию равновесия результатов общения вида

$$\sigma=1 \rightarrow f\left(g_1 g_2\right)+f\left(g_2 g_1\right)=0.$$

В общем случае это может быть другая функция, как-то связанная с исходным, нулевым условием равновесия. Кроме этого, есть потребность описания изменений, которые происходят с объектами вследствие взаимных влияний. Их можно задать уравнением

$$\sigma=2 \rightarrow g_1 f\left(g_2\right)+g_2 f\left(g_1\right)=0.$$

С рассматриваемой системой уравнений ассоциирована их связь между собой в форме «поперечной структуры» в модели равновесия. Для этого можно, например, просуммировать первые элементы каждого равенства, используя весовые множители $(-1)^{\sigma}$. В рассматриваемом случае получим *ассоциированное условие равновесия*

$$f\left(g_1\right)-f\left(g_1 g_2\right)+g_1 f\left(g_2\right)=0.$$

Проиллюстрируем практическую полезность этого уравнения. Рассмотрим задачу о влиянии данной пары объектов на объект, свойства которого задаются величинами $a.$ Тогда есть результат «общения» с этим объектом, заданный формулой $ga.$ Введем функцию влияния общения в форме $f\left(g\right)=ga-a.$ Тогда в рамках модели ассоциативного произведения будет выполнено *ассоциированное условие равновесия*:

$$g_1 a-a-\left(\left(g_1 g_2\right) a-a\right)+g_1\left(\left(g_2 a\right)-a\right) \equiv 0.$$

Оно не выполняется на комбинаторном произведении.

Объединение теории когомологий с физическими моделями

Когомологии привычны для математической практики более 50 лет. Речь идет об анализе систем функциональных уравнений, ассоциированных с разными множествами. В частности, это группы и алгебры. Когомологии полезны для анализа проблем расширения объектов, анализа свойств системы объектов, деформации множеств, а также их дифференцирования. Классы когомологий описываются на основе новых операций, обоснованных математически. Когомологии и их свойства достаточно широко применяются в физике. Этот подход позволяет ответить на вопросы, привычные для когомологической практики математиков, дополняя такой анализ потребностями и учетом специфики физики. Применяются модели и свойства когомологий при анализе химических, биологических, психологических объектов и их свойств.

Недавно удалось найти качественно новую связь когомологий с теорией и моделями равновесия в фундаментальной физике. Для пары объектов предложены циклические условия равновесия. Они обобщают закон равенства силы действия и силы противодействия. Он дополнен еще двумя законами. Согласно им, в расчет принимаются условия равновесия, следующие из смешения свойств объектов в форме, например. Их произведения. К этой паре добавлено изменение свойств, ассоциированное с взаимодействием. В таком варианте когомологические уравнения функционально характеризуют суммарный эффект системы равновесий. Аналогичный вариант имеет место для 3,4 и более объектов. Следовательно, когомологии могут по-новому применяться для анализа конечных систем. Речь может идти о создании классификационной модели конечных систем, а также о модели взаимодействий в таких системах.

На данной стадии анализа естественно найти связи и согласования теории когомологий с фундаментальными уравнениями и моделями фундаментальной физики. На первом месте по приложениям и значимости находится теория электромагнитных и гравитационных объектов и явлений. Поэтому направим анализ на объединение теории когомологий с теорией электромагнетизма и гравитации. Это становится возможным на основе циклических уравнений единой модели электромагнетизма и гравитации. Они получены недавно и пока проанализированы недостаточно. Однако их математическое богатство и физическая конструктивность достаточно проявили себя. Поэтому их можно применять в качестве исходного шага для объединения с общими циклическими уравнениями, из которых следуют когомологии конечных физических систем.

Рассмотрим одно циклическое уравнение для четырех объектов. Так действовать нужно по той причине, что единая модель электромагнетизма и гравитации базируется на концепции наличия четырех предзарядов, из которых конструируются все объекты и их свойства. Новым элементом пусть будет применение пары функций в циклическом уравнении. Можно, конечно, поступить иначе: функция может быть одна, но ее свойства зависят от того, какое количество объектов ассоциировано с ней. Этот тезис станет более ясным позднее.

Свойства функции, как и сами функции, могут, естественно, задаваться на основании дополнительных условий и предположений. Следовательно, циклические условия могут по-разному проявлять себя в разных разделах математики и физики, равно как и в других разделах науки. Общие циклические уравнения выступают в роли общей системы равновесий. Мы вправе по-разному их учитывать и применять на практике.

Постулируем, например, обобщенный элемент циклической алгебры для системы, состоящей из четырех объектов. Пусть он имеет вид

$$\varphi(\xi_i)\varphi(\xi_j)\,f(\xi_k,\xi_l)+\varphi(\xi_j)\varphi(\xi_k)\,f(\xi_l,\xi_i)+\varphi(\xi_k)\varphi(\xi_l)\,f(\xi_i,\xi_j)+\varphi(\xi_l)\varphi(\xi_i)\,f(\xi_j,\xi_k)=0.$$

Примем точку зрения, что величины, обозначенные символами $\xi_\alpha, \alpha = 1, 2.3...$, играют роль формальных координат, конкретизация вида которых обеспечивается набором средств, представляющих эти величины в рамках конкретной практики. Проиллюстрируем это тезис примерами.

Введем функции

$$\varphi(\xi_i) = g_i,\ f(\xi_k, \xi_l) = f(g_k, g_l).$$

В этом варианте величины $\xi_\alpha, \alpha = 1, 2.3...$ задаются системой матриц и функциями от них. Тогда получим циклическое уравнение, привычное для обобщенных моделей равновесия. Оно ассоциировано с теорией когомологий групп и алгебр и имеет вид

$$g_i g_j f(g_k, g_l) + g_j g_k f(g_l, g_i) + g_k g_l f(g_i, g_j) + g_l g_i f(g_j, g_k) = 0.$$

Введем функции, привычные для физических моделей, базирующихся на дифференциальных уравнениях для «волновых функций». Пусть

$$\varphi(\xi_i) = \partial_i,\ f(\xi_k, \xi_l) = \partial_k A_l \pm \partial_l A_k = \Phi_{kl}.$$

В данном случае применяются частные производные и физические величины, названные компонентами четырехпотенциала. Из системы циклических уравнений получим уравнения единой теории электромагнетизма и гравитации (без учета конвективных слагаемых):

$$\partial_i \partial_j \Phi_{kl} + \partial_j \partial_k \Phi_{li} + \partial_k \partial_l \Phi_{ij} + \partial_l \partial_i \Phi_{jk} = 0.$$

Действуя по аналогичной методике, мы вправе ассоциировать с когомологическим уравнением

$$g_i f(g_j) - f(g_i g_j) + f(g_i) = P$$

уравнение

$$\partial_i \partial_j S - \partial_i S \partial_j S + \partial_i S = P.$$

На данной стадии анализа понятно, что для приложений естественно рассматривать когомологические уравнения с коэффициентами, отличными от единиц. Дополнительно возможно применение разного типа проекторов, которые применяются в теории матричных уравнений. Эти условия позволят приблизить теорию когомологий к реальным практическим задачам. С другой стороны, физические модели, ассоциированные с уравнениями для когомологий, могут расширить и уточнить теоретические следствия и модели когомологий.

Сейчас понятно, что практические приложения моделей когомологий представлены двумя классами моделей. Один класс моделей инициируется системой когомологических уравнений. Другой класс моделей инициируется системой циклических уравнений, задающих обобщенные условия равновесия.

Понятно также, что модели когомологий, а также модели систем циклических уравнений можно применять в задачах химии, биологии, психологии, социологии. Построение моделей единого описания физических тел, тел сознаний и тел чувств может базироваться на тех следствиях, которые вытекают из применения на практике моделей когомологий и систем циклических уравнений.

Представим в форме циклических уравнений уравнения механики идеальной жидкости. Они соответствуют алгоритму учета конвективных слагаемых для физических моделей. Тогда матричные уравнения, посредством которых они описываются, содержат компоненты скоростей, частные производные, элементы группы заполнения, волновые функции, представленные в матричном виде. Циклические уравнения можно записать так:

$$(\varphi(\xi_i)\psi(\xi_j)\,f(\xi_k,\theta(\xi_l))+\varphi(\xi_j)\psi(\xi_k)\,f(\xi_l,\theta(\xi_i))+$$

$$\varphi(\xi_k)\psi(\xi_l)\,f(\xi_i,\theta(\xi_j))+\varphi(\xi_l)\psi(\xi_i)\,f(\xi_j,\theta(\xi_k)))P=\sigma_{ijkl},$$

$$\varphi(\xi_i)\to u_i,\psi(\xi_j)\to\partial_j,\,f(\xi_k,\theta(\xi_l))\to a_k\left(a_p u^p \Pi_l\right),$$

$$\sigma_{ijkl}=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},a_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}...,\Pi_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}...$$

Мы предложили единую модель объектов и явлений, которые «внешне» кажутся принципиально разными. Это возможно благодаря новой модели равновесия, естественно согласующейся с единой моделью электромагнетизма и гравитации. Сейчас требуется провести детальный анализ новых возможностей и вариантов в теории и на практике. Когомологии соединены с физическими моделями.

Новые горизонты науки не только «видны», они естественны и доступны для применения. По этой причине допустимо расширить и углубить применение когомологий на практике.

Сопоставим элементы циклических алгебр, когомологических алгебр и функциональных алгебр, к которым мы относим физические модели. Они имеют вид

……….

$$\partial_i\partial_j\Phi_{kl}+\partial_j\partial_k\Phi_{li}+\partial_k\partial_l\Phi_{ij}+\partial_l\partial_i\Phi_{jk}=0.$$

$$g_i g_j f(g_k,g_l)+g_j g_k f(g_l,g_i)+g_k g_l f(g_i,g_j)+g_l g_i f(g_j,g_k)=0.$$

$$\varphi(\xi_i)\varphi(\xi_j)\,f(\xi_k,\xi_l)+\varphi(\xi_j)\varphi(\xi_k)\,f(\xi_l,\xi_i)+\varphi(\xi_k)\varphi(\xi_l)\,f(\xi_i,\xi_j)+\varphi(\xi_l)\varphi(\xi_i)\,f(\xi_j,\xi_k)=0.$$

…………………..

Примем точку зрения, что система циклических уравнений образует «корневую систему» дерева науки. В нем когомологические алгебры образуют ствол этого дерева. В нем физические уравнения образуют ветви этого дерева. Практические приложения, представленные системой точек в верхней части совокупности формул, есть плоды этого дерева.

За системой точек, представленной внизу совокупности формул, скрыты аксиоматические и эмпирические основания для конструирования циклических уравнений и их конкретизаций.

Фундаментальный статус знаковой группы

Знаковая группа вида долгое время находилась в «тени», хотя её роль и значение особо важны в физике. В четырехмерии она содержит, по сумме плюсов и минусов, положительные и отрицательные «объекты», хотя большинство из них нейтральны:

$$\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\-\\-\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\-\\+\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\+\\+\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\+\\-\\+\end{pmatrix}.$$

Знаковая группа применяется в разных представлениях.

Первое представление задается указанными выше столбцами, которые содержат знаки плюс и минус, к которым применяется стандартное правило произведения знаков. Их размерность определяется размерностью матриц, которые они меняют. Эта группа коммутативна. На её основе стандартным образом конструируется система групповых алгебр. Произведение знаковой группы на матрицы задается аналогом произведения Даламбера: знак влияет на элементы строки преобразуемой матрицы. Это произведение также коммутативно.

Другое представление получается при представлении знаковой группы диагональными матрицами, по диагонали которой расположены знаки плюс и минус. В этом случае мы снова получаем коммутативную группу. Она коммутативно меняет матрицы соответствующей размерности в соответствии с правилами матричного произведения. Комбинаторное произведение в данном случае некоммутативно. Другими словами, знаковая группа «чувствительна» к произведению. Заметим, что произведение матриц, содержащих некоторые элементы, на знаковую матрицу, относится к категории «структурных гибридов», так как в алгоритме применяются качественно разные элементы.

Ситуацию можно «исправить», заменив в диагональных матрицах знаковой группы сами знаки на единицы с соответствующими знаками, что косвенно использовалось ранее. Этот вариант задает третье представление знаковой группы. Обычно оно применяется в физике и математике как элемент некоторой приведенной метрики:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\ldots$$

Фундаментальная значимость знаковой группы проявляет себя в физике. Так, группа перестановок Клейна для четырёх объектов после действия знаковой группы расширяется до группы заполнения физических моделей в четырехмерном пространстве. На этой основе удобно задать уравнения электродинамики и массодинамики. Более того, в таком виде обнаруживается «подсказка» к объединению электромагнетизма и гравитации, так как обе эти модели конструируются на одной группе, но на разной системе подгрупп.

На основе группы заполнения задается матричная алгебра. По этой причине мы можем записать любую матричную модель на основе элементов группы заполнения. Перестановки, объединенные с системой знаков, косвенно указывают на *фундаментальные составляющие любого физического объекта*: у него есть что переставлять, в его структуре есть положительные и отрицательные объекты. Более того, поскольку большинство матриц имеют структуру, скомпенсированную по знакам, то и физические объекты могут иметь структуру, скомпенсированную по знакам.

Группа заполнения физических моделей содержит элементы, которые отличаются друг от друга тем, что их можно умножить на минус единицу. Это обстоятельство «открывает» новую грань физических моделей: мы можем применять разные матричные формы одних и тех же уравнений, меняя четырехметрику, которая объединяет матрицы.

Уравнения вида

$$\left(g^{ij}\left(\pm\right)a_i\left(\pm\right)\partial_j + r^{ij}\left(\pm\right)b_i\left(\pm\right)\partial_j\right)\Phi = 0$$

могут дать как одну и ту же систему уравнений, так и другие варианты. При формальном подходе к этой ситуации мы можем говорить об инвариантности физической модели относительно действия знаковой группы. Однако не исключена другая точка зрения: *знаковая группа представляет спектр моделей*, не все из которых «охватывают» приборы. Для исследования спектра моделей требуется спектр приборов. Следовательно, знаковая группа приоткрывает новые грани информации о любом явлении, не исключая те варианты, которые уже доступны приборам и методике эксперимента. В частности, заметим, что стандартные метрики вида

$$g^{ij} = diag\left(1,1,1,1\right), r^{ij} = diag\left(1,1,1,-1\right)$$

евклидовы в трехмерии. Знаковая группа порождает другие метрики, которые неевклидовы в трехмерии. Более того, если дать ей «свободу», она представляет также качественно новые системы уравнений. Мы можем говорить о «знаковой деформации» физических моделей. Тогда те модели, которые согласуются с экспериментом, можно рассматривать как *базовые элементы для конструирования спектра моделей*, ассоциированных с действиями знаковой группы.

Знаковая группа может иметь прямое отношение к анализу информации и психологических состояний. Действительно, практика показывает, что с ростом некоторых плюсов в информации, отношениях, условиях жизни и т.д. появляются некоторые минусы, которые их «уравновешивают». Условие знакового равновесия привычно для физической, химической, социальной практик. Так, атомы нейтральны в нормальном состоянии по электрическому заряду. Так, чем больше действительно умных людей в социуме, меняющих в лучшую сторону условия жизни, тем больше появляется людей пассивных и глупых, паразитирующих на этом. Но почти всегда, почти основная масса нейтральна и «невидима», не проявляет себя. Аналогичные свойства имеет знаковая группа, выступая в роли математического аналога социального объекта.

Система циклических уравнений, эффективно проявившая себя в объединенной модели электромагнетизма и гравитации, в теории гомологий и когомологий, дает качественно другие результаты при замене суммирования на вычитание. Так, решения различны для данной пары систем уравнений:

$$\begin{aligned} &\partial_k\partial_l F_{mn} + \partial_l\partial_m F_{nk} + \partial_m\partial_n F_{kl} + \partial_n\partial_k F_{lm} = 0, \\ &\partial_k\partial_l F_{mn} - \partial_l\partial_m F_{nk} + \partial_m\partial_n F_{kl} - \partial_n\partial_k F_{lm} = 0. \end{aligned}$$

Этот факт понятен и естественен. Фундаментальное различие в алгоритмах «дать» и «взять» обеспечивается знаковой группой.

Все указанные и другие обстоятельства свидетельствуют, что знаковой группе, как это было ранее сделано для группы перестановок, можно придать статус *фундаментальной группы физического моделирования.*

Новые операционные свойства физических моделей

Моделирование физических объектов и явлений на основе системы математических операций актуально для современной практики. Новые операции дополняют ассоциативные модели спектром неассоциативных сторон и свойств. С алгебраической точки зрения неассоциативность оценивается и управляется ассоциаторами. Тогда не равны нулю не только тензор кручения B^i_{jk} для анализируемых «векторов», но и тензор кривизны B^i_{jkl} :

$$\left(a,b\right)^i = B^i_{jk} a^j b^k, \left(a,b,c\right)^i = B^i_{jkl} a^j b^k c^l.$$

Речь идет о физическом анализе более «богатых» ситуаций: анализе информационных потоков, а также социальных и психологических проблем.

Заметим специфику соотношения системы матричных и комбинаторных операций в их отношении к ассоциативности. С формальной точки зрения возможны операции произведения столбцов на столбцы, столбцов на строки и т.д. Получим четыре типа операций. Анализ матриц размерности 2×2 показал дополнительность действия матричных и комбинаторных операций. Обозначим знаком плюс ассоциативное произведение, а знаком минус обозначим неассоциативное произведение.

Выполняются такие законы:

а) в системе матричных произведений ассоциативные и неассоциативные произведения «скомпенсированы» друг с другом,

б) в системе комбинаторных произведений ассоциативные и неассоциативные произведения «скомпенсированы» друг с другом,

в) в совокупности матричных и комбинаторных произведений ассоциативные и неассоциативные произведения «скомпенсированы» друг с другом.

Таблица ассоциативности системы матричных произведений такова:

$\overset{m}{\times}$	*столбец*	*строка*
столбец	$-$	$+$
строка	$+$	$-$

Таблица ассоциативности системы комбинаторных произведений такова:

$\overset{k}{\times}$	*столбец*	*строка*
столбец	$+$	$-$
строка	$-$	$+$

Следовательно, в системе операций есть **операторное равновесие по условию ассоциативности**. Эта *новая форма равновесия* интересна в философском и методологическом смысле.

Теория когомологий строится обычно на ассоциативных операциях. По этой причине важно рассмотреть модели и приложения неассоциативных когомологий. Кроме этого, по-разному «компонуя» уравнения равновесия, ассоциированные с введенными ранее условиями равновесия, мы вправе рассмотреть несимметрийные когомологии, дополняя анализ спектром новых операций. Есть также вариант анализа нестандартных когомологий, вытекающих из частных, дополнительных условий.

