БАРЫКИН В.Н.

НЕАССОЦИАТИВНОСТЬ

НА

КОМБИНАТОРНОЙ ОПЕРАЦИИ

$$k$$
$$\times$$
$$\varsigma\xi$$

Минск
«Ковчег»
2011

УДК 512.44
ББК 22.31
Б26

Барыкин, В.Н.
Б26 Неассоциативность на комбинаторной операции / В.Н. Барыкин. – Минск : Ковчег, 2011. – 236 с.

ISBN 978-985-7006-08-3

Предложена комбинаторная операция. Она обобщает матричную и тензорную операции, а также операции векторного и скалярного произведения векторов. Она допускает ассоциативность, но её конструктивной чертой является неассоциативность.

Даны примеры неассоциативных, неальтернативных, неэластичных алгебр. Найдена обобщенная ассоциативная алгебра с делением для триплетов. Проанализирована группа подстановок как фактор неассоциативности.

Показано, что физические теории есть аналог интеллектуальных «хижин» на «ассоциативных островах», расположенных в «океане» неассоциативных множеств.

Введена концепция скрытых решений, позволяющая по одной системе уравнений при использовании нескольких комбинаторных операций исследовать совокупность качественно различных свойств физических объектов

Предложен алгоритм перехода от физических моделей одноуровневой материи к моделям многоуровневой материи. Проанализирована специфика и некоторые новые черты предлагаемого неассоциативного обобщения физики. Рассмотрены некоторые приложения комбинаторной операции к физике на примере уравнений механики, турбулентности, электродинамики, гравитации.

УДК 512.44
ББК 22.31

ISBN 978-985-7006-08-3

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Основным мотивом предлагаемый работы является, с одной стороны, математический анализ возможностей получения неассоциативных множеств и анализа их свойств, а также сравнение с результатами, полученными для ассоциативных множеств. С другой стороны, решается задача приложения методов неассоциативной математики к исследованию физических объектов и их взаимодействий.

Предметом исследования является линейная конечномерная неассоциативная алгебра. Она характеризует, в частности, касательные пространства к лупам и квазигруппам. Изложение широкого спектра вопросов по этой тематике имеется в монографиях Белоусова В.Д. [1] и Акивиса М.А. [2]. Наиболее хорошо изучены лупы с незначительным нарушением ассоциативности [3]. Такова лупа Муфанг, которая есть аффинное симметрическое пространство, группа симметрии которого порождается левыми и правыми сдвигами лупы. В окрестности точки пространства аффинной связности всегда можно ввести операцию умножения, по отношению к которой окрестность точки становится геодезической лупой [4]. В окрестности единицы произвольной лупы можно задать тройную линейную систему: $W-$алгебру [5]. Возможны разные $W-$алгебры. Для лупы Муфанг эту роль выполняет алгебра Мальцева. Пространства, в которых заданы ковариантно постоянные тензоры кручения и кривизны, названы Рашевским П.К. редуктивными. Их свойства описал Номидзу К. [6]. Известно также, что тройные системы Ли являются алгебрами редуктивных однородных пространств [7]. Сабинин Д.В. доказал эквивалентность категории однородных пространств и луп [8]. Неассоциативные множества, известные в настоящее время, имеют свойства, выходящие за пределы свойств квазигрупп и луп. Они сложны и пока проанализированы недостаточно. Этот тезис справедлив как с математической, так и с физической точек зрения.

Есть приложения неассоциативной математики в физике. Так, Намбу предложил обобщение классической механики, в которой естественно используются неассоциативные алгебры, отличные от алгебр Ли [9]. Алгебра Мальцева использовалась как шестимерная алгебра цвета с группой автоморфизмов $SU(3)$ [10]. Физиками анализировалась роль неассоциативности в концепции фундаментальной длины [11]. Неассоциативность ассоциировалась с ненаблюдаемостью [12]. Поскольку неассоциативность естественна в тройных системах, речь может идти о применении неассоциативной математики в задачах, где важную роль играют тройные столкновения физических объектов.

Важнейшим итогом физики за весь период её развития явилось осознание факта, что реальность представляет собой совокупность изделий, изготовленных из физической материи: всего того, что имеет структуру и активность в широком и узком смыслах слова. Практика убедила в том, что физическая материя трансфинитна: многогранна, многоуровнева, многофункциональна, многозначна. Задача любой практики состоит в том, чтобы понять реальность и достойно функционировать в гармонии с её законами.

Для такой практики необходимы как трансфинитная логика, так и трансфинитный эксперимент.

Опыт доказал, что взаимодействие материи *на каждом из уровней*, как и *между уровнями*, может быть разным. С физической точки зрения разобраться в ситуации возможно, используя эксперименты и измерительную технику. Отметим, что измерительному устройству и их системе «не нужна» общая ковариантность. Они работают в определенных конкретных условиях, которые нужно корректно учесть и использовать на практике.

С математической точки зрения требуется использовать как известный, так и новый математический аппарат, способный создавать модели, адекватно выражающие свойства трансфинитной реальности. При этом желательно обеспечить удобство применения этого аппарата, не вводя в ранг абсолюта проблемы, которые он порождает. Всегда следует понимать и изучать границы математического метода, а также уделять внимание его ростковым точкам.

Трансфинитная реальность не ограничена в своих возможностях. Следуя её примеру, желательно не ограничивать свою практику в угоду сложившимся эмпирическим и теоретическим средствам. Ограничения приятны людям ограниченным. Они далеки от трансфинитной реализации своей жизни. Подчинение ограничениям гасит костер истины. Физика не должна ограничивать математику, математика не должна ставить границы физике. Аналогичное замечание конструктивно для других разделов науки.

Понятно, что как на очень малых, так и на очень больших расстояниях проводить детальный, корректный эксперимент очень трудно, а на некотором уровне материи это делать будет вообще невозможно. И дело не только в трудностях эксперимента, но также в том, что для глубинных физических исследований нужны значительные материальные средства.

По-новому следует подойти к проблеме истинности проводимого анализа, особенно в том случае, когда физические исследования недостаточны или невозможны. Мы понимаем, что реальность по своим реализациям существенно превосходит самые глубокие наши построения.

Исследование многоуровневой материи неотделимо от построения трансфинитных моделей материи. Эти модели нужны как для каждого из её уровней, так и для системы в целом.

Построение математических моделей и алгоритмов свободно от недостатков физического моделирования: математике, как и сознанию, если они достаточно развиты, могут быть доступны любые уровни материи, при этом материальные затраты на такую деятельность могут быть незначительны. В силу указанных обстоятельств и складывающейся ситуации желательно создать новые математические модели, а также новые математические *инструменты для* построения базовых физических моделей. Эти модели предназначены описывать как физические изделия разных уровней материи, так и *всевозможные их взаимодействия*. Очевидно в силу неполноты нашего знания, что для решения таких задач понадобятся качественно новые приемы моделирования. Однако *нельзя недооценивать глубину и устойчивость возможных наших заблуждений*. Реальность многое может, и она не обязана подчиняться как нашим ошибкам, так и некорректности нашего мышления.

Для построения моделей трансфинитной материи естественно опираться на уже известные модели. Они подтвердили свою эффективность и имеют свою сферу приложений. Они имеют разный уровень фундаментальности и разную меру познавательной корректности. Опираясь на достигнутые знания, желательно строить алгоритмы расширения и углубления известных моделей, а также набирать опыт в их конкретном применении. Модели и алгоритмы нужны как для практики в одноуровневой материи, так и для материи трансфинитной.

Средствами для выполнения такой задачи могут быть как математические возможности моделей, так и алгоритмы физического учета в них специфики конкретных изделий и их взаимодействий.

Принимая софистатность (многогранное, многофункциональное соответствие) изделий и их поведения (структур и активностей в другой терминологии), следует найти алгоритмы для взаимного соотношения структуры объектов и взаимодействий объектов.

Рассматривая проблему взаимодействия физических объектов с математической точки зрения, мы понимаем, что речь может идти, *с одной стороны*, об изменении величин, используемых в модели, с *другой стороны*, об изменении операций, используемых в модели.

В данной статье рассмотрена возможность расширения физических моделей на основе обобщения математических операций, используемых в этих моделях.

Назовём такой вид расширения физических моделей *операционной деформацией моделей*. Некоторым её аналогом являются формализмы квантования, используемые для классических моделей.

Чтобы начать математический анализ с достаточно общих фактов, обратимся к новейшей модели света, претендующей на роль единого фундамента для всей физики. В структурной модели света есть частицы света. Они изготовлены из **конечных одномерных объектов.** Эти базовые изделия имеют размеры близкие к длине Планка. Их принято называть струнами. Струны активны: они имеют разнообразные физические свойства, в частности, имеют возможности для поперечных и продольных соединений.