Ассоциативность и неассоциативность дополнительны на системе операций. Например, матрицы, применяемые в структуре сигруппы Галилея-Лорентца, подчинены закону

$$(xy)y^2 = (xy^2)y.$$

Он выполняется для ассоциативных матричных произведений и неассоциативных комбинаторных произведений. Для неассоциативных матричных произведений и ассоциативных комбинаторных произведений выполняется коммутативный закон

$$(yx)y^2 = y^2(yx).$$

Заметим, что наличие спектра операций позволяет ввести в рассмотрение гибридные операции, когда часть одной матрицы «взаимодействует» с частью другой матрицы по одному правилу, а другая часть «взаимодействует» с оставшейся частью другой матрицы по другому правилу. Так, при произведении матриц с размерностью четыре, первые две строки могут «взаимодействовать» с парой первых столбцов комбинаторно, а две другие строки – по матричной операции. Возможно также разное произведение некоторых выборок элементов. Оно может быть полезным при решении нелинейных задач. Фактически речь идет об исследовании возможностей спектра «гибридных» операций.

«Гибридные» операции могут быть применены при анализе взаимодействия нелокальных объектов. В простейшем случае мы принимаем допущение, что начало, середина и конец одного объекта взаимодействуют с началом, серединой и концом другого объекта по одному закону. Это не соответствует действительности. Примером могут быть боевые искусства, в которых есть разные удары и разные отношения к разным частям тела. Принимая софистатность (трансфинитное соответствие) физических тел и тел информации, мы вправе предположить, что начало, середина, окончание информации воспринимаются и оцениваются по-разному. Это восприятие и оценка зависят от ряда дополнительных факторов, что необходимо учитывать при моделировании. На этом этапе анализа понятно, что приборы могут «косвенно» воспринимать информацию и «осредненно» передавать её. Более того, приборы и методики измерения могут стать сдерживающими факторами в развитии практики. Возможности любого измерительного объекта ограничены. Эти обстоятельства следует корректно учитывать и использовать.

Операции могут зависеть от уровня материи, на котором проводится практика. Рассмотрим в этой связи возможность трансфинитного расширения моделей света и гравитации. Мы приняли возможность описания света и гравитации «векторами» в форме четырехпотенциалов A_k. Они могут быть записаны через четырехскорости материи более глубокого уровня, но они могут зависеть также от совокупности материи других уровней. Есть, в частности, такие возможности:

$$A_k = \sum_i \sigma_{kp}(i)u^p(i) + \kappa_{kp}(i)\dot{u}^p(i),$$
$$A_k = \sigma_{kps}B^p u^s = \sigma_{kps}(l-2,l-1,l)\kappa_{pr}(l-2,l-1)u^r(l-2)u(l-1)...$$

Вклады в четырехпотенциал характеристик разных уровней материи трансфинитны. Их можно анализировать в рамках формальной теории. Особо важны «подсказки», достаточные для верификации практики. Дополнительную роль берут на себя *ускорения и другие ранговые движения*, так как они свойственны материи любого уровня.

На стадии начального анализа важно учесть *возможность действия разных операций на разных уровнях материи*. Таковы новые условия построения и анализа трансфинитной механики.

К механике света и гравитации

Актуальна задача анализа и приложений *механики света и гравитации.* Начальный подход к моделям такого типа реализован в форме механики жидкости. Но тогда открывается *возможность существования разных фазовых состояний света и гравитации.* У света и гравитации, в соответствии с принципом софистатности физических объектов, могут быть состояния и свойства «газов», «плазмы», «твердых тел».

Эти проблемы естественно изучать в рамках дифференциального расширения уравнений электродинамики, на основе которого реализуется объединение электромагнетизма и гравитации. Оно основано на дифференцировании проекций векторных уравнений электродинамики по координате, отсутствующей в данной системе уравнений и дополнении этих уравнений суммой выражений, тождественно равных нулю. В матричном виде дифференцированию уравнений соответствует произведение матричных уравнений слева на матрицу вида

$$\begin{pmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_\tau \end{pmatrix}.$$

При этом волновые функции непосредственно задаются дифференциальными матричными уравнениями на основе четырехпотенциала.

Скомпенсированной структуре векторного вида $\partial_k\partial_l\partial_m A_n - \partial_k\partial_l\partial_m A_n = 0$ в матричном виде соответствует выражение

$$\begin{pmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_y \\ A_z \\ A_\tau \\ A_x \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_y \\ A_z \\ A_\tau \\ A_x \end{pmatrix} = 0.$$

Понятно, что такая запись единых уравнений *допускает спектр уравнений и состояний*, если в рассматриваемой системе, состоящей из трех указанных выше звеньев, ввести разные операции для матричных произведений.

Такой подход на данной стадии формален. Однако в нём может быть смысл, соответствующий сложным трансфинитным условиям, в которых могут находиться свет и гравитации. Эти и другие обстоятельства «скрыты» в стандартной механике, применяющей одну систему операций и проводящей анализ на одном уровне материи, так как при этом *не учитывается наличие разных уровней материи и возможность действия разных операций на них*.

Из уравнений Фарадея-Ампера на основе их дифференциального продолжения ранее получена система циклических уравнений для «полей»

$$\partial_k\partial_l\Phi_{mn} - \partial_l\partial_m\Phi_{nk} + \partial_m\partial_n\Phi_{kl} - \partial_n\partial_k\Phi_{lm} = 0.$$

Она допускает решения в форме суммы антисимметричного и симметричного тензоров, зависящих от пары четырехпотенциалов:

$$F_{mn}(q)=\partial_m A_n(q)-\partial_n A_m(q), B_{mn}(m)=\partial_m A_n(m)-\partial_n A_m(m).$$

Данная система уравнений сложна по своим математическим свойствам и имеет специфические элементы, которые ранее не анализировались нами. Однако этот шаг недостаточен для анализа «полной» ситуации. Действительно, в электродинамике дополнительно используются уравнения для индукций, а также связи между полями и индукциями. В итоге такого объединения получаются уравнения для четырехпотенциалов электромагнитного поля

$$\Omega^{km}(q)\partial_k\partial_m A_p(q)=s_p(q),$$
$$\Omega^{km}(q)\partial_k A_m(q)=0.$$

Их решения существенно зависят от структуры «метрики взаимодействия» $\Omega^{km}(q)$. На этой основе ранее была предложена *гипотеза, что так задаются тела (поля), чувства (связи между полями и индукциями), сознание (индукции).* Другими словами, свет через свои уравнения «показывает» структуру любых уравнений для объектов: они триедины. По этой причине требуется триединое расширение любых физических моделей.

Принимая модель единства электромагнетизма и гравитации, мы вправе принять новые индукции

$$H^{ik}(m)=\sum_r \chi_r^{ikps}(m)F_{ps}^r(m),$$

уравнения для индукций гравитации, аналогичные уравнениям для электромагнетизма, а также связь между полями и индукциями. Тогда, приняв уравнения в форме закона сохранения

$$\partial_i H^{ik}(m)=s^k(m),$$

Получим обобщенные уравнения гравитации (без учета выражений, аналогичных конвекционным составляющим механики):

$$\Omega^{km}(m)\partial_k\partial_m A_p(m)=s_p(m),$$
$$\Omega^{km}(m)\partial_k A_m(m)=0.$$

Они аналогичны уравнениям Фарадея-Ампера, рассмотренным ранее. В этом варианте гравитация представлена симметричным тензором, зависящим от четырехпотенциала гравитации в форме матричных уравнений:

$$\gamma^{km}(m)\partial_k\partial_m A_p(m)=s_p(q),$$
$$\gamma^{km}(m)\partial_k A_m(m)=0.$$

Матрицы выражены через антикватернионы группы заполнения физических моделей. Уравнения электродинамики задаются на основе кватернионов этой же группы.

Различие динамик состояний и динамик процессов

Общая точка зрения состоит в том, что состояние можно рассматривать как стадию или элемент процесса. Следовательно, состоянию можно поставить в соответствие некоторое фиксированное значение параметра, характеризующего процесс. С другой стороны, процесс есть согласованная система состояний. Следовательно, с симметрийной точки зрения, процессу присуща симметрия более высокого порядка, состояние есть сужение симметрии. Поэтому различие состояний и процессов, как и их динамик, относится к категории деформации симметрий. Поскольку симметрии принято анализировать на основе одной операции (группы, квазигруппы, лупы…) или пары операций (разные алгебры…), мы можем принять терминологию $k-$симметрии или, иначе, симметрию $k-$ уровня. Тогда следует анализировать деформацию $k-$симметрии или деформации $k-$ уровня симметрии. Если, например, мы анализируем явление на основе группы, речь идет о деформации уровня 1 симметрии, при анализе алгебры речь идет о деформации уровня 2 симметрии. В данном случае уровень симметрии задается количеством используемых операций. Понятно, что значительно более сложными будут структуры, ассоциированные с большим количеством операций. Согласование в одном множестве операции сложения, а также матричной и комбинаторной операций существенно усложняет задачи. При использовании только матричной и комбинаторной операции получаются множества с принципиально новыми свойствами. Поскольку известно 4 матричных и 4 комбинаторных операций, получим $C_8^2 = 28$ возможностей моделирования. Понятно, что появятся принципиально новые следствия.

Их проверка не всегда возможна эмпирически, так как приборы и методики измерения могут не «охватывать» анализируемую ситуацию. Приборы могут быть «приспособлены» к одному уровню материи, а исследуемые объекты и явления могут «показывать» на этом уровне только часть информации или давать её деформированный образ. Чем и как их дополнить? Следовательно, меняются критерии верификации практики: у расчета и эксперимента может быть новое соотношение и новая пропорция. В чем-то более совершенен расчет, в чем-то более совершенен эксперимент. Однако возможны и такие ситуации, когда эксперимент и расчет дают *принципиально разные, но дополнительные результаты.*

Расширение числа параметров задачи, как и расширение числа применяемых математических операций, имеет смысл с математической точки зрения, так как «открывает» новые структуры и активности, а также спектр их свойств. Такой подход имеет смысл с физической точки зрения, когда обнаруживаются экспериментальные данные, которые не укладываются в рамки стандартных моделей и стандартной математики. Понятно, что двигателем развития симметрий и их деформаций являются как математика, так и физика в широком смысле этого слова. Химия, биология, психология подчинены аналогичным зависимостям от свойств симметрий и их деформаций. С учетом новых обстоятельств нужно по-новому решать задачи управления, так как появляются новые средства для реализации управлений, обеспечивающих достижение новых целей. Аналогичное замечание справедливо при коррекции привычек и устойчивого поведения. У данных качеств есть свои законы развития, деформации, управления. Их анализ может позволить предсказывать катастрофы структур и активностей, а также эффективные алгоритмы коррекции привычек и поведения. Речь идет, скорее, не только об изменении внешних условий и обстоятельств, но, прежде всего, об изменении отношений к ним, которые следует считать внутренними условиями и обстоятельствами. Ведь у каждого объекта есть внешнее и внутреннее управление. Таковы же симметрии и их деформации.

Понятно, что состояния и динамика могут и должны описываться локальными и нелокальными, линейными и нелинейными законами, состав и согласование которых составляет предмет искусства и коррекции.

Перспективы сознательного поиска истины

Трансфинитность ошибок предполагает возможность достижения истины на ошибочном пути или через «серию» ошибок. Трансфинитность истины «разрешает» вариант достижения ложного результата на правильном пути или через «серию» ступеней истины. Софистатность истины и заблуждений не должна пугать исследователя. Ведь *в каждой ошибке есть доля истины, а в каждой истине есть доля ошибки.*

Если бы Истина достигалась только средствами Сознания, исследовать её было бы проще. Однако в исследовании всегда присутствуют Чувства. Они также трансфинитны и потому могут быть и правильными и ложными. Они способны повлиять на принятие решений, на выбранные средства достижения Истины, на оценку полученных результатов. Указанные элементы практики могут быть подчинены авторитарным или неестественным Чувствам. Тогда ситуация становится более сложной. Учёт трансфинитности Сознаний и Чувств делает задачу достижения истины ещё более сложной. Однако, принимая свою софистатность Вселенной, мы не только можем принять эту сложность. Мы обязаны это сделать, если желаем достичь более высокого уровня развития и совершенства практики во Вселенной.

Полнота исследования всегда ограничена нашей практикой и применяемыми средствами анализа. Аналогично структуры и активности всегда познаются частично. Эта «частичность» может быть применена как методологический прием анализа. В частности, можно принять аналогию принципиально различных структур и активностей. В частности, нелокальные свойства могут быть описаны локальными средствами. Нелинейные стороны и свойства имеют в себе линейные стороны и свойства. Неассоциативность может иметь аналогию с ассоциативностью. Многоуровневые объекты могут моделировать одноуровневыми объектами. Есть и другие грани приведенных выше соответствий. В равной степени допустимы и обратные формулировки. Например, линейные свойства софистатны нелинейным свойствам. В частности, *у прекрасных идей может быть непривычная, и даже неестественная, реализация*. Она, с одной стороны, не позволяет идее широко проявит себя, с другой стороны, привлекает к себе своей непривычностью и «неестественностью». Так проявила себя на практике неевклидова геометрия, специальная теория относительности, теория гравитации Ньютона, электродинамика Максвелла в кватернионной форме. Отсюда не следует, что необходимо конструировать непривычные и неестественные реализации. Просто следует понять, что такой вариант практика не исключает.

Рассмотрим примеры. Так, правило «дифференцирования» вида

$$f\left(g_1 g_2\right)=f\left(g_1\right)g_2+g_1 f\left(g_2\right)$$

Ассоциировано с неоднородным уравнением для 2-когомологий

$$f\left(g_1 g_2\right)-g_1 f\left(g_2\right)-f\left(g_1\right)=f\left(g_1\right)(g_2-I).$$

С другой стороны, уравнение

$$f\left(g_1 g_2\right)-g_1 f\left(g_2\right)-f\left(g_1\right)=0$$

ассоциировано, в варианте ассоциативного произведения, с функцией

$$f\left(g\right)=ga-a.$$

Деформация дистрибутивности

Дистрибутивность чисел привычна и естественна для практики. Она базируется на законе

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

дополненном условием коммутативности

$$a+b=b+a.$$

Ситуация меняется с принятием концепции активных гиперкомплексных чисел, которые в новой трактовке ассоциированы с физическими объектами и системой их свойств. В этом случае одно число в сумме становится ведущим, а второе – ведомым. Ведущие и ведомые числа могут меняться по-разному при использовании разных операций сложения. Такой вариант естественен с физической точки зрения, выражая возможности изменения объектов при их превращении в некий новый объект. В этом подходе можно выразить условия взаимного «подчинения», специфику информационного обмена, тонкости внешних условий или внутренних обстоятельств объектов. Ситуация становится математически конструктивной, когда в роли чисел применяются матрицы. Спектру матричных и комбинаторных произведений естественно сопоставить спектр аддитивных операций. Истоки построения такого спектра операций есть в формальном подходе, однако они имеют место также в законах взаимодействия физических объектов. С формальной точки зрения мы вправе принять подход, согласно которому объекты как-то меняются до аддитивной операции. Только после таких изменений «в дело» вступает стандартная математическая операция. Понятно, что в более общем случае аддитивность может базироваться на других операциях. В более простом случае меняется только ведомый (второй) объект, а аддитивность задается обычным способом. Изменения объектов могут быть самые разные. Их можно разбить на классы в соответствии с механизмами изменения. Для иллюстрации ограничим анализ матрицами размерности $2\times 2.$ Укажем некоторые классы изменений.

Класс 1. Сдвиговая деформация матриц.

Она соответствует алгоритму перемены строк или столбцов. Например. Получим

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ a_4 & a_3 \end{pmatrix} \ldots$$

Для матриц с высокой размерностью числа и характеры деформаций более сложны. С физической точки зрения «объекты» готовят себя к «взаимодействию».

Класс 2. Поворотная деформация матриц.

Она соответствует, например, транспонированию по главной или второстепенной диагонали. Получим

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Класс 3. Гибридная деформация матриц.

Она соответствует выполнению совокупности деформаций из одного класса деформаций или из разных классов деформаций. Например, это может быть «соединение» сдвиговой и поворотной деформаций. Так, получим

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{pmatrix}$$

Класс 4. Локальная деформация матриц.

Она соответствует изменению одного или нескольких элементов ведущих или ведомых матриц. При этом изменения могут быть подчинены дополнительно динамическим законам.

Эти и другие деформации индуцируют **проблему**: как меняется дистрибутивность при деформациях матриц, каким законам подчинены деформации дистрибутивности?

Зеркальная коммутативность пар элементов

Рассмотрим пример сдвиговой деформации для матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Применим операцию перемены строк. Тогда

$$a \overset{*}{+} b = \begin{pmatrix} a_1 + b_3 & a_2 + b_4 \\ a_3 + b_1 & a_4 + b_2 \end{pmatrix}, c \overset{*}{+} d = \begin{pmatrix} c_1 + d_3 & c_2 + d_4 \\ c_3 + d_1 & c_4 + d_2 \end{pmatrix},$$

$$b \overset{*}{+} a = \begin{pmatrix} b_1 + a_3 & b_2 + a_4 \\ b_3 + a_1 & b_4 + a_2 \end{pmatrix}, d \overset{*}{+} c = \begin{pmatrix} d_1 + c_3 & d_2 + c_4 \\ d_3 + c_1 & d_4 + c_2 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\left(a \overset{*}{+} b \right) \overset{*}{+} \left(c \overset{*}{+} d \right) = \begin{pmatrix} a_1 + b_3 + c_3 + d_1 & a_2 + b_4 + c_4 + d_2 \\ a_3 + b_1 + c_1 + d_3 & a_4 + b_2 + c_2 + d_4 \end{pmatrix} = \left(d \overset{*}{+} c \right) \overset{*}{+} \left(b \overset{*}{+} a \right).$$

Следовательно, сдвиговая деформация ассоциирована с зеркальной коммутативностью пар (элементы пары меняются местами зеркально относительно знака равенства).

Применим для исходных элементов поворотную деформацию относительно главной диагонали. Тогда

$$a \overset{*}{+} b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_3 \\ a_3 + b_2 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}, c \overset{*}{+} d = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 & c_2 + d_3 \\ c_3 + d_2 & c_4 + d_4 \end{pmatrix},$$

$$b \overset{*}{+} a = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 & b_2 + a_3 \\ b_3 + a_2 & b_4 + a_4 \end{pmatrix}, d \overset{*}{+} c = \begin{pmatrix} d_1 + c_1 & d_2 + c_3 \\ d_3 + c_2 & d_4 + c_4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(a \overset{*}{+} b \right) \overset{*}{+} \left(c \overset{*}{+} d \right) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 & a_2 + b_3 + c_3 + d_2 \\ a_3 + b_2 + c_2 + d_3 & a_4 + b_4 + c_4 + d_4 \end{pmatrix} = \left(d \overset{*}{+} c \right) \overset{*}{+} \left(b \overset{*}{+} a \right).$$

Поворотная деформация подчинена закону, аналогичному закону для сдвиговой деформации. В обоих указанных случаях *нарушается коммутативный закон* для пар:

$$\left(a\overset{*}{+}b\right)\overset{*}{+}\left(c\overset{*}{+}d\right)\neq\left(c\overset{*}{+}d\right)\overset{*}{+}\left(a\overset{*}{+}b\right).$$

Закон для гибридной деформации

Рассмотрим двойную деформацию ведомых матриц. Пусть на первом этапе матрицы меняют строки, а на втором этапе новая матрица деформируется. Получим преобразование вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^*.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} b_3 & b_1 \\ b_4 & b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}^*,\begin{pmatrix} c_3 & c_1 \\ c_4 & c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}^*,\begin{pmatrix} d_3 & d_1 \\ d_4 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}^*.$$

Получим

$$a\overset{*}{+}b=\begin{pmatrix} a_1+b_3 & a_2+b_1 \\ a_2+b_4 & a_4+b_2 \end{pmatrix},c\overset{*}{+}d=\begin{pmatrix} c_1+d_3 & c_2+d_1 \\ c_3+d_4 & c_4+d_2 \end{pmatrix},$$
$$b\overset{*}{+}a=\begin{pmatrix} b_1+a_3 & b_2+a_1 \\ b_3+a_4 & b_4+a_2 \end{pmatrix},d\overset{*}{+}c=\begin{pmatrix} d_1+c_3 & d_2+c_1 \\ d_3+c_4 & d_4+c_2 \end{pmatrix},$$
$$(c\overset{*}{+}d)^*=\begin{pmatrix} c_3+d_4 & c_1+d_3 \\ c_4+d_2 & c_2+d_1 \end{pmatrix},(b\overset{*}{+}a)=\begin{pmatrix} b_3+a_4 & b_1+a_3 \\ b_1+a_2 & b_2+a_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует нарушение закона зеркальной коммутативности пар:

$$\left(a\overset{*}{+}b\right)\overset{*}{+}\left(c\overset{*}{+}d\right)=\begin{pmatrix} a_1+b_3+c_3+d_4 & a_2+b_1+c_1+d_3 \\ a_3+b_4+c_4+d_2 & a_4+b_2+c_2+d_1 \end{pmatrix}\neq\left(d\overset{*}{+}c\right)\overset{*}{+}\left(b\overset{*}{+}a\right).$$

В данном случае

$$a\overset{*}{+}c=\begin{pmatrix} a_1+c_3 & a_2+c_1 \\ a_2+c_4 & a_4+c_2 \end{pmatrix},b\overset{*}{+}d=\begin{pmatrix} b_1+d_3 & b_2+d_1 \\ b_3+d_4 & b_4+d_2 \end{pmatrix},(b\overset{*}{+}d)^*=\begin{pmatrix} b_3+d_4 & b_1+d_3 \\ b_4+d_2 & b_2+d_1 \end{pmatrix}.$$

Мы получили закон скрытой коммутативности:

$$\left(a\overset{*}{+}b\right)\overset{*}{+}\left(c\overset{*}{+}d\right)=\left(a\overset{*}{+}c\right)\overset{*}{+}\left(b\overset{*}{+}d\right).$$

Согласно этому закону «внешние» элементы произведения пар остаются на своих местах, а «внутренние» элементы произведения пар меняются местами. Такой закон сложнее закона зеркальной коммутативности пар. Это следствие согласуется с логическим пониманием факта, что более сложной деформации соответствует более сложный закон, который ее описывает.

Рассмотрим гибридную деформацию в обратном порядке: сначала выполняется трансформация ведомых матриц, а затем проводится перестановка строк новой матрицы. Тогда

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^*,$$

$$\begin{pmatrix} b_2 & b_4 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix} c_2 & c_4 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix} d_2 & d_4 \\ d_1 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}^*.$$

$$a \overset{*}{+} b = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 & a_2 + b_4 \\ a_3 + b_1 & a_4 + b_3 \end{pmatrix}, c \overset{*}{+} d = \begin{pmatrix} c_1 + d_2 & c_2 + d_4 \\ c_3 + d_1 & c_4 + d_3 \end{pmatrix}, (c \overset{*}{+} d)^* = \begin{pmatrix} c_2 + d_4 & c_4 + d_3 \\ c_1 + d_2 & c_3 + d_1 \end{pmatrix},$$
$$a \overset{*}{+} c = \begin{pmatrix} a_1 + c_2 & a_2 + c_4 \\ a_3 + c_1 & a_4 + c_3 \end{pmatrix}, b \overset{*}{+} d = \begin{pmatrix} b_1 + d_2 & b_2 + d_4 \\ b_3 + d_1 & b_4 + d_3 \end{pmatrix}, (b \overset{*}{+} d)^* = \begin{pmatrix} b_2 + d_4 & b_4 + d_3 \\ b_1 + d_2 & b_3 + d_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует нарушение закона зеркальной коммутативности пар:

$$\left(a \overset{*}{+} b \right) \overset{*}{+} \left(c \overset{*}{+} d \right) = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 + c_2 + d_4 & a_2 + b_4 + c_4 + d_3 \\ a_3 + b_1 + c_1 + d_2 & a_4 + b_3 + c_3 + d_1 \end{pmatrix} \neq \left(d \overset{*}{+} c \right) \overset{*}{+} \left(b \overset{*}{+} a \right).$$

В данном случае получается аналогичный закон скрытой коммутативности:

$$\left(a \overset{*}{+} c \right) \overset{*}{+} \left(b \overset{*}{+} d \right) = \left(a \overset{*}{+} b \right) \overset{*}{+} \left(c \overset{*}{+} d \right).$$

Следовательно, закон для гибридной операции *инвариантен относительно порядка* проведения операций.

Дистрибутивность на операциях деформации ведомых матриц

Рассмотрим проблему дистрибутивности на парах элементов, применяя операцию перемены строк у ведомых матриц. Получим суммы

$$a \overset{*}{+} b = \begin{pmatrix} a_1 + b_3 & a_2 + b_4 \\ a_3 + b_1 & a_4 + b_2 \end{pmatrix}, c \overset{*}{+} d = \begin{pmatrix} c_1 + d_3 & c_2 + d_4 \\ c_3 + d_1 & c_4 + d_2 \end{pmatrix}, e \overset{*}{+} f = \begin{pmatrix} e_1 + f_3 & e_2 + f_4 \\ e_3 + f_1 & e_4 + f_2 \end{pmatrix},$$

$$\left\lfloor \left(c \overset{*}{+} d \right) \overset{*}{+} \left(e \overset{*}{+} f \right) \right\rfloor = \begin{pmatrix} c_1 + d_3 + e_3 + f_1 & c_2 + d_4 + e_4 + f_2 \\ c_3 + d_1 + e_1 + f_3 & c_4 + d_2 + e_2 + f_4 \end{pmatrix},$$

$$(a\overset{*}{+}b)\overset{*}{+}\left\lfloor\left(c\overset{*}{+}d\right)\overset{*}{+}\left(e\overset{*}{+}f\right)\right\rfloor=\begin{pmatrix} a_1+b_3+c_3+d_1+e_1+f_3 & a_2+b_4+c_4+d_2+e_2+f_4 \\ a_3+b_1+c_1+d_3+e_3+f & a_4+b_2+c_2+d_4+e_4+f_2 \end{pmatrix}.$$

Дистрибутивность нарушается при простой перемене скобок в суммировании. Результат, аналогичный предыдущему, получается при изменении скобок и порядка суммирования. Выполняется закон обобщенной ассоциативности с частичной «зеркальной деформацией» элементов в парах:

$$(a\overset{*}{+}b)\overset{*}{+}\left\lfloor(c\overset{*}{+}d)\overset{*}{+}(e\overset{*}{+}f)\right\rfloor=\left\lfloor(a\overset{*}{+}b)\overset{*}{+}(d\overset{*}{+}c)\right\rfloor\overset{*}{+}(e\overset{*}{+}f).$$

Рассмотрим проблему дистрибутивности на парах элементов, применяя операцию транспонирования относительно главной диагонали у ведомых матриц. Получим суммы

$$a\overset{*}{+}b=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_3 \\ a_3+b_2 & a_4+b_4 \end{pmatrix}, c\overset{*}{+}d=\begin{pmatrix} c_1+d_1 & c_2+d_3 \\ c_3+d_2 & c_4+d_4 \end{pmatrix}, e\overset{*}{+}f=\begin{pmatrix} e_1+f_1 & e_2+f_3 \\ e_3+f_2 & e_4+f_4 \end{pmatrix},$$

$$\left\lfloor\left(a\overset{*}{+}b\right)\overset{*}{+}\left(c\overset{*}{+}d\right)\right\rfloor=\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1+d_1 & a_2+b_3+c_3+d_2 \\ a_3+b_2+c_2+d_3 & a_4+b_4+c_4+d_4 \end{pmatrix},$$

$$\left\lfloor\left(a\overset{*}{+}b\right)\overset{*}{+}\left(c\overset{*}{+}d\right)\right\rfloor\overset{*}{+}(e\overset{*}{+}f)=\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1+d_1+e_1+f_1 & a_2+b_3+c_3+d_2+e_3+f_2 \\ a_3+b_2+c_2+d_3+e_2+f_3 & a_4+b_4+c_4+d_4+e_4+f_4 \end{pmatrix}.$$

Дистрибутивность нарушается при простой перемене скобок в суммировании. Результат, аналогичный предыдущему, получается при изменении скобок и порядка суммирования. Выполняется закон обобщенной ассоциативности с иной «зеркальной деформацией» элементов в парах:

$$\left\lfloor(a\overset{*}{+}b)\overset{*}{+}(c\overset{*}{+}d)\right\rfloor\overset{*}{+}(e\overset{*}{+}f)=\left\lfloor(f\overset{*}{+}e)\overset{*}{+}(c\overset{*}{+}d)\right\rfloor\overset{*}{+}(b\overset{*}{+}a).$$

Рассмотрим проблему дистрибутивности на парах элементов, применяя гибридную операцию, состоящую из перемены строк и последующей трансформации относительно главной диагонали ведомых матриц. Получим суммы

$$a\overset{*}{+}b=\begin{pmatrix} a_1+b_3 & a_2+b_1 \\ a_3+b_4 & a_4+b_2 \end{pmatrix}, c\overset{*}{+}d=\begin{pmatrix} c_1+d_3 & c_2+d_1 \\ c_3+d_4 & c_4+d_2 \end{pmatrix}, e\overset{*}{+}f=\begin{pmatrix} e_1+f_3 & e_2+f_1 \\ e_3+f_4 & e_4+f_2 \end{pmatrix},$$

$$\left\lfloor\left(c\overset{*}{+}d\right)\overset{*}{+}\left(e\overset{*}{+}f\right)\right\rfloor=\begin{pmatrix} c_1+d_3+e_3+f_4 & c_2+d_1+e_1+f_3 \\ c_3+d_4+e_4+f_2 & c_4+d_2+e_2+f_1 \end{pmatrix},$$

$$(a\overset{*}{+}b)\overset{*}{+}\left\lfloor\left(c\overset{*}{+}d\right)\overset{*}{+}\left(e\overset{*}{+}f\right)\right\rfloor=\begin{pmatrix} a_1+b_3+c_3+d_4+e_4+f & a_2+b_1+c_1+d_3+e_3+f_4 \\ a_3+b_4+c_4+d_2+e_2+f_1 & a_4+b_2+c_2+d_1+e_1+f_3 \end{pmatrix}.$$

Дистрибутивность нарушается при простой перемене скобок в суммировании. Результат, аналогичный предыдущему, получается не только при изменении скобок и порядка суммирования.

В данном случае требуется ввести дополнительную сумму, в которой нулевая матрица играет роль ведущей матрицы:

$$\left[0\overset{*}{+}(e\overset{*}{+}f)\right]=\begin{pmatrix} e_3+f_4 & e_1+f_3 \\ e_4+f_2 & e_2+f_1 \end{pmatrix}.$$

Выполняется закон обобщенной ассоциативности

$$(a\overset{*}{+}b)\overset{*}{+}\left\lfloor\left(c\overset{*}{+}d\right)\overset{*}{+}\left(e\overset{*}{+}f\right)\right\rfloor=\left\lfloor(a\overset{*}{+}b)\overset{*}{+}(c\overset{*}{+}d)\right\rfloor\overset{*}{+}\left\lfloor 0\overset{*}{+}(e\overset{*}{+}f)\right\rfloor.$$

Он сложнее полученных ранее законов. Этот факт согласуется с интуитивным пониманием, что у простых деформаций законы должны быть проще, чем у сложных деформаций.

Согласованные действия операторов с операциями

Изменения ведомых матриц можно рассматривать как формальное предварительное требование к операции стандартного суммирования матриц. Однако можно подойти по-другому: операции сложения предшествует операция умножения ведомой матрицы на *некоторую регулирующую* матрицу. В общем случае она может быть любой, что позволяет существенно расширить возможности аддитивных операций. В простых случаях регулирующие матрицы могут быть простыми. Заметим, что операции умножения имеют спектральные свойства. По этой причине формально «допускается» система аддитивных операций.

Проиллюстрируем сказанные слова примерами. Тогда со сдвиговой деформацией ассоциирована матрица с единицами на второй диагонали. Действительно, получим при матричном умножении слева или справа перемену строк или столбцов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ a_4 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Более сложная «деформация» получается при комбинаторном произведении:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Её свойства не анализировались нами. Операция транспонирования на матричном произведении реализуется на основе деформации слагаемых ведомой матрицы. Так, получим

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a_3 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичный результат следует при применении к ведомой матрице комбинаторных произведений слева и справа на регулирующую функцию. Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы имеем теперь *алгоритм согласованного действия операторов и операций*. Он позволяет учитывать разные возможности деформации ведомых матриц, применяемых для последующего суммирования их с ведомыми матрицами.

Алгоритм изменения суммирования можно представить единой формулой

$$+ = E) + (E \to \alpha) + (\beta.$$

Стандартному суммированию соответствует произведение элементов слева и справа от знака суммирования на единичную матрицу. Новое суммирование обобщает такой вариант на модель, в которой взамен единичных матриц применяются новые матрицы α, β. Они, равно как и их отдельные элементы, могут быть подчинены динамическим уравнениям.

Новые матрицы могут быть независимыми, но могут быть также согласованы друг с другом. Физическая модель конкретизирует эти возможности на основе алгоритма верификации экспериментальных данных. В частности, это может быть сравнение с показаниями приборов, фиксирующих свойства исследуемых объектов или явлений. Однако допустимы и другие верификация. Достоверность трансфинитна, у неё есть много сторон и граней.

Понятно, что возможны более сложные изменения, если дополнительно ввести *«подготовку» к суммированию ведущих матриц.*

Ведущие и ведомые матрицы могут быть подчинены системе согласованных изменений, а также уравнениям динамики. У новых «взаимодействий» есть локальные и глобальные свойства. Они подчинены законам, которые допускают классификацию. В её рамках становится возможным прогнозирование различных деформаций, а также нахождение алгоритмов коррекции деформаций.

По сути дела речь идет *о суммировании с дополнительными условиями*. В данном случае эти условия сводятся к деформации одних матриц другими матрицами с использованием системы матричных и комбинаторных операций. Возможно также, с формальной точки зрения, различие в операторном изменении ведущих и ведомых матриц. В частности, возможна их аддитивная и мультипликативная деформация. Более того, допустимы множественные деформации. Эти и другие свойства открывают новые возможности анализа. В частности, это могут быть разнообразные условия «равновесия» структур и активностей.

Новые модели могут быть пригодны для описания социальных и информационных процессов и состояний. На начальном этапе таких приложений естественно использовать модели физических явлений, изменив в них величины в соответствии с возможностями эксперимента.

Операционная инвариантность деформаций множеств

Известно, что сигруппа Галилея-Лорентца с элементами вида

$$\sigma = \gamma \begin{pmatrix} 1 & a \\ aw & 1 \end{pmatrix} \to \gamma \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

объединяет группу Галилея и группу Лорентца на основе скалярного параметра w. Рассмотрим вывод сигруппы на основе матричной деформации группы Лорентца (с точностью до множителя перед матрицами), учитывая возможность стандартного матричного и стандартного комбинаторного произведений.

На матричном произведении справа получим

$$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}\to\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ aw & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

$$\alpha=\frac{1-a^2w}{1-a^2},\beta=0,\gamma=\frac{a(w-1)}{1-a^2},\delta=1,$$

$$S_1=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1-a^2w}{1-a^2} & 0\\ \dfrac{a(w-1)}{1-a^2} & 1\end{pmatrix},\det S_1=\frac{1-a^2w}{1-a^2}=\frac{\det\widehat{A}}{\det A}.$$

На матричном произведении слева получим

$$S_2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{a(w-1)}{1-a^2} & \dfrac{1-a^2w}{1-a^2}\end{pmatrix},\det S_2=\frac{1-a^2w}{1-a^2}.$$

Эти преобразования характеризуются одинаковым детерминантом при умножении слева и справа. Из стандартного комбинаторного произведения справа следует, что

$$\beta=\frac{1-a^2w}{1-a^2},\alpha=1,\gamma=0,\delta=\frac{a(w-1)}{1-a^2},$$

$$Q_1=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1-a^2w}{1-a^2}\\ 0 & \dfrac{a(w-1)}{1-a^2}\end{pmatrix},\det Q_1=\frac{a(w-1)}{1-a^2}=\frac{Link\tilde{A}}{\det A},$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ aw & 1\end{pmatrix}\to Link\tilde{A}=\sum a_{ij}(\sigma)=1-a+aw-1=a(w-1).$$

Новая величина $LinkA$ есть нормированная сумма элементов матрицы. Нормировка задается группой Z_2, состоящей их единицы и минус единицы. Эта величина имеет новые свойства: она инвариантна относительно транспонирования матрицы по второй диагонали. Значение детерминанта инвариантно относительно транспонирования по первой диагонали. Из стандартного комбинаторного произведения слева следует

$$Q_2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1-a^2w}{1-a^2} & \dfrac{a(w-1)}{1-a^2}\end{pmatrix},\det Q_2=\frac{a(w-1)}{1-a^2}.$$

У комбинаторных произведений слева и справа детерминант тоже одинаков. Он отличается от результата, следующего из матричного произведения. Во всех случаях элементы матриц имеют одинаковые выражения, отличаясь лишь порядком расположения в деформирующей матрице. Разные операции «порождают» структурно одинаковые выражения. Эти выражения равны детерминантам деформирующих матриц, соответствующих ассоциативным и неассоциативным операциям. Одно выражение «показывает» нормировку матриц, другое выражение задает нормированное отклонение от отношения, не равного единице. Инвариантом операций является выражение

$$Sp\xi - Det\xi = 1.$$

С другой стороны, для элементов сигруппы Галилея-Лорентца на ассоциативных матричных операциях и на неассоциативных комбинаторных операциях выполняется закон правой подстановки родственных элементов (*закон внедрения*):

$$(xy)y^2 = (xy^2)y.$$

На неассоциативных матричных операциях и на ассоциативных комбинаторных операциях закон имеет вид

$$(xy)y^2 = y^2(xy).$$

Есть некоторая глубинная связь инвариантности законов произведения элементов сигруппы относительно операций и одинаковости вида деформирующих элементов для группы Лорентца.

Рассмотрим другой пример. Пусть базовые элементы имеют вид

$$\sigma = \gamma\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

Для них на стандартной матричной операции и на комбинаторной операции при произведении выполняется *закон внедрения*, действующий на элементах сигруппы.