Жизнедеятельность струн выступает в разных формах:

- в наличии законов соединения и изменения самих струн,
- в поведении анализируемого объекта, изготовленного из них,
- в реакциях объекта на «прикосновение» со стороны других объектов, выражающихся в изменении внешнего и внутреннего обмена в трансфинитной материи.

Согласно структурной модели света, его составляющие и струны сами по себе выступают в качестве строительных «блоков» для создания структуры всякого изделия. Это обстоятельство, в силу принципа софистатности структур и активностей, обосновывает механизмы любого поведения: на основе механизмов жизнедеятельности струн построена активность всякого изделия.

Поскольку струны, с концептуальной точки зрения, могут быть «изготовлены» из «точек», полевая теория может сыграть большую роль в построении моделей струн как активных физических изделий.

Принятие указанной точки зрения сводит задачу создания изделий и практику использования их активностей к задачам структурного моделирования изделий, изготовленных из струн, а также их поведения, вытекающего из изменения жизнедеятельности этих струн, в частности, создания полевых моделей, индуцированных струнами.

Трансфинитность реальности должна выразить себя как в трансфинитных экспериментальных средствах и алгоритмах, так и в математических моделях.

При рассмотрении сохраняющихся величин у механических объектов мы обязаны учитывать сохранение не только их скорости и вращения (механических слагаемых активности изделия), но также сохранение размеров, формы, объема, площади, соединений структурных составляющих между собой (механических слагаемых структуры изделия).

Сохранение структуры изделий всегда подразумевалось, но явно не всегда оговаривалось и не везде учитывалось. При анализе сохранения движений скорость рассматривалась явно, а частота учитывалась косвенно.

Сохранение структуры обычно принималось в физике без введения концепции жизнедеятельности изделия. Концепция трансфинитной материи рассматривает поведение как форму жизнедеятельность изделий, допуская жизнедеятельность на любом уровне материи.

С данной точки зрения взаимодействие объектов (принимая модель Реальности как системы объектов, изготовленных из трансфинитной материи) есть изменение их структур и активностей при возможном разнообразном взаимном прикосновении объектов с сохранением или изменением их жизнедеятельности, выражаемой, в частности, в форме разнообразных обменов, реализующихся в трансфинитной материи.

Трансфинитный объект (есть только такие объекты) ведёт себя по-разному в зависимости от того, как изменяется он при самовоздействии, а также при прикосновении к нему других объектов, какова его трансфинитная структура, как проявляются трансфинитные условия его жизнедеятельности.

Трансфинитный объект, примером которого является человек, имеет не только трансфинитное тело, но у него есть также трансфинитное сознание и трансфинитные чувства.

Трансфинитный объект софистатен с другими объектами. Эта софистатность выражается как в структуре объектов, так и в их поведении. Следовательно, мы обязаны характеризовать каждое изделие не только структурой и поведением его тела, но также структурой и поведением его сознания и чувств.

Практика подошла к этапу, когда одноуровневое, телесное приближение к реальности будет заменено на многоуровневое, не только телесное приближение. Для этого требуется существенно раздвинуть границы нашего понимания сознания и чувств, а также границы практики, базирующейся на новом понимании.

Нужно перестроить практику. Вместо насильственного и грубого выбивания информации следует перейти к тонким методам, гарантирующим гармонию и взаимное понимание.

Нужно избавиться от комплекса, что Природа скрывает от нас тайны. Например, как показывает анализ, свет устал «кричать» о своих свойствах. Но мы не пытаемся слушать его голос. Наоборот, мы незаслуженно себя считаем светом. И другой свет нам не нужен.

Нужно избавиться от комплекса, что человек слаб, и он мало что может сделать. Опыт свидетельствует, что человек есть часть Вселенной, и он связан с ней многими способами. То, что не может сам человек, в этом ему может помочь Вселенная. Если, конечно, мы подготовлены к этому и прислушиваемся к её советам.

Поскольку жизнедеятельность обеспечивается трансфинитно, в частности, за счёт потоков многоуровневой (тонкой и грубой) материи, при этом происходит трансформация трансфинитной системы струн, их структур и активностей.

Активность объектов есть проявление их реакции на воздействие, изменившее его структуру или его состояние движения. В рамках структурного подхода к реальности, в зависимости от того, меняется ли центральная или периферическая система объектов, как указанные части устроены и согласованы друг с другом, какие механизмы жизнедеятельности присущи им, оценки, прикосновение и реакция будут разными.