Элементы множества «несут на себе» внешние и внутренние законы. Только при наличии их полной системы обнаруживаются *две стороны одного объекта.*

Скалярная деформация *невозможна на стандартной матричной операции*, но она реализуется на стандартной комбинаторной операции вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & aw \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{1+a}, \beta = \frac{a - a^2 w}{1 - a^2}, \delta = \frac{aw - a^2}{1 - a^2}.$$

Преобразования вида

$$\kappa = \gamma\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

характеризуются равным нулю детерминантом. Он становится ненулевым при рассматриваемой деформации и равен

$$\det \kappa^* = \frac{a(w-1)}{1-a^2}.$$

Другими словами, деформация на комбинаторной операции способна «снять вырождение» по определителю. Это выражение совпадает с детерминантом комбинаторного преобразования группы Лорентца в сигруппу Галилея-Лорентца. Матричная операция не обладает такими свойствами.

Преобразования вида

$$\gamma\begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{m,k}{\times} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} a & aw \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

невозможны ни на матричной, ни на стандартной комбинаторной операциях. Однако на данных деформированных матрицах, *как при применении матричного произведения, так и комбинаторного произведения столбец на столбец* выполняется закон внедрения. Получены три варианта объединения закона внедрения с другими законами. Этот пример иллюстрирует трансфинитность соединения вариантов и возможностей.

Деформации возможны на произведении Даламбера с матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & w \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det Q = 1 - w.$$

При комбинаторном произведении столбца на столбец есть решение вида

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a(w-1)}{1-a^2} \\ 0 & \dfrac{1-a^2 w}{1-a^2} \end{pmatrix}, \det Q_3 = \frac{1-a^2 w}{1-a^2}.$$

Данное произведение ассоциативно и его результат по детерминанту преобразующей матрицы аналогичен матричному, ассоциативному преобразованию группы Лорентца в сигруппу Галилея-Лорентца. Для матриц вида

$$\gamma\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \gamma\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \gamma\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \gamma\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}, \gamma\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}, \gamma\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

выполняются два закона:

а) на ассоциативных матричных и неассоциативных комбинаторных операциях выполняется закон «внедрения»

$$(xy)y^2 = (xy^2)y,$$

а) на неассоциативных матричных и ассоциативных комбинаторных операциях выполняется коммутативный закон

$$(xy)y^2 = y^2(xy).$$

Мы наблюдаем инвариантность законов относительно вида матриц и относительно операций. Такие законы можно назвать «внутренними законами», они в некотором смысле не зависят от «внешних» условий.

Мы наблюдаем также «инвариантность» (относительно действия разных операций) детерминанта локальных скалярных преобразований матриц разной структуры. Этот результат непривычен. Мы обязаны принять точку зрения, что *«привычное» поведение может быть исследовано частично, а проведенный анализ может быть неполным, если они верифицированы по ограниченной системе операций.* В частности, «вырожденные» состояния и ситуации могут быть «раскрыты» новыми математическими операциями.

Закон зеркальной коммутативности

$$\left(a \overset{*}{+} b\right) \overset{*}{+} \left(c \overset{*}{+} d\right) = \left(d \overset{*}{+} c\right) \overset{*}{+} \left(b \overset{*}{+} a\right)$$

можно рассматривать как следствие деформации операции суммирования. Он очевиден при записи операции сложения с применением матриц, квадрат которых равен единичной матрице. Действительно, получим

$$\left(a+\alpha b\right)+\alpha\left(c+\alpha d\right)=a+\alpha b+\alpha c+\alpha^2 d=\left(d+\alpha c\right)+\alpha\left(b+\alpha a\right)\to\alpha^2=E.$$

Этот закон усложняется при выборе других матриц, с применением которых используется операция суммирования. При использовании деформирующей матрицы

$$\xi=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\xi^3=E$$

условие обобщенной дистрибутивности базируется на тройке из указанной совокупности.

Поскольку есть 4 матричных и 4 комбинаторных произведения, стандартные деформации разбиваются на классы, индуцированные типами произведений. Есть 8 стандартных деформаций, которые могут быть как пассивными, так и активными. Ситуация усложняется при применении многократных произведений.

Алфавит поведения

Поведение предполагает наличие объектов, имеющих структуру и активность. Оба эти фундаментальные параметры трансфинитны. По этой причине соответствия, как и взаимодействия между объектами и явлениями, тоже трансфинитны. Наличие объектов и явлений означает наличие информации, которая ассоциирована с ними. Кроме этого, согласно практике, есть средства и алгоритмы оценки и передачи информации о себе и об окружающей реальности. Они присущи каждому объекту и каждой активности в разной мере и могут быть реализованы по-разному в разных условиях. При получении информации происходит полная или частичная ее обработка: принятие и оценивание теми или иными средствами. Кроме этого, реализуется реакция на информацию. Указанные условия также трансфинитны. По этой причине обычно возможен «спектр» реакций. Тот или другой вариант реализуется в зависимости от того, как этому помогают или мешают внешние и внутренние условия и обстоятельства. Среди важнейших факторов поведения можно выделить целевую установку поведения. В зависимости от цели намеченных и проводимых действий будет разная оценка информации, принятие решений и реализация доступных и предполагаемых условий поведения. Обычно поведение подчинено некоторой потребности, оно направлено на реализацию условий для осуществления этой потребности. Многие потребности фундаментальны в том смысле, что они присущи каждому объекту и явлению. Среди них следует отметить существование в пространстве и во времени. Фундаментален обмен в широком и узком смыслах слова. В частности, этот тезис справедлив для энергетического и информационного обменов. В модели трансфинитной реальности обмен трансфинитен: он реализуется на каждом уровне материи, а также между уровнями материи.

Физической реальности софистатна математическая реальность. Она реализуется в форме символов, посредством которых отображаются свойства структур и активностей. Эти символы задают величины и операторы, соединенные между собой в некоторое изделие математической реальности. Понятно, что такое изделие обычно наполнено содержанием, ассоциированным с уровнем развития математики, а также экспериментальных средств, на основе которых верифицированы величины, операторы, связи между ними. С развитием математики модели меняются, расширяя свои границы и углубляя свои возможности. На определенной стадии развития математическая модель может стать объектом для математики, далеким от эмпирической ситуации, но не менее интересной от этого. Более того, математическая модель может стать инструментом описания той части реальности, которая недоступна (сейчас или всегда) экспериментальным средствам. Тогда верификация её выводов с экспериментом может быть только косвенной. Более того, она может быть трансфинитной, в частности, многоступенчатой, многоуровневой.

Физическая практика в широком смысле слова дополнительна математической практике. Верен и обратный тезис. Эта взаимная дополнительность может быть взаимно полезна, хотя данное условие не обязательно. Разные практики могут и обязаны иногда вступать в противоречие друг с другом, расширяя и углубляя границы своих возможностей, а также меру взаимной дополнительности. Расширению и углублению экспериментальных средств и верификаций в форме новых приборов и методик измерения и обработки информации софистатно расширение и углубление математических средств и верификаций в форме новых величин, операций, форм и средств их объединения и анализа.

Гравитация и электромагнетизм, определенные нами как массодинамика и электродинамика, есть пара фундаментальных качеств физических тел Реальности. Они необходимы и достаточны для описания большой совокупности объектов и явлений, их информационного обмена, изменения структур и активностей. Они учитываю на основе применяемых величин, называемых полями, поступательные и вращательные слагаемые элементов структуры и явлений. Этот подход согласуется с применением полной системы математических операций, софистатной указанным механическим движениям.

Тела Сознаний, согласно ранее принятой гипотезе, софистатны физическим телам. В этом варианте есть массодинамические и электродинамические свойства Сознания. Они должны, в силу софистатности с физическими телами, задаваться аналогичными величинами, а также системой операторов, которые описывают их изменение. Сущностное отличие состоит в том, что информационный обмен имеет свойства, требующие новой математики в форме новых величин, операций, системы связей в математической модели. Поскольку сейчас появился шанс для исследования массодинамических и электродинамических сторон и свойств реальности единым образом, естественно рассматривать вариант модели Сознания в форме аналога с единой моделью для гравитации и электромагнетизма. Следуя такому подходу, мы вправе задать информационные потоки «полями». В данном случае они имеют вид

$$\partial_i \partial_j \Phi_{kl} - \partial_j \partial_k \Phi_{il} + \partial_k \partial_l \Phi_{ij} - \partial_l \partial_i \Phi_{kj} = 0.$$

Система уравнений позволяет рассматривать решения в форме суперпозиции симметричных и антисимметричных тензорных полей, заданных посредством своих четырехпотенциалов. Другими словами, примем точку зрения, что информацию можно выразить посредством пары четырехпотенциалов, из которых сконструированы симметричный и антисимметричный *тензоры информации*.

Сознание в форме реакции на информацию зададим индукциями по аналогии с уравнениями массодинамики и электродинамики.

Система уравнений становится конструктивной и содержательной после применения связей между полями и индукциями, посредством которых выражаются как дополнительные свойства информационных полей, так и дополнительные свойства реакции Сознания на информацию.

Так можно описать каждый массовый и электрический заряд Сознания. В реальности их может быть несколько. По этой причине мы всегда имеем дело с системой тел Сознаний. Им соответствует система моделей, стыкующих тела Сознаний между собой. Модель неабелевых калибровочных полей становится инструментом для описания системы Сознаний, ассоциированных со сложными физическими телами.

$$\partial_i\partial_j\Phi^a{}_{kl} - \partial_j\partial_k\Phi^a{}_{il} + \partial_k\partial_l\Phi^a{}_{ij} - \partial_l\partial_i\Phi^a{}_{kj} = 0, a = 1, 2, 3...$$

Аналогично, следуя принципу софистатности тел, Сознаний, Чувств, следует описывать тела Чувств, информационные потоки для них и реакцию на эти информационные потоки. Понятно, что три разных системы полей требуется согласовать друг с другом, если мы рассматриваем объект, имеющий физическое тело, тела Сознаний и тела Чувств. В одном из вариантов это может быть описание в гиперпространстве, в котором каждому телу поставлено в соответствие своя гиперповерхность. Принимая модель линейной независимости трех типов тел, мы обязаны рассматривать трехмерное гиперпространство, вкладывая в него «гипервектор» со слагаемыми, относящимися к телам, сознаниям, чувствам. Для такого "гипервектора" нужно задать свои уравнения структуры и динамики.

Наличие объектов предполагает наличие пространств, в котором они имеют свою форму, размеры и проявления. По аналогии с физическими телами следует ввести пространство Сознаний и пространство Чувств. Тогда можно представлять Сознание и Чувства геометрическими средствами. Новые пространства предполагают не только геометрию, но описание движений Сознаний и Чувств со своими «скоростями» «ускорениями». Естественно ввести аналог времени для Сознаний и Чувств. Они софистатны привычному для практики механическому времени, основанному на концепции механических перемещений. Однако их характеристики и свойства могут быть совсем другими, так как движения рассматриваются не в механическом пространстве. По этой причине требуется разработать концепцию трехмерного «времени» для характеристики трех типов движений: Тел, Сознаний, Чувств.

По аналогии с моделями физических тел требуется ввести заряды Сознаний и Чувств. Согласно принятой базовой точке зрения они базируются на гравитационных и электрических свойствах материи. По этой причине базовыми зарядами Сознаний и Чувств будут аналоги массы и электрического заряда. Тогда возможно моделирование Сознаний и Чувств по аналогии с моделями массодинамики и электродинамики. Более того, поскольку эти модели могут быть расширены до уровня калибровочных и не калибровочных моделей высшего разряда, требуется построение их аналогов и проявлений для моделей Сознаний и Чувств.

Три пространства, три системы зарядов, три софистатных модели требуется объединить в единое изделие, так как Тела, Сознания, Чувства, согласно базовому положению, всегда образуют единую согласованную конструкцию. Для этого желательно создать модели объединения различных пространств, согласно которым одни свойства и характеристики объектов влияют на другие свойства и характеристики объектов. Кажется естественным предположение, что нужен «стыковочный блок» для тройки пространств, зарядов, моделей. Он может иметь структуру самостоятельного пространства, объединяющего в себе свойства, необходимые и достаточные для «стыковки» разных пространств, а также для согласования их друг с другом. Такое согласование достигается нахождение величин и операторов, которые зависят от координат «стыковочного блока». По самостоятельному алгоритму, выполняющему роль «мостика» между стыковочным блоком и самостоятельным пространством и его объектами, реализуется информационный обмен «стыковочного блока» с функционирующими подсистемами. В некотором смысле здесь обнаруживается аналогия «стыковочного блока» с мозгом человека. В качестве функционирующих подсистем выступают мышцы, нервы, акустические рецепторы и реакция на них, визуальные рецепторы и влияния на них, память и т.д. Другими словами, требуется создать модель объектов, имеющих три разных тела, которые согласованы между собой посредством «мозга конструкции», регулятора структуры и функций объекта.

Поскольку мы приняли модель трансфинитной реальности, анализируемые Тела, Сознания, Чувства трансфинитны. Трансфинитен также «мозг» в форме регулятора структуры и поведения единой конструкции. В силу этих обстоятельств желательно разработать, на начальной стадии, одноуровневую модель согласованного описания Тел, Сознаний, Чувств объектов с Регулятором. Её анализ позволит конкретизировать детали и алгоритмы обобщений в направлении учета аспектов трансфинитности объектов, а также их софистатности по подструктурам и по отношению к другим объектам.

Естественна сложность верификации моделей такого типа. Для этого требуется учесть не только механические свойства Тел, но и другие свойства, для которых недостаточно имеющихся приборов. Более того, возможна ситуация, когда таких приборов просто невозможно изготовить. Тогда анализ проводится косвенно. Не исключен вариант чисто математического анализа моделей с ориентировкой на их следствия, пригодные для практики. Возможно, для верификации потребуется новая логика.

Простой вариант объединения трех моделей в одну модель следует из рассмотрения трех абелевых калибровочных и не калибровочных полей в форме аналога модели неабелевых полей. Тогда система циклических уравнений

$$\partial_i\partial_j\Phi^a{}_{kl}-\partial_j\partial_k\Phi^a{}_{il}+\partial_k\partial_l\Phi^a{}_{ij}-\partial_l\partial_i\Phi^a{}_{kj}=0, a=1,2,3,$$
$$\Phi^a{}_{kl}=\partial_k A^a_l-\partial_l A^a_k+\sigma^a_{bc}\left(i\right)A^b\left(i\right)A^c\left(i\right), i=1,2,3$$

описывает «поля» одного компонента объекта: тела, сознания или чувства при зависимости величин от потенциалов других компонент. *Частные производные записаны формально без указания пространства, в котором они действуют*. В этом варианте согласования выполнены через обобщение величин, анализируемых в модели. Если дополнительные потенциалы не зависят от опорных координат, мы получаем стандартную модель. В ней тела, сознания, чувства описываются едиными уравнениями для «масс» и «зарядов», заданных *в своих пространствах*. В этих уравнениях «неявно» присутствуют разные операции. Однако так они невнятно представлены.

Рассматриваемые величины соединены в «регуляторе» в форме суммы слагаемых, описывающих тела, сознания, чувства в форме

$$\Phi_{kl}=i_a\Phi^a{}_{kl}.$$

Эти величины могут по-разному реализовать себя и проявляться на практике. В частности, заметим, объединяющие реперы могут быть матрицами, а произведения может быть рапзным для разных компонент. Таким может быть и суммирование. По этой причине сложны как проблемы компоновки разных данных в одном множестве, так и расшифровки данных при наличии информации. При одних и тех же исходных данных для их верификации может потребоваться система дополнительных условий и обстоятельств. Не исключен вариант, что она будет зависеть от свойств объектов, обменивающихся информацией. Ситуация с передачей информации на чужом языке аналогична анализируемой возможности: *объекты и явления могут «разговаривать» на разных языках*.

Идея согласованного описания тел, сознаний, чувств предполагает их взаимное влияние друг на друга. В силу различия пространств, зарядов, величин, операторов это влияние нетривиально. Для его понимания требуется надежная и длительная практика. Задача состоит не только в том, чтобы понять соответствующие структуры и активности. Требуется классифицировать их типы, исследовать вопросы их деформации и управления ими. Особо важно довести анализ до практических предсказаний конкретной практики реальных объектов. На этой основе можно будет анализировать нарушения и катастрофы структур и активностей, а также предсказывать их, равно как и возможности предотвращения нарушений и катастроф.

Целью глобального исследования может быть создание алгоритмов оптимального развития объектов и их систем. В частности, речь может идти о совершенствовании цивилизации с целью соответствия целям и задачам Вселенной. Не только следует понять свою роль во Вселенной, но и реализовать её на практике.

К проблеме соотношения масс протона и электрона

Из экспериментальных данных получено отношение массы протона к массе электрона

$$\zeta = \frac{m_p}{m_e} = 1836{,}15267261.$$

Это значение можно аппроксимировать на основе числа π и постоянной тонкой структуры α_s выражением (Peter J.) 2006 г.

$$\xi = (2\pi)^4 + \frac{2}{\alpha_s} + \frac{1}{\alpha_s^{1/4}} + \alpha_s^{4/9} + \frac{\alpha_s}{5} = 1836{,}15263...$$

Такое математическое описание не предполагает нахождения ответа на причины и величину указанного соотношения. Для физика важно найти конструктивное обоснование такого выражения. Новая версия, которая появилась недавно, состоит в том, что протон конструктивно изготовлен из базовых «предэлектронов» одинаковой массы. Базовые электроны сконструированы из одинаковых «кирпичиков», содержащих один тип электрических и гравитационных предзарядов. Один вид образуют объекты, относящиеся к одной из комбинаторных «конфигураций», следующих из 16 мест для 4 предзарядов в форме

$$C_4^{16} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1820.$$

Другой вид образуют объекты, которые структурированы в соответствии с элементами группы заполнения. Эти элементы нейтральны по знаку, кроме элементов группы Клейна. Общее число элементов группы заполнения равно 16.

По этой причине общее количество базовых «предэлектронов» двух типов может быть задано суммой указанных двух чисел

$$N_{p(e)} = 1820 + 16 = 1836.$$

Принимая гипотезу одинаковости масс каждого из базовых «предэлектронов», мы можем формально представить протон, состоящий из таких «предэлектронов». Тогда

$$m_p = 1836 m_e.$$

Такая «картина» конструкции протона очень проблематична. Во-первых, непонятна причина указанной демократии в структуре протона. Во-вторых, мы не можем оценить энергии, обусловленные электрическим и гравитационным взаимодействием предзарядов между собой. В-третьих, скрыта роль и значение объектов, состоящих из тех или других предзарядов. В-четвертых, отсутствует модель динамики такого структурированного объекта, названного протоном и выполняющего *роль алфавита материи*: как расположены базовые «предэлектроны», как они ведут себя при взаимодействиях, и, в частности, при деформациях. В-пятых, каков механизм «поддержания счета» базовых объектов в такой системе.

Необычная гипотеза порождает бурю вопросов и проблем. Они актуальны для понимания сущности конструкций и динамики тонкого мира. Тем более, что предэлектрон «допускает», согласно концепции структурности, наличие в «себе» огромного числа предзарядов. Интересно выяснить, почему в свободном состоянии они «проявляют» одинаковый электрический заряд?

К физическому обоснованию размерности пространства-времени

Базовым положением структурной физики для тонкой материи является гипотеза о фундаментальной роли 4 предзарядов: пары электрических предзарядов и пары гравитационных предзарядов. Физическое пространство трехмерно и визуально представлено совокупностью объектов. Эти объекты имеют положительную массу и два типа электрических зарядов. Два трехмерия согласуются между собой по условиям наблюдений. Отрицательной массы в эксперименте нет. Аналогично нет визуально наблюдаемого времени. В силу этого обстоятельства время можно интерпретировать как аналог отрицательной массы.

Если принять **гипотезу**, что *размерность пространства и времени обусловлена количеством базовых объектов*, из которых образована наблюдаемая материя, то для физика понятно, что *пространство и время есть проявление фундаментальной структуры реальности*. Более того, желая описывать физический мир с применением большего числа базовых объектов, мы обязаны тогда увеличить размерность пространства и времени, в котором мы описываем явления. В варианте единого описания системы трех различных тел: физического, Сознания, Чувств, мы вправе вести три системы предзарядов, аналогичные предзарядам для физических тел. Тогда минимальная размерность пространства для единой модели будет равна 12. В этой модели координаты для Сознаний и Чувств, как и времена, могут иметь свойства, принципиально отличающиеся от свойств привычного для практики физического пространства и времени.

С другой стороны, симплекс, образованный из 4 предзарядов, имеет структуру пирамиды, инициируя модель трехмерного пространства как реализацию такого симплекса. В этом варианте нет необходимости обосновывать время свойствами отрицательной массы. Время выступает в роли фактора, учитывающего относительное расположение и движения в системе симплексов. Такие симплексы могут быть сконструированы также для предзарядов Сознаний и Чувств, формируя свои пространства и свои свойства. В частности, это могут быть аналоги проективных геометрий, базирующиеся на системе отношений между базовыми элементами, представленные симплексом.

В-третьих, модели электромагнитных и гравитационных явлений могут быть записаны на основе кватернионов и антикватернионов. Они представляют собой конечные множества, состоящие из 4 элементов. По этой причине размерность пространства и времени ассоциирована с размерностью канонических систем отношений между предзарядами, выраженным в форме кватернионов и антикватернионов. В данном представлении на первое место поставлена система отношений, заданная элементами симметрийного типа. По этой причине можно считать, что размерность пространства и времени обусловлена системой отношений между базовыми объектами. Тогда учитывается не только структура физической реальности, но и отношения между объектами в такой реальности. **Структурное обоснование размерности и обоснование размерности по системе отношений в данном случае согласованы между собой**. В обоих случаях эта размерность равна 4. Так выражена не только идея «равновесия» в совокупности электрических и гравитационных предзарядов как структурных составляющих материи. Так выражена идея «равновесия» отношений в системе предзарядов.

Понятно, что равновесие является частным случаем неравновесных объектов и явлений. По этой причине у объектов и отношений есть скрытые свойства, задаваемые системой величин, например, в форме параметров. Эти параметры, естественно, подчинены динамическим уравнениям. Только после того, как эти параметры учтены в модели, можно рассчитывать на полноту предсказаний модели.

Перекрестное умножение

Идея состоит в том, что произведение строк на столбцы задается в соответствии с местами их расположения. Первая строка умножается на первый столбец стандартно. На второй столбец она умножается со сдвигом элементов столбца влево на единицу. При умножении на третий столбец сдвиг элементов влево производится на два места. Другими словами, элементы столбцов второй матрицы *сдвигаются влево* на количество мест, равное модулю от разности номеров строки с номерами столбца. Так получается вариант перекрестного левого умножения. Аналогично конструируется вариант перекрестного правого умножения.

Рассмотрим левое перекрестное произведение для матриц размерности два. Тогда

$$ab = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \overset{\pi}{\times} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_4 + a_2b_2 \\ a_3b_3 + a_4b_1 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix},$$

$$ba = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \overset{\pi}{\times} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_1 + b_2a_3 & b_1a_4 + b_2a_2 \\ b_3a_3 + b_4a_1 & b_3a_2 + b_4a_4 \end{pmatrix},$$

$$bc = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \overset{\pi}{\times} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1c_1 + b_2c_3 & b_1c_4 + b_2c_2 \\ b_3c_3 + b_4c_1 & b_3c_2 + b_4c_4 \end{pmatrix},$$

$$(ab)c = \begin{pmatrix} (a_1b_1 + a_2b_3)c_1 + (a_1b_4 + a_2b_2)c_3 & (a_1b_1 + a_2b_3)c_4 + (a_1b_4 + a_2b_2)c_2 \\ (a_3b_3 + a_4b_1)c_3 + (a_3b_2 + a_4b_4)c_1 & (a_3b_3 + a_4b_1)c_2 + (a_3b_2 + a_4b_4)c_4 \end{pmatrix},$$

$$a(bc) = \begin{pmatrix} a_1(b_1c_1 + b_2c_3) + a_2(b_3c_3 + b_4c_1) & a_1(b_3c_2 + b_4c_4) + a_2(b_1c_4 + b_2c_2) \\ a_3(b_3c_3 + b_4c_1) + a_4(b_1c_4 + b_2c_2) & a_3(b_1c_4 + b_2c_2) + a_4(b_3c_2 + b_4c_4) \end{pmatrix},$$

$$ab \neq ba, (ab)c \neq a(bc).$$

Такое произведение некоммутативно и неассоциативно. Оно подчинено законам универсальной алгебры, содержащей коммутаторы, антикоммутаторы и ассоциаторы.
Есть и другие законы. Рассмотрим коммутатор

$$\sigma = ab - ba = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 & a_1b_4 - b_1a_4 \\ a_4b_1 - b_4a_1 & a_3b_2 - b_3a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда выполняется закон удвоения коммутатора посредством антикоммутатора с внешним условием в форме матрицы μ:

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \mu\sigma + \sigma\mu = 2\sigma.$$

Для рассматриваемых матриц и перекрестного произведения выполняются такие законы:

$$(xy)x \neq x(yx), (xy)y \neq y(yx), y^2(xy) \neq (xy)y^2, (xy)y^2 \neq (xy^2)y...$$

Следовательно, операция меняет качество многообразия: разным операциям соответствуют разные законы. Это естественно и соответствует стандартной логике. Однако есть тонкий момент: *многообразие может обладать свойством перемены операций в зависимости от условий, в которых оно находится*. Тогда поведение системы качественно меняется, что нужно учитывать в эксперименте и в теории. На основе перекрестного произведения можно учитывать взаимное влияние электрических и массовых предзарядов. Действительно, на модели левого перекрестного произведения нам удалось показать, что есть закон сохранения коммутатора под действием на него антикоммутатора. Это обстоятельство можно интерпретировать как элемент механизма сохранения электрического предзаряда посредством гравитационного предзаряда. Поскольку оба предзаряда рассматриваются нами как единое целое, обязан существовать *алгоритм сохранения антикоммутатора под действием коммутатора.* Тогда можно будет говорить о взаимных функциях поддержки одного заряда другим зарядом. На этой основе может проясниться механизм образования зарядов и некоторые элементы их динамики. Рассмотрим свойства антикоммутатора:

$$ab + ba = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_4 + a_2b_2 \\ a_3b_3 + a_4b_1 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1a_1 + b_2a_3 & b_1a_4 + b_2a_2 \\ b_3a_3 + b_4a_1 & b_3a_2 + b_4a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_4 & \pi_1 \\ \pi_3 & \pi_2 \end{pmatrix} = \pi,$$
$$\pi E + E\pi = \{\pi, E\} = 2\pi.$$

Антикоммутатор на левой перекрестной операции сохраняет себя на матричной операции с применением единичной матрицы (в «свободной среде»). На матричной операции получим коммутатор

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_4 & \pi_1 \\ \pi_3 & \pi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pi_4 & \pi_1 \\ \pi_3 & \pi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_3 - \pi_1 & \pi_2 - \pi_4 \\ \pi_4 - \pi_2 & \pi_1 - \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно, коммутатор на матричной операции от антикоммутатора на левой перекрестной операции аналогичен по структуре коммутатору на левой перекрестной операции. Антикоммутатор на этой операции удваивает данный коммутатор. Имеет место «расщепление» свойств в системе операций: в зависимости от того, каков «внешний фон», есть условия для сохранения коммутаторов или антикоммутаторов.

Введем *функциональную операцию выборки элементов* по исходной матрице в соответствии с элементами исходной, преобразуемой матрицы. Будем задавать по разности элементов один элемент начальной матрицы, полагая, что функциональная операция имеет символ места с плюсом впереди преобразуемой матрицы и с минусом за преобразуемой матрицей. Кроме этого разность задает стрелку от положительного элемента к отрицательному. Выбор элемента реализуется вправо, если разность анализируется на главной диагонали. Выбор элемента реализуется влево, если разность анализируется на второй диагонали. Фактически принято произведение в форме проектирования, согласованного с исходной матрицей и преобразуемой матрицей. Тогда получим функциональный коммутатор, формально преобразующий разность элементов в новый элемент, ассоциированный с этой разностью. Он имеет вид

$$\begin{pmatrix} f & f \\ f & f \end{pmatrix}_{\pi} \begin{pmatrix} \pi_3 - \pi_1 & \pi_2 - \pi_4 \\ \pi_4 - \pi_2 & \pi_1 - \pi_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pi_3 - \pi_1 & \pi_2 - \pi_4 \\ \pi_4 - \pi_2 & \pi_1 - \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & f \\ f & f \end{pmatrix}_{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_4 & \pi_1 \\ \pi_3 & \pi_2 \end{pmatrix}.$$

Такое соответствие кажется непрактичным, оторванным от жизни. Реальная ситуация при деятельности механизма Сознаний и Чувств может быть еще более сложной. Мы рассмотрели простой пример соответствия, достаточного для формального создания некоторой конструкции по другой конструкции. Для этого понадобились дополнительные операции, обеспечивающие достижение поставленной цели. Так мы приходим к пониманию, что Сознание способно «творить» операции, в частности, различные соответствия. Для этого нужна исходная информация и целевая установка. Принимая точку зрения, что такие свойства присущи материи разного уровня, мы получаем возможность нового анализа мира возможностей и мира фантазий. И то, и другое применяется на практике и полезно в жизни.

Возможен другой вариант анализа данной ситуации. Фактически мы использовали преобразование вида

$$\begin{pmatrix} \pi_3 - \pi_1 & \pi_2 - \pi_4 \\ \pi_4 - \pi_2 & \pi_1 - \pi_3 \end{pmatrix} \overset{f}{\times} \begin{pmatrix} f_4 & f_1 \\ f_3 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_4 & \pi_1 \\ \pi_3 & \pi_2 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует воздействие на объект, составленный из разностей величин, объекта, составленного из функций воздействия на эти разности. В итоге получается исходная матрица, с которой начинался анализ. Объект, составленный из величин, превратился в другой объект, составленный из величин. Это «превращение» есть результат влияния на объект из величин объекта, составленного из качественно других величин, выполняющих роль системы функций. Объект из величин под влиянием объекта из функций превратился в новый объект из величин. В данном случае роль произведения для пары объектов выполняет произведение Даламбера, когда каждый элемент умножается на объект сходного места. *Если произведение усложнить*, принимая варианты матричного или комбинаторного произведений, *трансформация объекта величин будет более сложной*.

Анализируемый вариант существенно сложнее моделей стандартных алгебр. Теперь применяются не только величины и операции, но принципиально разные объекты и принципиально новые операции.

Физические модели и неассоциативность в концепции электрических предзарядов

Ранее физические модели были записаны на кватернионах или антикватернионах, что соответствовало идее и концепции наличия и мономиального представления гравитационных предзарядов. Принимая фундаментальность не только гравитации, но и электромагнетизма, мы вправе записать физические модели на основе левых и правых идеалов, посредством которых предложено выражать концепцию электрических предзарядов.

Для реализации данной возможности введем новое, функциональное произведение матриц. Умножим по Даламберу (почленно) элементы каждой строки на элементы соответствующего столбца. Расположим полученные произведения на местах элементов умножаемых строк. Такое произведение некоммутативно и неассоциативно. Действительно, получим

$$a\overset{f}{\times}b=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\overset{f}{\times}\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_2b_3\\ a_3b_2 & a_4b_4\end{pmatrix},$$

$$b\overset{f}{\times}a=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}\overset{f}{\times}\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_3b_2\\ a_2b_3 & a_4b_4\end{pmatrix},$$

$$a\overset{f}{\times}b\neq b\overset{f}{\times}a,$$

$$\left(a\overset{f}{\times}b\right)\overset{f}{\times}c=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_2b_3\\ a_3b_2 & a_4b_4\end{pmatrix}\overset{f}{\times}\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1c_1 & a_2b_3c_3\\ a_3b_2c_2 & a_4b_4c_4\end{pmatrix},$$

$$b\overset{f}{\times}c=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}\overset{f}{\times}\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1c_1 & b_2c_3\\ b_3c_2 & b_4c_4\end{pmatrix},$$

$$a\overset{f}{\times}\left(b\overset{f}{\times}c\right)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\overset{f}{\times}\begin{pmatrix}b_1c_1 & b_2c_3\\ b_3c_2 & b_4c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1c_1 & a_2b_3c_2\\ a_3b_2c_3 & a_4b_4c_4\end{pmatrix},$$

$$\left(a\overset{f}{\times}b\right)\overset{f}{\times}c\neq a\overset{f}{\times}\left(b\overset{f}{\times}c\right).$$

Тогда *уравнения механики идеальной жидкости* (при суммировании со скрытым проектором) получат вид

$$A\overset{f}{\times}(B\overset{f}{\times}A)=F=col\begin{pmatrix}f_1 & f_2 & f_3 & f_4\end{pmatrix}.$$

Здесь

$$A=u^1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+u^2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+u^3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}+u^4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$B=\partial_1\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\partial_2\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\partial_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\partial_4\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, механика может быть представлена не только на ассоциативной операции, но и на неассоциативной операции. Другими словами, *векторная форма уравнений механики инвариантна относительно выбора **типа операций***. Этот вид инвариантности дополнителен инвариантности, обусловленной возможностью записи уравнений физики на разных подгруппах группы заполнения.

Уравнения Фарадея-Ампера запишутся на основе идеалов и кватернионов в виде условия равновесия комплексно сопряженных величин (при суммировании со скрытым проектором):

$$\alpha\overset{f}{\times}\Phi+\tilde{\alpha}\overset{f}{\times}\bar{\Phi}=0.$$

Здесь

$$\alpha = \partial_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \partial_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\alpha} = \partial_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \partial_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \varphi_x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi_z \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Phi} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \bar{\varphi}_x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \bar{\varphi}_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \bar{\varphi}_z \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_x = E_x - iB_x, \varphi_y = E_y - iB_y, \varphi_z = E_z - iB_z,$$
$$\bar{\varphi}_x = E_x + iB_x, \bar{\varphi}_y = E_y + iB_y, \bar{\varphi}_z = E_z + iB_z.$$

Аналогично можно записать уравнения для индукций и связи между полями и индукциями.

Следовательно, электродинамика может быть представлена не только на ассоциативной операции, но и на неассоциативной операции. Другими словами, *векторная форма уравнений электродинамики инвариантна относительно выбора типа операций*. Для уравнений **массодинамики**, заданных в векторной форме, ситуация аналогична.

Понятно, что разные формы записи векторных уравнений допускают сложение указанных матричных записей с разными весовыми множителями.

Уравнения механики, если их записать в форме закона равновесия, предполагают структурное выражение для силы.

Наличие «свободных» мест в матричных уравнениях предполагает конструирование обобщений механики, электродинамики, массодинамики. В частности, заполнение «свободных» мест функциями из «других пространств» порождает дополнительные уравнения. Они ассоциированы с уравнениями механики, электродинамики или массодинамики. Аналогично могут быть проанализированы не только эти, но и другие уравнения. Мы имеем алгоритм проявления скрытых степеней свободы физических объектов. Они могут быть учтены в матричных моделях, если их записать на ассоциативных или неассоциативных операциях. Поскольку есть семейство неассоциативных операций, может быть семейство Сознаний и Чувств, ассоциированных с ними. Аналогичное замечание справедливо для ассоциативных операций.

Скрытые свойства физических объектов мы планируем описывать как проявления Сознаний и Чувств физических объектов. Формальных преград для такого моделирования нет. Требуется выход на эмпирику. Без этого согласования двигаться вперед сложно.

Признавая софистатность Тел, Сознаний, Чувств, мы можем принять *софистатность дифференциальных операторов* для каждого из указанных объектов. В этом случае допустимо в полной мере применить для анализа Сознаний и Чувств приемы теоретического анализа, привычные в теории тел. Система операторов обобщена в единой модели электромагнетизма и гравитации. Её можно взять за основу анализа. Другими словами, возможна механика, электродинамика, массодинамика Сознаний и Чувств. Если эта гипотеза найдет применение на практике, то можно будет анализировать Сознания и Чувства по аналогии с поведением физических объектов, а также их состояний и активностей.

Введем для *тензора информации* (к ним мы относим Сознания и Чувства) факторы приема и передачи информации. Обозначим их, соответственно, буквами A, α, β. Величины, применяемые в моделях, получат вид

$$\alpha \overset{f}{\times} A \overset{f}{\times} \beta = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \overset{f}{\times} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \overset{f}{\times} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{pmatrix}.$$

Каждый блок следует описывать на основе «своих» динамических уравнений. В зависимости от того, каковы эти уравнения, задается «тип конструкции» Сознаний и Чувств. Тогда возможна их классификация. С другой стороны, результат изменения и действия анализируемых базовых величин находится в зависимости от типа применяемой функциональной операции. Операции слева и справа от главного блока могут быть разными. *Возможна динамика изменения и комбинаторики операций*. Тривиален вариант, когда

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Он широко применяется при моделировании физических задач. В этом случае, в рамках стандартной функциональной операции, величины, представляющие явления, не зависят от факторов получения и передачи информации. Понятно, что ситуация становится более сложной, если данные факторы также представлены в форме аналогичных конструкций. Тогда получение и передача информации становится предметом самостоятельного анализа, и он может быть эффективен для практики. Заметим, что факторы приема и передачи информации могут относиться к «своим» пространствам. Они могут быть по-разному объединены с базовым пространством наблюдаемых величин.

Тензор информации может быть как «врожденным» (исходным), так и приобретенным, подчиненным совокупности изменений в факторах приема и передачи информации. Дополнительные функции имеют тензорные коэффициенты приема и передачи информации, так как не каждая информация будет принята и передана в полной мере и с высокой степенью достоверности. Между элементами пары (α, A) «вклинивается» элемент $\widehat{\alpha}$. Между элементами пары (A, β) «вклинивается» элемент $\widehat{\beta}$. Дополнительное усложнение рассматриваемой конструкции необходимо по объективным причинам. Соответственно может и должен быть усложнен математический аппарат, применяемый для анализа информации. Новые алгебры и их обобщения естественны при таком подходе.