Система величин и операций, инициируемая комбинаторным подходом, является инструментом для упорядочивания информации и построения новых моделей, способных учесть свойства самых разных объектов.

В том случае, когда практика не даёт информации о структуре и активности объектов, принимается модель описания явлений, согласованная с доступными показаниями приборов. Эта эмпирическая модель может быть полезной, но она является *только началом глубинной модели*, которая неизбежно выходит за рамки возможностей приборов и эксперимента. В реальной практике часто достаточно пользоваться упрощенными подходами и приемами. Происходит так потому, что принято учитывать только несколько главных моментов, не вдаваясь в тонкости и детали изделий и явлений. Такой подход характерен для потребителя. Для творческой личности, как и для достижения новой информации и новой практики, указанный подход недостаточен.

Принимая в качестве исходной посылки неточечный, одномерный объект (струну), мы можем охарактеризовать его по-разному, например, столбцом чисел. Рассмотрим некоторые модели описания структуры и активности объектов, используя в качестве величин матрицы. В качестве стартовой площадки для математических операций используем стандартное произведение матриц. Истоки такого произведения обоснованы решениями систем линейных алгебраических уравнений.

Естественно ожидать, что для нелинейных алгебраических систем, как и для нелинейных физических моделей, стандартные матричные произведения могут оказаться неудобными или недостаточными. Более того, они могут давать ошибочные предсказания.

Трансфинитность симметрий

Многолетняя практика утвердила серьезных исследователей в мысли, что физическая реальность трансфинитна: многогранна, многоуровнева, многофункциональна, многозначна и имеет много других свойств. Слово трансфинитность предложено для выражения всей совокупности известных и неизвестных свойств объекта, системы объектов.

Под физической реальностью мы понимаем трансфинитную физическую материю: всё то, что имеет структуру и поведение, которые также, по определению, трансфинитны.

Когда мы моделируем физическую реальность, нам нужно обеспечить математическое выражение структуры и поведения физической материи. Такое соответствие в ряде случаев уже установлено и дает положительные практические плоды. Большинство фактов ещё недоступно и непонятно нам. Нет также их математического выражения. Часто отсутствуют экспериментальные средства и методики получения данных о структуре и поведении физической реальности. Эта ситуация стандартна для процесса познания. Познание опирается на достигнутый опыт и постоянно развивается в своих ростковых точках. Обычно ростковые точки находятся на стыке нескольких фактов или нескольких направлений исследования. Это обстоятельство требует больших знаний для практикующего субъекта или для творческого коллектива.

Проанализируем концепцию и реализации симметрии, опираясь на требование, чтобы математические объекты и их поведение отображали физические объекты и их поведение. Принимая трансфинитность материи, мы обязаны обнаружить и учитывать трансфинитность математических изделий.

В качестве первой исходной точки анализа примем концепцию структуры физического изделия как совокупности частей этого изделия. Структурность выступает как свойство объекта быть разделенным на части, а также как свойство частям быть вместе, реализуя ту или другую систему отношений между частями.

В качестве второй исходной точки анализа примем концепцию активности физического изделия как совокупности свойств его частей и соединений между ними, выраженных некоторыми величинами, а также алгоритмов, учитывающих их согласованное изменение. Понятно, что они выступают в форме закона, ассоциированного с явлением, а также с экспериментальными средствами наблюдения этого явления.

Конечно, одним из главных вопросов физического моделирования является вопрос о том, как математически выразить структурность и активность физических изделий, достигая согласия с экспериментом и обеспечивая предсказание новых результатов?

Ответ на него не может быть окончательным, потому что мы изучили физическую реальность только в очень ограниченном диапазоне размеров и параметров. Однако он может стать конструктивным, если уже известные модели можно «уложить» в рамки некоторого единого алгоритма.

Покажем, что *основные физические модели можно выразить в форме так называемых симметрийных модулей: пространств, реперами которых являются элементы групп.*

Покажем, что матричные симметрии в форме мономиальных матриц являются яркими представителями математических средств для выражения структурности физических изделий и их свойств. Матрица есть плоский объект в форме таблицы с определенным числом строк и столбцов. *Мономиальность* есть требование, чтобы в каждой строке и в каждом столбце матриц был один значимый элемент.