Заметим, что неассоциативность стандартной функциональной операции получает в развиваемом подходе эмпирическое подтверждение. Действительно, изменения тензора информации зависят от того, что происходит ранее: прием или передача информации. Из практики следует корректность такого результата.

Аналогичные свойства мы обнаруживаем при анализе суммирования информации. Физический аргумент для нарушения дистрибутивности прост: разные системы по-разному принимают информацию. Для анализа ее суммирования требуются дополнительные объекты. Так, например, введем *вариант информационной суммы* вида

$$\alpha \hat{+} A = \alpha + \alpha(A) A = \alpha + Sp(A) A.$$

Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда нарушается аддитивность:

$$\alpha \hat{+} A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \hat{+} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + (a_1 + a_4) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq A \hat{+} \alpha.$$

Нарушается также дистрибутивность:

$$(\alpha \hat{+} A) \hat{+} B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + (a_1 + a_2) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} \neq \alpha \hat{+} (A \hat{+} B),$$

$$\alpha \hat{+} (A \hat{+} B) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \hat{+} \left[\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + (a_1 + a_2 + b_1^2) \left[\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Кроме этого, выполняется неравенство

$$(\alpha \hat{+} A) \hat{+} B \neq (A \hat{+} \alpha) \hat{+} B.$$

Трансфинитность сторон и свойств тензоров информации, равно как и тензоров приема и передачи информации, согласуется с концепцией трансфинитности физической реальности. Возможна ситуация, в которой *мера трансфинитности* Сознаний и Чувств существенно и сущностно превосходит меру трансфинитности сторон и свойств Тел физических объектов. Заметим, что при анализе явлений микромира мы может терять информацию по той причине, что подчиняем ее показаниям физических измерительных приборов. Не учитывается или учитывается недостаточно тот факт, что приборы могут не «улавливать» всю информацию и могут некорректно передавать ее нам.

Информацию удобно представить в форме дополнительной активности физических объектов. В силу принципа софистатности активностей и структур, обобщение тензора информации дополнительными элементами ассоциировано с дополнением структуры исследуемых объектов дополнительными изделиями и элементами. Передача, прием, хранение, оценка информации, говоря другим языком, реализуются только на основе реальных, действующих изделий. Они имеют *технологическое воплощение*. Теоретическое моделирование способно активизировать деятельность в создании новых изделий и новых технологий.

Новым должен стать математический аппарат. Привычные величины, операторы, алгоритмы анализа следует дополнить новыми свойствами, тщательно согласовав их с условием трансфинитности, присущим физической реальности. Такое изменение не может произойти мгновенно. Впереди этап сложной и ответственной деятельности, способной не только изменить нашу практику. Изменимся мы, достигая более высокого уровня гармонии с физической Реальностью, её Сознаниями и Чувствами.

Математический алгоритм приема и передачи информации

Базовая идея проводимого исследования такова: любая *исходная информация*, например, заданная величиной A, имеет в простейшем случае *канал получения информации* в форме величины $\alpha(A)$ и *канал передачи информации* в форме величины $\beta(A)$.

Вследствие этого *эмпирическая информация* $\hat{A}$ характеризуется величиной

$$\hat{A}=\alpha(A)A\beta(A).$$

Мы приходим к обобщению понятия числа. Назовем исследуемые конструкции активными числами. Произведение и сумму активных чисел в этом случае будем вычислять по «своему» алгоритму. Примем *модель согласованного объединения* каналов получения и передачи информации для активных чисел. Пусть

$$\hat{a}+\hat{b}=\alpha(a)a\beta(a)+\alpha(b)b\beta(b)=\alpha(a)\big(a\beta(a)+\alpha(b)b\big)\beta(b),$$

$$\hat{a}\times\hat{b}=\alpha(a)a\beta(a)\times\alpha(b)b\beta(b)=\alpha(a)\big(a\beta(a)\times\alpha(b)b\big)\beta(b).$$

Модель допускает четыре варианта соотношения каналов приема и передачи информации:

$$\begin{gathered}\alpha(a)=\alpha(b),\beta(a)=\beta(b),\\ \alpha(a)\neq\alpha(b),\beta(a)=\beta(b),\\ \alpha(a)=\alpha(b),\beta(a)\neq\beta(b),\\ \alpha(a)\neq\alpha(b),\beta(a)\neq\beta(b).\end{gathered}$$

В зависимости от эмпирической ситуации возможно не только нарушение коммутативности в форме

$$\begin{gathered}\hat{a}+\hat{b}\neq\hat{b}+\hat{a},\\ \hat{a}\times\hat{b}\neq\hat{b}\times\hat{a},\end{gathered}$$

но и нарушение дистрибутивности и ассоциативности:

$$\begin{gathered}\hat{a}+\left(\hat{b}+\hat{c}\right)\neq\left(\hat{a}+\hat{b}\right)+\hat{c},\\ \hat{a}\times\left(\hat{b}\times\hat{c}\right)\neq\left(\hat{a}\times\hat{b}\right)\times\hat{c}.\end{gathered}$$

Ситуация усложняется при рассмотрении величин в форме матриц. Система операций, возможная в этом случае, порождает совокупность множеств. Их свойства будут дополнять друг друга. Они задают полную картину явлений, если полна система величин и применяемая на практике система операций. Одно семейство операций задает информационное сечение практики. Оно может быть удобным и достаточным для отдельных задач. Однако оно не задаёт весь набор свойств и проявлений для исследуемых структур и активностей. Мы приходим на этом пути к обобщениям активных чисел *первого рода*: учету системы операций с анализом их полноты.

Обобщение активных чисел *второго рода* состоит в предположение, что каналы получения и передачи информации могут быть подчинены самостоятельным, динамическим уравнениям. Тогда

$$\hat{L}\alpha(A) = \varphi, \hat{L}\beta(A) = \phi.$$

Обобщение активных чисел *третьего рода* состоит в принятии идеологии описания на основе активных чисел Чувств и Сознаний физических объектов. На этом пути возможны разные модели. Например, канал получения информации будем интерпретировать как характеристику Чувств объекта, получающего информацию. Канал передачи информации будем интерпретировать как характеристику Сознания объекта, передающего информацию. Тогда сложение и произведение величин будет формально согласовано с Чувствами и Сознаниями объектов. Если это объекты одного типа, их каналы получения и передачи информации будут задаваться одинаковыми функциями. *В общем случае эти каналы различны.* Поэтому для анализа реальных ситуаций требуется применять разные функции для каналов приема и передачи информации, а также разные динамические уравнения для них.

Мы приняли ранее постулат софистатности Тел, Сознаний, Чувств. Следовательно, величины, на основе которых предполагается описывать Чувства и Сознания, могут и иногда должны быть ассоциированы с величинами, которыми описываются Тела. В качестве примера рассмотрим вариант моделирования Чувств и Сознаний по аналогии с описанием электромагнетизма и гравитации. Эти физические явления фундаментальны для практики. По этой причине так можно описать некоторые фундаментальные стороны и свойства Чувств и Сознаний. Мы знаем, что единое описание электромагнетизма и гравитации в рамках обобщенных моделей Максвелла и Эйнштейна базируется на тензоре второго ранга Ω_{mn}. Такие величины задают исходную информацию. С ними согласованы, согласно развиваемому подходу, каналы передачи и приема информации в форме величин вида $\alpha(\Omega_{mn}) = \alpha_{mn}, \beta(\Omega_{mn}) = \beta_{mn}$. Эмпирические величины тогда имеют вид

$$\hat{\Omega}_{mn} = \alpha(\Omega_{mn})\Omega_{mn}\beta(\Omega_{mn}) = \alpha_{mn}\Omega_{mn}\beta_{mn}.$$

В зависимости от того, как принимает и передает информацию физический объект, зависит понимание ситуации и практическое применение информации.

На рабочем столе исследователя находится задача теоретического моделирования и экспериментального исследования триады согласованных величин. Чувства, Тела, Сознания образуют единое изделие. Их структура и динамика могут быть разными. Но эти свойства непременно согласованы друг с другом. Заметим, что аналогия Чувств и Сознаний с электродинамикой и массодинамикой предполагает принятие их фундаментальных свойств. Напомним эти свойства. Во-первых, есть электрические и массовые заряды. Во-вторых, есть поступательные и вращательные степени свободы, выраженные в электродинамике понятиями электрического и магнитного полей. В третьих, с полями ассоциированы индукции, без согласования с которыми модель не является полной. В четвертых, динамические уравнения для полей и индукций базируются на дифференциальных операторах, а связи между полями и индукциями базируются на кодифференциальных операторах. В пятых, модель электромагнетизма и гравитации допускает систему деформаций, которая не выходит за рамки набора циклических уравнений. В шестых, анализируемые величины получены на основе экспериментов с использованием системы измерительных устройств.

Все указанные свойства, так или иначе, могут и должны проявить себя при анализе и моделировании Чувств и Сознаний. Более того, поскольку электрические и гравитационные предзаряды фундаментальны для теории электромагнетизма и гравитации, мы вправе ожидать наличия аналогичных предзарядов для Чувств и Сознаний. Но тогда, следуя модели кодонов, базирущейся на четвёрке предзарядов, мы вправе ожидать наличия кодонов для Чувств и Сознаний. В этом случае становится возможной *генная модель Сознаний и Чувств.* Возможны разные атомы и молекулы Чувств и Сознаний. Возможны разные «тела» Сознаний и Чувств, а также изделия из них. Понятно, что с применением модели предзарядов анализ переносится в область существенно субъядерных размеров физической Реальности. Не исключен вариант, что размеры кодонов для фундаментальных Чувств и Сознаний физических объектов настолько малы, что они недоступны нашей экспериментальной практике ни сейчас, ни в будущем. Однако это замечание не исключает, а, наоборот, предполагает теоретический вариант различных ситуаций и возможностей. Понятно, что источником такого анализа может быть аналогия с законами той реальности, которая достижима в наших экспериментах. Однако нельзя полагаться только на этот опыт. Принимая концепцию активных чисел, мы приходим к пониманию, что измерительные устройства не могут всё «почувствовать» и не могут всё адекватно «передать». Было бы некорректно думать, что наши Чувства и Сознания безграничны и безошибочны. У них есть свои уровневые законы, ассоциированные со структурой тел, во многом достаточные для практики. Они развиваются. Так будет всегда. Однако не следует им доверять в полной мере. Они способны только на то, что они сейчас могут. Новая же информация может быть им недоступна или сильно деформирована привычными алгоритмами и методиками практики и её верификации.

Концепция активных чисел позволяет модифицировать теорию изменений. Со времен Ньютона и Лейбница она базируется на системе дифференциальных операторов. Покажем, что активные числа модифицируют их структуру и свойства. Рассмотрим простой пример. Продифференцируем функцию $f\left(x\right)=x^2=x\cdot x$ при применении обычных чисел. Тогда получим

$$\Delta f=\left(x+\Delta x\right)\left(x+\Delta x\right)-x\cdot x\cong 2x\cdot\Delta x,$$
$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=2x.$$

Ситуация меняется при применении активных чисел. Мы имеем два активных числа вида

$$\left(\alpha\left(x\right)x\beta\left(x\right)\right)\left(\alpha\left(x\right)x\beta\left(x\right)\right),$$
$$\left(\alpha\left(x+\Delta x\right)(x+\Delta x)\beta\left(x+\Delta x\right)\right)\left(\alpha\left(x+\Delta x\right)(x+\Delta x)\beta\left(x+\Delta x\right)\right).$$

Выполним произведение вторых чисел, применяя указанный выше алгоритм. Рассмотрим внутреннюю часть этого произведения. Получим

$$\begin{aligned}&(x+\Delta x)(\beta\left(x\right)+\Delta\beta\left(x\right))(\alpha\left(x\right)+\Delta\alpha\left(x\right))(x+\Delta x)=\\&=\left(x\beta\left(x\right)+x\Delta\beta\left(x\right)+\Delta x\beta\left(x\right)+\Delta x\Delta\beta\left(x\right)\right)\left(\alpha\left(x\right)x+\Delta\alpha\left(x\right)x+\alpha\left(x\right)\Delta x+\Delta\alpha\left(x\right)\Delta x\right)=\\&=x\beta\left(x\right)\left(\alpha\left(x\right)x+\Delta\alpha\left(x\right)x+\alpha\left(x\right)\Delta x+\Delta\alpha\left(x\right)\Delta x\right)+\\&+x\Delta\beta\left(x\right)\left(\alpha\left(x\right)x+\Delta\alpha\left(x\right)x+\alpha\left(x\right)\Delta x+\Delta\alpha\left(x\right)\Delta x\right)+\\&+\Delta x\beta\left(x\right)\left(\alpha\left(x\right)x+\Delta\alpha\left(x\right)x+\alpha\left(x\right)\Delta x+\Delta\alpha\left(x\right)\Delta x\right)+\\&+\Delta x\Delta\beta\left(x\right)\left(\alpha\left(x\right)x+\Delta\alpha\left(x\right)x+\alpha\left(x\right)\Delta x+\Delta\alpha\left(x\right)\Delta x\right)\cong\end{aligned}$$

$$\cong x\beta(x)\alpha(x)x + x\beta(x)\Delta\alpha(x)x + x\beta(x)\alpha(x)\Delta x +$$
$$+x\Delta\beta(x)\alpha(x)x + \Delta x\beta(x)\alpha(x)x + \Delta x\beta(x)\Delta\alpha(x)x + +\Delta x\Delta\beta\alpha(x)x \cong$$
$$\cong x\beta(x)\alpha(x)x + x\beta(x)\alpha(x)\Delta x + \Delta x\beta(x)\alpha(x)x + x\Delta\beta(x)\alpha(x)x + x\beta(x)\Delta\alpha(x)x = \Xi.$$

Получим

$$\delta\left(x^2\right) = \alpha(x+\Delta x)\Xi\beta(x+\Delta x) - \left(\alpha(x)x\beta(x)\right)\left(\alpha(x)x\beta(x)\right) \cong$$
$$\cong \alpha(x)\Xi\beta(x) - \left(\alpha(x)x\beta(x)\right)\left(\alpha(x)x\beta(x)\right) =$$
$$= \alpha(x)(x\beta(x)\alpha(x)\Delta x + \Delta x\beta(x)\alpha(x)x + x\Delta\beta(x)\alpha(x)x + x\beta(x)\Delta\alpha(x)x)\beta(x).$$

Производная для активного числа имеет вид

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(x)(x\beta(x)\alpha(x)\Delta x + \Delta x\beta(x)\alpha(x)x + x\Delta\beta(x)\alpha(x)x + x\beta(x)\Delta\alpha(x)x)\beta(x)}{\Delta x} =$$
$$= \alpha(x)(x\beta(x)\alpha(x) + \beta(x)\alpha(x)x + x\beta(x)\frac{d\alpha(x)}{dx}\alpha(x)x + x\frac{d\beta(x)}{dx}\alpha(x)x)\beta(x) = \frac{d\left(\hat{x}\cdot\hat{x}\right)}{dx}.$$

Если произведение не зависит от порядка сомножителей, получим

$$\frac{d_n\left(\hat{x}\cdot\hat{x}\right)}{dx} = \alpha(x)(2x\alpha(x)\beta(x) + x^2\frac{d(\alpha(x)\beta(x))}{dx})\beta(x).$$

Назовем такое произведение простым. Если факторы приема и передачи информации тривиальны, обеспечивая выполнение условий

$$\alpha(x) = \beta(x) = 1,$$

получим стандартное выражение для производной от функции $f(x) = x^2$. Этот вариант моделирования соответствует традиционному анализу параметров физической системы. Принимается возможность получения исходной информации без анализа и учета «чувствований» измерительных устройств, а также без учета «осознания» этих данных в процессе их передачи потребителю. Конечно, такой вариант выражает уверенность в отсутствии Чувств и Сознаний у измерительных устройств. Но ведь на самом деле этого нет. Более того, при взаимодействии людей в обмене информацией неизбежно присутствуют элементы Чувств и Сознаний.

Принимая принцип софистатности объектов реального мира, мы обязаны учитывать Сознание и Чувства у каждого объекта. Концепция активных чисел позволяет материализовать такую возможность математическими средствами. Мы получаем в пользование новые алгоритмы и инструменты анализа. Оценить их роль и перспективу в настоящее время сложно.

Однако уже теперь есть ощущение нового качества в подходе к экспериментам, к теории, к оценкам и перспективам моделирования. Ведь при наличии системы Сознаний и Чувств мы обязаны принимать механизмы их взаимного влияния. По этой причине может быть так, что не мы изучаем реальный мир, а он изучает нас, проявляя и показывая свои стороны и свойства. Но тогда желательно вести практику таким образом, чтобы наши отношения были гармоничны, чтобы мир объектов «желал» практиковать совместно с нами.

Скрытые решения, уравнения, логики

Применение системы операций взамен одной операции соответствует принципу трансфинитности физической Реальности: операции образуют согласованную систему, они взаимно дополняют друг друга, у них есть разнообразные свойства. Модели, описывающие Реальность, получают при таком подходе систему свойств. Они могут и должны проявлять себя в решениях уравнений и в свойствах системы уравнений. Проведем начальный анализ этой совокупности проблем. Примем гипотезу: возможно нахождение скрытых решений и скрытых систем уравнений на основе любой практически полезной расчетной модели.

Начнем анализ с рассмотрения системы линейных алгебраических уравнений. Зададим её матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \overset{\xi}{\times} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Оно базируется на управляющей операции $\overset{\xi}{\times}$, которую можно задавать согласно вспомогательным соображений, а также на стандартной матричной операции $\overset{m}{\times}$. Понятно, что так конструируется модель, допускающая систему линейных алгебраических уравнений. Уравнения будут разными в зависимости от того, как задана управляющая операция. Если управляющая операция есть стандартная матричная операция, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Её решение задаёт точку с координатами

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \, y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Рассмотрим функциональную операцию, посредством которой фундаментальные уравнения физики можно записать на основе матричного представления электрических предзарядов. Тогда

$$x = \frac{b_1}{a_{11}}, \, y = \frac{b_2}{a_{22}}.$$

На стандартной комбинаторной операции получим систему уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} + a_{12})\hat{x} = b_1, \\ (a_{21} + a_{22})\hat{y} = b_2. \end{cases}$$

Она также задает точку на плоскости. Её координаты отличаются от координат, полученных из исходной модели на матричной операции. Это естественно, потому что разные операции порождают разные системы уравнений. Однако уже сейчас мы вправе говорить о наличии решений, скрытых за системой операций. Принимая наличие пары операций, одну из них можно считать скрытой. Она порождает скрытые решения. Понятно, что в данном случае результат не изменится, если рассматривается комбинаторная операция в форме произведения строки на строку.

Другими словами, скрытые решения могут иметь вырождение по операциям: разным операциям соответствует одно и то же решение.

Рассмотрим ту же задачу в другой формулировке. Зададим модель в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \overset{\xi}{\times} \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Применение матричной операции в данном случае не дает новых решений. Мы обнаруживаем здесь возможность вырождения решений по форме модели: решения могут быть одни и те же при разных формах модели.