Концепция симметрий на системе матриц

С этого момента средством для выражения свойств, которые мы называем симметриями, будут матрицы и операции в системе матриц. Другими словами, физическое проявление симметрий мы будем отображать совокупностью матриц и их свойств композиции. Покажем, что такой подход содержателен, прост и конструктивен.

Примем в качестве значимых элементов для исследуемых матриц числа $[-1,0,1]$. Рассмотрим в качестве исходной точки систему мономиальных матриц размерности 2×2:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

С физической точки зрения мы имеем дело с математическим выражением свойств физического объекта, состоящего из двух частей, что отображается наличием двух строк матрицы. У объекта есть система канонических отношений между частями, отображаемая числами $[-1,0,1]$, расположенными в столбцах. Так, во второй матрице первая часть объекта положительно влияет на вторую часть объекта, а вторая часть объекта положительно влияет на первую. У объекта, как и у его частей, математическая реализация самовоздействия выражается так: значимый элемент располагается на диагонали матрицы и отображает положительное или отрицательное влияние на себя. При этом отношение к другим объектам может быть как нулевое, так и отличное от нуля.

Например, согласно первой матрице совокупности, первый объект положительно влияет на себя, второй объект также положительно влияет на себя. Вся система матриц представляет систему базовых физических объектов, учитывающую всю систему отношений между ними. Таковы «свободные» объекты.

Для физической практики важно знать не только состояния, но и законы их перемен. Они выражаются, следуя математической практике, подтвердившей свою эффективность, законами композиции математических объектов: правилами их сложения и умножения.

Проанализируем ситуацию с такой точки зрения. Так, модель отношений в паре в форме выражений

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5-0{,}5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5-0{,}5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

свидетельствует о том, что пара объектов превратилась в другую пару объектов. В новой паре отношения первого объекта ко второму скомпенсированы, а к себе отношение нулевое. В новой паре отношения второго объекта к первому положительны, несмотря на то, что отношения другого объекта к первому объекту двойные и в сумме нейтральны. Можно сказать, что объект «скрывает» отношения первого объекта со вторым. В данном случае так происходит от того, что отношения не одинарны и в сумме могут давать ноль.

Матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

показывают полную картину одинарных или многократных отношений в паре объектов. Заметим, что предлагаемый математический подход адекватен базовым свойствам физического объекта: матрица математически выражает через свою структуру и законы композиции параметры структуры и поведения физического объекта.

Проанализируем варианты произведений. Рассмотрим на первом этапе произведения по Адамару: каждый элемент одной матрицы умножается на элемент другой матрицы, расположенный на аналогичном месте. Получим, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times_A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{A}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times_A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots$$

Понятно, что матрицы с разными элементами, расположенные на одинаковых местах, образуют класс объектов. Они схожи по структуре. Они подчинены одинаковым правилам композиции по сложению и произведению. Поскольку обычно симметрии ассоциированы с группами, мы покажем сейчас конструктивность подхода к симметриям как системе матриц с законами композиции.

В данном случае рассматриваемая совокупность объектов образует пару групп. Одна группа аддитивна, в ней правилом композиции является поэлементное сложение. Другая группа мультипликативна, в ней правилом композиции является поэлементное произведение.

Введем определение: **группа** есть класс элементов с одной операцией, в котором есть единица (один элемент, не меняющий других при композиции с ним), обратный элемент, при композиции с которым получается единица. Кроме этого, операция ассоциативна: $a(bc) = (ab)c$. Обозначение композиции опущено, так как операция не определена. Заметим, что единицей множества с аддитивной композицией может быть только нулевая матрица. Для множества с мультипликативной операцией требуется дополнительное условие: чтобы были равны нулю элементы, расположенные вне значимых мест группы по Адамару. Если этого нет, то у такого множества будет конечная совокупность «единиц». Они способны, в свою очередь, образовывать самостоятельные группы.

Указанное выше множество матриц разобьется на две совокупности:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Они задают *представителей группы* Адамара, которые выражены посредством канонических чисел. Канонические числа образуют полугруппу по произведению, так как ноль не имеет обратного элемента.