Ситуация меняется, если применить комбинаторные произведения. Стандартное комбинаторное произведение порождает две системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{11}x + a_{12}y = b_1, \end{cases} \begin{cases} a_{21}x + a_{22}y = b_2, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Их решения задают пару точек на плоскости с координатами

$$x_1 = y_1 = \frac{b_1}{(a_{11} + a_{12})}, x_2 = y_2 = \frac{b_1}{(a_{21} + a_{22})}.$$

Ранее стандартная комбинаторная операция дала решения вида

$$\hat{x} = \frac{b_1}{(a_{11} + a_{12})}, \hat{y} = \frac{b_2}{(a_{21} + a_{22})}.$$

Они сконструированы на основе объединения координат двух предыдущих решений. Следовательно, эта операция порождает три скрытых решения, формируя некоторый скрытый треугольник. Он «не наблюдается» при анализе модели, если она базируется только на матричной операции. Объединение данного треугольника с исходной точкой порождает скрытый симплекс в форме пирамиды.

Рассмотрим модель

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \overset{\xi}{\times} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{pmatrix}.$$

На стандартной комбинаторной операции она дает решения

$$x_1 = y_1 = z_1 = \frac{b_1}{a_{11} + a_{12} + a_{13}}, x_2 = y_2 = z_2 = \frac{b_2}{a_{21} + a_{22} + a_{23}}, x_3 = y_3 = z_3 = \frac{b_3}{a_{31} + a_{32} + a_{33}}.$$

Точка в трехмерном пространстве дополняется системой, состоящей из трех точек, расположенных в евклидовом пространстве на одной прямой. Точка дополнена скрытым «отрезком», физический смысл которого пока не установлен. Однако то обстоятельство, что точки расположены на одной прямой, свидетельствует о наличии некоторого физического фактора, который обеспечивает это расположение. Расположение, а потому и динамика данного «отрезка», зависят от динамики элементов исходной матрицы и «силового» выражения.

Его инвариант при преобразованиях координат есть шпур

$$SpB = b_1 + b_2 + b_3.$$

Если рассматривать эти слагаемые как компоненты вектора, мы получаем сумму компонент вектора в качестве инварианта решений модели, ассоциированной со стандартной комбинаторной операцией.

По аналогичной методике можно конструировать скрытые системы уравнений. Покажем это на примере уравнений Фарадея-Ампера. Запишем их в виде условия равновесия на матрицах

$$\begin{pmatrix} -\partial_z & \partial_\tau & \partial_x & -\partial_y \\ \partial_\tau & \partial_z & -\partial_y & -\partial_x \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & \partial_\tau \\ \partial_y & -\partial_x & \partial_\tau & -\partial_z \end{pmatrix} \overset{\xi}{\times} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\partial_z & \partial_\tau & \partial_x & \partial_y \\ \partial_\tau & \partial_z & -\partial_y & \partial_x \\ -\partial_x & -\partial_y & -\partial_z & \partial_\tau \\ \partial_y & -\partial_x & \partial_\tau & \partial_z \end{pmatrix} \overset{\xi}{\times} \begin{pmatrix} \bar\alpha & \bar\alpha & \bar\alpha & \bar\alpha \\ \bar\beta & \bar\beta & \bar\beta & \bar\beta \\ \bar\gamma & \bar\gamma & \bar\gamma & \bar\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\tau = \dfrac{(-i)}{c}\partial_t, \alpha = E_x - iB_x, \beta = E_y - iB_y, \gamma = E_z - iB_z, \bar\alpha = E_x + iB_x, \bar\beta = E_y + iB_y, \bar\gamma = E_z + iB_z.$

Запишем вариант стандартного комбинаторного произведения первой строки на первый столбец. Оно базируется на раскрытии выражений вида

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -\partial_z & \partial_\tau & \partial_x & -\partial_y \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \hline 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \gamma & 0 & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & 0 & \alpha \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{f}{\times} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим уравнения

$$\begin{aligned} &-\partial_z E_x + \partial_\tau E_y + \partial_x E_z = 0, \\ &\partial_\tau E_x + \partial_x E_y + i\partial_y B_z = 0, \\ &-\partial_z E_z + \partial_x E_x + i\partial_y B_y = 0, \\ &-\partial_z E_y + \partial_\tau E_z + i\partial_y B_x = 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение совпадает с уравнением, следующим из стандартной матричной теории, применяемой в электродинамике Максвелла: неассоциативная модель электромагнитных явлений порождает уравнения ассоциативной модели.

Остальные три уравнения новые. Они образуют множество скрытых уравнений, непривычных по структуре дифференциальных операторов. Они не анализировались в теории электромагнетизма. Величины, подчиненные таким условиям, можно рассматривать как грани свойств электромагнитных явлений, скрытые от проводимых экспериментов. В этом варианте есть четыре «грани» электромагнитных явлений. У них есть новые свойства:

- они могут отображать независимые свойства явления, ассоциированные с некими дополнительными условиями,
- они могут быть по-разному согласованы друг с другом,
- они могут быть обобщены на основе замены нулевой матрицы матрицей с ненулевыми элементами

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

- в них может быть выполнена замена «единичной матрицы» Λ, применяемой на основе функционального произведения, на неединичную матрицу, подчиненную независимым динамическим уравнениям.

Наличие «явных» и «скрытых» свойств обобщает модель в неожиданном направлении. Явления, а потому и структуры, ассоциированные с ними, имеют «грани», описываемые разными системами уравнений.

Тогда, например, получим уравнения

$$\begin{aligned} &\partial_\tau E_x + \partial_x E_y + i\partial_y B_z = a_{21}, \\ &-\partial_z E_z + \partial_x E_x + i\partial_y B_y = a_{31}, \\ &-\partial_z E_y + \partial_\tau E_z + i\partial_y B_x = a_{41} \ldots \end{aligned}$$

Коэффициенты в этих уравнениях заданы в согласии с единичной матрицей Λ. В общем случае они могут быть обобщены на основе системы дополнительных функций. Скрытые свойства могут проявляться в модели на основе этих дополнительных элементов. Они модифицируют полученные величины в наблюдаемые или управляющие.

Система уравнений одного уровня может иметь *«свои» средства для их обнаружения и практического применения*.

Чтобы проще описать данную картину явлений, примем точку зрения, что каждая система уравнений действует на свой «заряд». Тогда стандартные уравнения электродинамики «приспособлены» для описания воздействия электромагнитной материи на электрические заряды. Эта же материя действует и на другие «заряды» в соответствии со своими законами. Так «приоткрывается тайна» возможного «акустического», «ментального», «чувственного» воздействия физических объектов друг на друга.

Понятно, что практика анализа только механических перемещений объектов недостаточна для построения полной картины явлений и понимания этих явлений. К явным законам, привычным для практики, следует «присоединить» законы, скрытые от наблюдений. Такова любая модель. В каждой из них скрытых свойств значительно больше, чем явных свойств. Так происходит потому, что большинство законов, которые нам известны и применяются на практике, получены на основе стандартных матричных операций. Они ассоциативны и дают корректную информацию о явлениях. Однако теория допускает множество операций, не тождественных матричной операции. По этой причине обнаруживаются новые грани и свойства изделий и явлений. Такой подход соответствует требованию построения трансфинитных моделей физической реальности.

Новые данные могут быть ассоциированы с новыми экспериментальными средствами. Априори нет оснований допустить, что мы всегда сможем их сконструировать и изготовить. У Реальности могут быть «рычаги», недоступные нам и нашей практике. Это хорошо, так как сдерживает гордыню нашу, удерживает нас в определенных рамках логики и поведения. Однако, заметим, скрытые уравнения и скрытые решения приоткрывают для нас завесу тайны, недоступной ранее. Возможно, для согласования новых данных между собой понадобятся не только новые алгоритмы анализа и эмпирические средства, но и новая логика. Ведь если есть скрытые явления у объектов и явлений, они обязаны быть и у логики. Анализ *скрытой логики* представляет собой самостоятельную проблему.

Новые законы

$$\{x,[y,z]\}+[x,\{y,z\}]-[\{x,y\},z]-\{[x,y],z\}-2(x,y,z)-2(z,y,x)=0$$

$$\partial_m(\partial_k\Phi_{nl}-\partial_n\Phi_{kl})+\partial_l(\partial_n\Phi_{km}-\partial_k\Phi_{nm})=0$$

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}w}},t'=\frac{t-\frac{u}{c^2}wx}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}w}}$$

$$f(g_1)+f(g_2)=0,$$
$$f(g_1g_2)+f(g_2g_1)=0,$$
$$g_1f(g_2)+g_2f(g_1)=0,$$
$$f(g_1g_2)=f(g_1)g_2-f(g_2).$$

$$\frac{dx'}{dt'}=\frac{\frac{dx}{dt}-u}{1-\frac{uwn^2}{c^2}\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dx}{dt}-u}{1-\frac{u}{\tilde{c}^2}\frac{dx}{dt}}\Rightarrow z'=\frac{az+b}{pz+q}$$

$$\frac{N_a}{Z}=\frac{1}{A^{-1}\exp(P_a\xi)+\sigma}=\bar{n}$$

$$y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(\left(y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(x\underset{lc}{\overset{k}{\times}}z\right)\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}y\right)\right)=\left(\left(y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(\left(x\underset{lc}{\overset{k}{\times}}z\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}y\right)\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}y\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}y.$$

$$\left(a\overset{*}{+}b\right)\overset{*}{+}\left(c\overset{*}{+}d\right)=\begin{pmatrix}a_1+b_3+c_3+d_1 & a_2+b_4+c_4+d_2\\ a_3+b_1+c_1+d_3 & a_4+b_2+c_2+d_4\end{pmatrix}=\left(d\overset{*}{+}c\right)\overset{*}{+}\left(b\overset{*}{+}a\right)$$

$$\left(a\overset{*}{+}c\right)\overset{*}{+}\left(b\overset{*}{+}d\right)=\left(a\overset{*}{+}b\right)\overset{*}{+}\left(c\overset{*}{+}d\right)$$

$$(a\overset{*}{+}b)\overset{*}{+}\left\lfloor\left(c\overset{*}{+}d\right)\overset{*}{+}\left(e\overset{*}{+}f\right)\right\rfloor=\left\lfloor(a\overset{*}{+}b)\overset{*}{+}(c\overset{*}{+}d)\right\rfloor\left\lfloor 0\overset{*}{+}(e\overset{*}{+}f)\right\rfloor$$

$$(\alpha\hat{+}A)\hat{+}B\neq(A\hat{+}\alpha)\hat{+}B$$

$$\hat{a}=\alpha(a)a\beta(a),\hat{b}=\alpha(b)b\beta(b)$$
$$\hat{a}\mp\hat{b}=\alpha(a)\big(a\beta(a)\pm\alpha(b)b\big)\beta(b)\neq\alpha(b)\big(b\beta(b)\pm\alpha(a)a\big)\beta(a)=\hat{b}\pm\hat{a}$$
$$\hat{a}+\left(\hat{b}+\hat{c}\right)\neq\left(\hat{a}+\hat{b}\right)+\hat{c}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии представлены некоторые результаты анализа новых связей фундаментальной физики и математики. Проанализировано соотношение теории конечных групп с теорией непрерывных групп. Выведена система математических операций, ассоциированная с группой перестановок. Найдены универсальные законы для алгебр, независимые от мультипликативной операции. Они справедливы для ассоциативных и неассоциативных множеств. Предложены варианты анализа взаимодействия электрических и гравитационных предзарядов на основе обобщенной теории равновесия. Установлена связь общей теории равновесия с теорией когомологий групп и алгебр. Предложена концепция функциональных алгебр как фундамент любой физической модели. Рассмотрен вариант динамической статистики, частными случаями которой являются статистики Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака. Поставлена задача управления физическими законами на основе алгоритма деформации операций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барыкин В.Н. К новому качеству физической теории света. Минск: «Ковчег», 2011, 76с.
2. Барыкин В.Н. Курс фундаментальной физики. Минск: «Ковчег»,2012,442 с.
3. Барыкин В.Н. К новому качеству физической теории. Минск: «Ковчег»,2013, 222 с.
4. Барыкин В.Н. Уроки света. Минск: «Ковчег»,2013, 172 с.
5. Барыкин В.Н. Неассоциативность на комбинаторной операции. Минск: «Ковчег»,2011, 234 с.
6. Барыкин В.Н. Основы трансфинитной теории относительности. Минск: «Ковчег», 2007, 316 с.
7. Барыкин В.Н. Этика привычек. Минск: «Ковчег», 2013, 356 с.
8. Барыкин В.Н. Модели Сознаний и Чувств. Минск: «Ковчег», 2013, 280 с.

Эти работы представлены на сайте **www.noton.by**

Приложение 1. **Таблицы произведений матриц группы заполнения**

	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
a_1	$-e$	$-a_3$	a_2	$-c_2$	f_3	$-e_2$	$-e_1$	b_1	f_1
a_2	a_3	$-e$	$-e_3$	$-e_3$	$-c_1$	$-f_1$	b_2	$-f_2$	$-e_2$
a_3	$-a_2$	a_1	$-e$	f_2	$-e_1$	$-c_3$	$-f_3$	$-e_3$	b_3
b_1	$-c_2$	$-e_3$	f_2	$-e$	b_3	$-b_2$	f_1	a_1	$-e_1$
b_2	f_3	$-c_1$	$-e_1$	$-b_3$	$-e$	b_1	a_2	$-e_2$	$-f_2$
b_3	$-e_2$	$-f_1$	$-c_3$	b_2	$-b_1$	$-e$	$-e_3$	$-f_3$	a_3
c_1	e_1	b_2	f_3	$-f_1$	a_2	e_3	e	c_3	c_2
c_2	b_1	f_2	e_3	a_1	e_2	f_3	c_3	e	c_1
c_3	$-f_1$	e_2	b_3	e_1	f_2	a_3	c_2	c_1	e
e_1	$-c_1$	$-f_3$	b_2	$-c_3$	a_3	$-f_2$	$-a_1$	$-f_1$	$-b_1$
e_2	b_3	$-c_3$	f_1	$-f_3$	$-c_2$	a_1	f_2	$-b_2$	$-a_2$
e_3	$-f_2$	b_1	$-c_2$	a_2	f_1	$-c_1$	$-b_3$	$-a_3$	f_3
f_1	c_3	b_3	$-e_2$	c_1	$-e_3$	a_2	b_1	$-e_1$	a_1
f_2	e_3	$-c_2$	$-b_1$	$-a_3$	$-c_3$	e_1	e_2	$-a_2$	$-b_2$
f_3	$-b_2$	e_1	$-c_1$	e_2	$-a_1$	$-c_2$	$-a_3$	$-b_3$	e_3

	e_1	e_2	e_3	f_1	f_2	f_3
a_1	c_1	b_3	f_2	$-c_3$	$-e_3$	$-b_2$
a_2	f_3	c_3	b_1	b_3	c_2	$-e_1$
a_3	b_2	$-f_1$	c_2	e_2	$-b_1$	e_1
b_1	c_3	f_3	a_2	$-c_1$	$-a_3$	$-e_2$
b_2	a_3	c_2	$-f_1$	e_3	c_3	$-a_1$
b_3	f_2	a_1	c_1	a_2	$-e_1$	c_2
c_1	a_1	f_2	b_3	$-b_1$	e_2	a_3
c_2	$-f_1$	b_2	a_3	$-e_1$	a_2	b_3
c_3	b_1	a_2	f_3	$-a_1$	b_2	e_3
e_1	e	e_3	e_2	$-c_2$	$-b_3$	$-a_2$
e_2	e_3	e	e_1	a_3	c_1	$-b_1$
e_3	e_2	e_1	e	b_2	$-a_1$	c_3
f_1	$-c_2$	$-a_3$	$-b_2$	e	f_3	f_2
f_2	b_3	c_1	a_1	f_3	e	f_1
f_3	a_2	b_1	c_3	f_2	f_1	e

Здесь использованы матрицы:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, e_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$c_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, f_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}, b_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$c_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, f_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$c_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}, f_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}, a_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Приложение 2. **Новые связи физики и геометрии**

Заметим, что комбинаторное произведение порождает систему тождеств для конечной совокупности элементов (подмножеств), принадлежащих неассоциативному множеству. Выберем, например, подмножество, состоящее из элементов

$$x=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, z=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Используя комбинаторное произведение, получим

$$\left(x\overset{k}{\underset{cl}{\times}}y\right)\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\left(z\overset{k}{\underset{cl}{\times}}x\right)=x\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\left(\left(z\overset{k}{\underset{cl}{\times}}y\right)\overset{k}{\underset{cl}{\times}}x\right).$$

Оно аналогично известному тождеству Муфанг для лупы. Истинное тождество

$$\left(x\overset{k}{\underset{cl}{\times}}y\right)\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\left(z\overset{k}{\underset{cl}{\times}}x\right)=x\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\left(\left(y\overset{k}{\underset{cl}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{cl}{\times}}x\right)$$

не выполняется. Не выполняется и аналогичное предыдущему тождество вида

$$\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x=x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right).$$

Его можно обобщить. Получим

$$z\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)=\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z.$$

Тождество соответствует правилу повторного умножения пары элементов из выбранной тройки. Оно выполняется также для тройки элементов

$$x=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},z=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Не выполняется для указанной тройки элементов тождество Болла:

$$x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)=\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z.$$

Его можно обобщить. Получим

$$y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\right)=\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}y.$$

На тройке элементов

$$x=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},z=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

выполняется тождество Болла. Выполняется также обобщенное тождество Муфанг вида

$$\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z=z\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right).$$

Выберем элементы, представляющие свободный объект x, гравитационный предзаряд y, электрический предзаряд z:

$$x=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},z=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

Для них выполняется тождество Муфанг. Выполняется также условие

$$x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)=\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x.$$

В данном случае один элемент из выбранной тройки элементов используется четыре раза.

Мы знаем, что у разных физических объектов есть разные свойства. Различны они и у совокупности объектов. Задача состоит в том, чтобы научиться эффективно описывать структуру и взаимодействие объектов, используя различные экспериментальные и математические средства. Интересно также учесть структуру объектов и ее проявления в динамике. Обратим внимание на специфику подхода, основанного на комбинаторной операции. С одной стороны, мы сопоставляем физическим объектам совокупность матриц. Поскольку совокупности матриц имеют разные свойства, через них мы учитываем разные свойства физических объектов. С другой стороны, мы используем для матриц комбинаторные операции. Они позволяют подчинить совокупности матриц математическим законам. Пример такого закона есть условие Муфанг. Более сложный закон композиции означает, что есть сложные физические объекты: например, к паре элементов в определенном порядке (согласно «коду») присоединены четыре других объекта. В рассматриваемой выше композиции к электрическому и гравитационному предзарядам присоединены четыре «свободных» объекта. Аналогичное правило действует при других композициях. Они описывают физические объекты с преобладанием электрической или гравитационной составляющей. Мы получаем возможность рассматривать физические связи как следствие «математического кода», которому подчинены совокупности элементов и их соединения. Объекты и связи создаются только в определенном порядке. Естественно ожидать, что «разбирать» их нужно тоже только в определенном порядке.

Анализ показал, что для выбранной совокупности элементов выполняется условие

$$y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(\left(y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(x\underset{lc}{\overset{k}{\times}}z\right)\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}y\right)\right)=\left(\left(y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(\left(x\underset{lc}{\overset{k}{\times}}z\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}y\right)\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}y\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}y.$$

Оно соответствует «коду» создания объектов, имеющих массу, так как в композиции преобладают гравитационные предзаряды, которым сопоставлена матрица y. При преобладании в композиции электрических предзарядов в рамках рассматриваемой совокупности элементов выполняется другой закон:

$$z\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(\left(z\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(z\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}x\right)\right)\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}z\right)=\left(z\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(\left(\left(y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}x\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}z\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}z\right)\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}z.$$

Этого следовало ожидать, так как свойства электрических и гравитационных предзарядов различны. Было бы странно, если бы для них выполнялся один и тот же закон композиции. Его можно было бы оправдать на некоторой стадии создания объектов из праматерии, но все равно следовало бы найти условия, при которых эти законы будут разными. В рассматриваемом варианте отличие имеет место в первичных законах композиции. Мы понимаем, что «свободные» объекты могут иметь свойства гравитационного типа, могут они иметь и свойства электрического типа, ведь пара предзарядов может быть получена из них. Закон «гравитационной» композиции для «свободных» объектов подтвержден. Выполняется ли он для «электрической» композиции? Проверка показала, что в совокупности элементов выполняется условие

$$x\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(\left(x\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(x\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}z\right)\right)\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}x\right)=\left(x\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(\left(\left(y\underset{lc}{\overset{k}{\times}}z\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}x\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}x\right)\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}x.$$

Следовательно, три элемента математически и физически согласованы между собой. Согласование имеет оттенок, который проявляется при морфологической или графической записи найденных произведений. Для гравитационных предзарядов получим формулы:

$$B(xz)L(y)R(y)L(y)L(y), B(xz)R(y)L(y)R(y)R(y).$$

Для электрических предзарядов получим формулы:

$$\widetilde{B}(yx)L(z)L(z)R(z)L(z), \widetilde{B}(yx)R(z)R(z)L(z)R(z).$$

Они имеют как бы обратный порядок. Здесь через $B, \widetilde{B}$ обозначаются начальные элементы, символ L означает, что произведение выполняется слева, символ R означает, что произведение выполняется справа. В графическом представлении мы имеем дело с одной и той же структурной диаграммой («ключом»). Она «проходится» с одной стороны в случае гравитационных предзарядов и с другой стороны в случае электрических предзарядов.

Есть в рассматриваемом множестве равенства с неограниченным числом одинаковых элементов. В частности, выполняется «зеркальная» формула:

$$\langle z\rangle z((xy)z) = (z(yx))z\langle z\rangle.$$

Здесь элемент $\langle z\rangle$ означает конечную последовательность произведений элементов z, учитываемых слева или справа согласно формуле. Она может иметь слева и справа разное количество элементов. Морфологические формулы таковы:

$$B(xy)R(z)L(z)L(z)L(z)L(z)L(z)..., \widetilde{B}(yx)L(z)R(z)R(z)R(z)R(z)R(z)...$$

Исследуемое множество

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

подчинено также закону вида

$$B(yz)R(x)L(x)R(y)L(y)R(z)L(z) = \widetilde{B}(zy)L(x)R(x)L(y)R(y)L(z)R(z).$$

Мы получили как бы две «пружины» с разной ориентацией. При последнем умножении первого выражения слева на z, равно как и при последнем умножении второго выражения справа на z, мы получаем итоговый элемент z. По этой причине, умножив первую цепочку слева на y, а вторую цепочку справа на y мы приходим к начальным элементам yz, zy. Следовательно, цепочка может быть продолжена дальше. Начальные элементы выступают в роли «поперечных сечений» изделия, представленного графически. Примем предположение, что найденный математический закон софистатен физическому изделию в форме некоторой «силовой линии». Это означает, что комбинаторная операция на неассоциативном множестве способна в форме математического закона отобразить реальную физическую конструкцию. Тогда исследование всех возможных форм математического закона (или их совокупности) подсказывает возможные физические изделия, которые могут быть изготовлены из базовых объектов. Данную модель можно рассматривать как аналог двойной спирали ДНК с тремя кодонами $2x, 2y, 2z$. Конечность длины «спирали», с физической точки зрения, обусловлена способностью системы удерживать только конечное число базовых элементов. Модель может приблизиться к физике, если будет найден алгоритм расчета «энергетических» свойств предлагаемых наглядных конструкций. Обратимся к анализу математических свойств квазигрупп и луп. Отметим, в частности, результат Киккава. Согласно его исследованиям, пространство аффинной связности допускает построение в окрестности любой точки совокупности луп. Их анализ основан на построении реальной «петли», узел которой есть выбранная точка. От неё по неортогональным геодезическим выполняются смещения, которые затем замыкаются в форме «прямоугольника». Такие «петли» классифицированы Акивисом, и они связаны с тензором кручения и кривизны аффинного пространства. Математический расчет геометрических свойств «петель» основан на стандартных матричных операциях. Примем гипотезу о соответствии «петли» в пространстве аффинной связности с законом композиции матриц, базирующемся на комбинаторной операции. Посмотрим с такой точки зрения на условие Муфанг вида

$$(z(xy))z = z((xy)z).$$

Оно выполняется на тройке элементов, выбранных выше. С математической точки зрения сопоставлению соответствует простая «картина»:

- выбирается объект (xy) и точка в аффинном многообразии, ассоциированная с (xy),
- умножение матрицы, представляющей физический объект, слева на z ассоциируется с перемещением выбранной точки по одной геодезической пространства аффинной связности,
- умножение матрицы, представляющей физический объект, справа на z , ассоциируется с перемещением по другой геодезической пространства аффинной связности,
- условие Муфанг означает, с одной стороны, что в итоге получается один и тот же физический объект, с другой стороны, что перемещения в пространстве аффинной связности, выполненные в прямом и обратном порядке, «сходятся» одной точке, образуя «петлю».

С физической точки зрения ситуация выглядит так. Мы имеем пространство аффинной связности, сконструированное с учетом некоторых физических свойств исследуемого взаимодействия. Эти свойства выражены через тензор кручения и кривизны пространства аффинной связности. Кроме этого, мы имеем совокупность физических объектов. Они представлены матрицами и подчинены комбинаторной операции. На этой основе существуют законы композиции матриц, учитывающие свойства взаимодействия физических объектов. Этим же свойствам можно поставить в соответствие поведение траекторий точечных физических тел в пространстве аффинной связности, согласовывая их со свойствами композиции для матриц.

Следовательно, разные физические объекты будут двигаться в пространстве аффинной связности по разным траекториям. Задача состоит в том, чтобы изучить совокупность вопросов, появившихся при такой постановке задачи. Требуется также выполнить классификацию типов объектов и типов траекторий, которые им соответствуют. Аналогичные действия необходимы при анализе движений тел Сознаний и Чувств. Во-многом понятно, что в этих случаях *требуется новая Геометрия*.

Простые идеи были путеводной звездой выполненного исследования:

- есть трансфинитное соответствие между физическими структурными объектами и математическими структурными объектами, роль которых была возложена на матрицы,
- есть трансфинитное соответствие между свойствами структурных физических объектов, проявляющимися во взаимодействиях и свойствами математических операций, которым подчинены матрицы и величины, присоединенные к ним,
- исследование системы матриц с системой операций, присоединенных к ним, является ключом к пониманию структуры и взаимодействия реальных физических объектов,
- исследование структуры матриц и системы операций с ними позволяет разработать алгоритмы конструирования структурных физических объектов, имеющих разнообразные свойства.

Приложение 3. **Замечание о границах скорости**

При анализе проблемы учета скоростей в физике требуется принять во внимание пару физических движений, дополняющих друг друга: физический объект обычно имеет поступательное и вращательное движение. Эта пара движений согласована друг с другом. Если мы изучаем свет, то эта пара движений всегда проявляет себя в эксперименте. По этой причине мы вправе моделировать свет набором физических частиц, а при сравнении измеренных параметров учитывать не только пространственные перемещения, но и изменения частот. Эти обстоятельства могут быть частично описаны на основе алгоритма изменения интервалов времени для разных инерциальных наблюдателей.

Электродинамика без сингулярностей использует соотношение между дифференциалами времен

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}n^2 w dx\right),$$

в котором

$$u = (1-w)u_{fs} + wu_m,$$

$$w = 1 - \exp\left(-P_\lambda \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Из него следует, что характерная скорость регулируется парой параметров

$$\tilde{c} = \frac{c}{n\sqrt{w}}.$$

Это выражение гарантирует возможность очень малых значений скоростей при больших значениях показателя преломления, когда $n \to \infty$, а также очень больших значений скоростей при малых значениях показателя отношения, когда $w \to 0$.

Данное обстоятельство можно рассматривать как *важнейший* стимул для нашей практики, ведь *уровень развития цивилизации можно оценить по диапазону скоростей, используемых на практике.*

Заметим, что принимая гипотезу рождения света из гравитации, мы *вправе допускать самые разные, в том числе и неограниченные скорости гравитации.* Речь идет о возможности физических условий существования изделий, которые принципиально отличаются от условий, проанализированными нами и привычных для нас. Это замечание естественно согласуется с принципом трансфинитности, распространенным на скорости: если есть ограниченные скорости, то могут быть и неограниченные скорости.

Приложение 4. **Операционная инвариантность физических законов**

Рассмотрим комбинаторное произведение пары мономиальных матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результат их произведения не меняется при использовании разных комбинаторных произведений: строк на строки, столбцов на столбцы, строк на столбцы или столбцов на строки. Так получается потому, что эти матрицы совпадают с транспонированными матрицами: $A = A^t$. По этой причине подгруппа Клейна выделена среди других подгрупп полной комбинаторной группы. Мы знаем, что именно она удобна для анализа электромагнитных и гравитационных явлений при расширении этой симметрии посредством знаковой группы. Возникает предположение, что в полной системе отношений между объектами, которые можно задать матрицами, есть **отношения, инвариантные относительно системы операций**. Другими словами, есть несколько вариантов получения одного и того же итога при разных «взаимодействиях». В данном случае, следуя ранее принятой интерпретации, гравитационные предзаряды могут разными способами «порождать» электрические предзаряды, представляемые заполненными строками или столбцами. Мы можем говорить о *структурной операционной инвариантности*: одни и те же структуры получаются из одного исходного материала разными способами.

Естественно предположить, в силу принятого ранее принципа соответствия структур и активностей, что может иметь место операционная инвариантность активностей. На простом примере убедимся в наличии такой возможности. Хорошо известно, что элементы сигруппы Галилея-Лорентца, выраженные матрицами вида

$$x = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix}, y = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix},$$

подчинены *на матричной операции* закону

$$(yx)x^2 = (yx^2)x.$$

Этот закон, как доказано в электродинамике без ограничения скорости, выражает релаксационные свойства электромагнитного поля, задает активность поля при взаимодействии. Эти свойства имеют фундаментальное значение для понимания сущность динамических процессов в электродинамике. Выполним *стандартное комбинаторное произведение* указанных матриц друг на друга. Легко видеть, что данный закон не меняется. Следовательно, имеет место *операционная инвариантность активностей*. Мы получаем закон для закона: есть фундаментальные законы, инвариантные относительно системы операций.

Группа Клейна и сигруппа Галилея-Лоренца относятся к категории фундаментальных элементов физической модели. В рамках принятого подхода они операционно инвариантны. Так обнаружен *новый критерий фундаментальности* элементов модели: их операционная инвариантность.

Приложение 5. **Философские аспекты моделирования операций**

Анализ структур и активностей объектов физической реальности убеждает каждого практика в трансфинитности этих объектов. Под термином трансфинитность понимается наличие системы свойств: объекты имеют много уровней материи, много граней, много функций и приложений. Кроме этого, есть *взаимная трансфинитность*, названная софистатностью, между структурами и активностями. В силу указанных обстоятельств мы понимаем, что практика есть система отношений и влияний друг на друга в системе трансфинитных объектов. Поэтому их моделирование предполагает создание трансфинитных моделей реальности. Принимая тезис единства реальности, мы обязаны усложнить моделирование, учитывая в модели те свойства реальности, которые принято называть Сознанием и Чувствами. Триада, состоящая из элементов в форме Тела, Сознания, Чувства становится теперь актуальным объектом для анализа и математического моделирования. Мы показали ранее, что любая физическая модель может быть представлена в форме функциональной алгебры. С другой стороны, понятно, что Сознания и Чувства ассоциированы с Телами. Поэтому следует ожидать, что математические модели для Сознаний и Чувств также могут быть представлены в форме функциональных алгебр. У этих алгебр будут «свои» величины и «свои» операторы и операции. На одном из первых мест в данном случае находится задача моделирования операций. Поскольку большинство физических задач задаются матрицами, речь идет о системе математических операций для матриц. Система комбинаторных операций, указанная в монографии, фундаментально дополняет матричные операции. Матричные операции, как показал анализ, имеют аналогию с прямолинейными механическими движениями. Комбинаторные операции имеют аналогию с колебательными и вращательными движениями. Поскольку произвольное механическое движение можно задать в форме суперпозиции указанных выше движений, мы вправе ожидать, что матричные и комбинаторные операции задают *полную систему операций.* Если эту гипотезу хорошо выразить математическими средствами, мы получим качественно новые инструменты для анализа практики и предсказания новых фактов.

Заметим, что комбинаторные операции на матрицах неассоциативны. Проведенный мною анализ показал, что информационные структуры и активности также неассоциативны. По этой причине модели Сознания естественно конструировать на комбинаторных операциях. Кроме этого, как показывает практика, поведение объектов чаще в большей степени управляется Чувствами, чем Сознанием и Телами. Возможна модель, в которой физические тела и тела Сознаний объединены телами Чувств. С аналогичной ситуацией мы имеем дело в электродинамике, в которой поля (тела), индукции (сознания) образуют полную систему только при их объединении материальными уравнениями, которые принято называть связями (чувствами).

Скорее всего, для Чувств и их проявлений требуется новая система операций. Она может быть неким инструментом, соединяющим элементы матричной и комбинаторной операций. По-видимому, такие операции наиболее сложны. Не исключена возможность моделирования матричных и комбинаторных операций по аналогии с операциями, применяемыми для Чувств. С философской точки зрения в этом подходе меняется критерий и истоки рождения материального мира. Если первоисточником создания структур и активностей принять Чувства, многое понимается и оценивается по-другому. Понятно, что проявления Чувств становятся главным фактором в эволюции Реальности.

Трансфинитность Реальности позволяет по-новому подойти к пониманию сущности взаимоотношений между микромиром и макромиром. У нас есть достаточно оснований для понимания факта, что привычные микро и макрообъекты созданы, по сути дела, парой фундаментальных Сущностей: Гравитацией и Светом. По этой причине исследовать необходимо Тела, Сознания, Чувства этих базовых начал Реальности. По предварительным оценкам речь идет об анализе объектов, размеры которых субъядерные: ядерные от ядерных. Они близки к длине Планка. Но наши экспериментальные средства уже сейчас не в состоянии глубоко исследовать даже ядерные размеры. Ситуация естественна с точки зрения модели трансфинитной реальности: каждому объекту в ней отводится своя роль и свое место. У каждого объекта есть границы своего могущества и влияния. Фундаментальный мир Гравитации и Света «закрыт» для наших экспериментов. Однако у нас нет ограничений, кроме ограничений, обусловленных уровнем нашего развития, в проведении интеллектуальной практики. Конструирование новых математических объектов и операций составляет сущность такой практики. Понятно, что на данном этапе исследования эти средства должны быть направлены на создание новых моделей функциональных алгебр. Эти алгебры должны согласованно описывать Тела, Сознания, Чувства физических объектов.

Понимание есть вложение практики в систему утвердившихся, привычных понятий, алгоритмов, представлений. Вследствие трансфинитности реальности эти элементы всегда ограничены практикой, неполны. Потому неполным всегда является наше понимание структур и активностей. Понимание в границах практики может, тем не менее, быть достаточным для текущей практики. Как только понятия, алгоритмы, представления меняются, меняется согласованно с ним понимание ситуаций и практики. Этот процесс объективен и соответствует законам эволюции поведения и моделирования. Новое почти всегда непонятно. По этой причине оно вызывает настороженное любопытство, а иногда порождает неприятие.

Принимая требование оптимальности нашей практики, мы можем по-новому подойти к нашей главной цели поведения. Естественно принять в качестве такой цели гармонизацию отношений между объектами. В рамках потребности учета структуры и функций Тел, Сознаний, Чувств речь должна идти о триединстве гармонии в системе объектов. Но тогда неизбежно следует принять требование нового взаимного обмена информацией. Мы имеем новую возможность: учиться Сознанию и Чувствам всей системы объектов, доступных нашей практике. Фактически речь идет о построении новой системы интеллектуального питания. Одно дело питаться рыбными консервами, другое дело – самому ловить рыбу. Понятно, что и направленность, и итог таких действий будет разным. Понятно и другое обстоятельство: наше поведение учитывается и контролируется другими объектами. Трудно и нелепо принять точку зрения, что Реальность желает уничтожить Человека и Человечество. Для этого, с моей точки зрения, у неё предостаточно возможностей и средств. Речь идет, я полагаю, о повышении роли и статуса Человечества в рамках развивающейся Реальности. Качественно нового подъема и развития Тел, Сознаний, Чувств избежать не удастся. Но тогда следует во многом переменить привычную практику воспитания и обучения, направив её на развитие индивидуальности и эффективную полезность каждого члена общества. Это возможно лишь в том случае, когда в каждом Человеке будет сиять внутреннее Солнце. При этом не следует волноваться по поводу своей социальной «незаметности». Гравитация также «невидима», но она способна играть главную роль почти во всей Реальности.

Человеку нужно научиться жить так, чтобы он мог «светить» тому, кому нужно и когда нужно, совершенно не забывая о своих потребностях и своем развитии. Так живут объекты физической реальности, частично «видимые» нами и частично применяемые на практике. В каждом из них скрыто больше, чем мы уже знаем о них. Точно так мы понимаем, что *скрытых величин и операций* в математике может быть намного больше, чем те, к которым мы привыкли и которыми успешно пользуемся. Физический мир убеждает нас в правильности данной гипотезы. Например, электроны и протоны могут жить вечно, овладев механизмом бессмертия. Они живут совершенно не так, как живем мы. Понятно, что их «питание» обеспечивает «тонкая реальность».

Не пора ли нам более тонко и совершенно жить, используя качественно новые условия и обстоятельства, открывающиеся практике? Сколько может продолжаться «игра отрицания» Сознания и Чувств у разных объектов физической Реальности?

Научное издание

Барыкин Виктор Николаевич

НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Ответственный за выпуск Владимир Кузьмин

Подписано в печать 10.04.2014.
Формат 60 x 84 $^1/_8$. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 24.
Тираж 99 экз. Заказ 17.

ООО «Ковчег»
ЛИ № 02330/0548599 от 09.07.2009.
Пр. Независимости, 68-19, 220072 г. Минск.
Тел./факс: (017) 284 04 33
e-mail: kovcheg_info@tut.by