Посмотрим на эту ситуацию иначе. Примем стандартные требования к линейным группам: чтобы при композиции элементов группы её параметры были подчинены аддитивной группе. Рассмотрим элементы группы Адамара в виде экспонент от некоторого параметра. Его принято называть параметром группы или групповым параметром. Пусть

$$
g(1) = \begin{pmatrix} e^{t(1)} & 0 \\ 0 & e^{t(1)} \end{pmatrix}, g(2) = \begin{pmatrix} e^{t(2)} & 0 \\ 0 & e^{t(2)} \end{pmatrix}, g(1) \underset{A}{\times} g(2) = \begin{pmatrix} e^{t(1)+t|2|} & 0 \\ 0 & e^{t(1)+t(2)} \end{pmatrix}.
$$

Определим теперь производные по параметру от этих величин при значении параметра, равном нулю. Получим

$$
\left. \frac{dg(i)}{dt(i)} \right|_{t(i)=0} = \xi.
$$

Такие величины называются генераторами группы. В силу указанных определений и обозначений представители группы Адамара образуют совокупность генераторов для однопараметрических групп по Адамару. Роль композиции выполняет произведение. В случае аддитивных групп сами значимые элементы могут быть параметрами. В рассматриваемом случае генераторы аддитивной и мультипликативной групп по Адамару совпадают.

Рассмотрим теперь качественно другое произведение матриц. Оно было предложено Кронекером и названо *тензорным произведением* с обозначением $\otimes$. Суть его состоит в том, что матрицы, умножаемые справа, заменяют собой значимые элементы в матрицах, расположенных слева. Например, получим

$$
\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

На основе тензорного произведения генераторов группы Адамара размерности 2×2 можно получить совокупность генераторов группы Адамара размерности 4×4. Покажем это. Выберем четыре матрицы:

$$
V(2) \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.
$$

Проанализируем их тензорные произведения на себя: $V(4) = V(2) \otimes V(2)$. Получим

$$
\left(
\begin{array}{cccc}
E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & e^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} & b^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix} & c^1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\\
e^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} & e^1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & a^1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix} & f^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\\
a^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix} & b^1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix} & f^1=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix} & b=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\
c^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} & f^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix} & a^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix} & c^3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}
\end{array}
\right)
$$

Назовем данную совокупность **матричной группой заполнения физических моделей**.

Заметим, что эти матрицы можно использовать в качестве базисных элементов **алгебры заполнения физических моделей**. Принятое определение конструктивно, потому что физические модели можно представить в форме элементов данной алгебры. В рассматриваемом случае мы имеем дело с совокупностью четырехмерных инвариантных подгрупп. Их можно рассматривать как самостоятельные алгебры. По этой причине мы получаем совокупность четырехмерных аффинных пространств, ассоциированных с системой алгебр. Их кручение R_{ij}^{k} выражается через коммутаторы элементов алгебры и оно пропорционально структурным постоянным C_{ij}^{k} алгебры заполнения физических моделей: $R_{ij}^{k} = \alpha C_{ij}^{k}$ Кручение не обращается в ноль на алгебрах с базисными элементами (a^i, b^i). Оно обращается в ноль на алгебрах с базисными элементами $(c^i, e^i, f^i.)$. Кручение R_{ijk}^{l} аффинных пространств билинейно по структурным постоянным алгебр C_{ij}^{k}: $R_{ijk}^{l} = \beta C_{im}^{l} C_{kj}^{m}$. Оно выражается через ассоциаторы для элементов алгебры заполнения. Поскольку элементы алгебры задаются матрицами, и используется матричное произведение, ассоциаторы равны нулю. Следовательно, в стандартном моделировании физических явлений используется равная нулю кривизна пространства аффинной связности. При изменении правила произведения для матриц, что возможно на системе комбинаторных операций, изменится как коммутаторы, так и ассоциаторы. Кривизна и кручение пространства аффинной связности в таком варианте будут ненулевыми.

Суть дела в том, что совокупности указанных матриц, заданных с точностью до умножения на минус единицу, достаточно, чтобы выразить через них все элементы матричной алгебры. Поскольку физические модели имеют матричное представление, мы можем записать их через элементы указанного множества. Другими словами, данные элементы заполняют собой физические модели.

Так, например, получим

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left(c^1+c^2+c^3+E\right),\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left(a^1-b^1+e^1+f^1\right)\ldots$$

Покажем, что совокупность элементов образует группу по матричному произведению. Перейдем для доказательства данного утверждения к третьему правилу композиции матриц: *матричному произведению*. Матричное произведение представляет собой эмпирическое правило, полученное из решения систем линейных уравнений. При умножении матриц друг на друга нужно поэлементно умножать каждую строку на каждый столбец, складывая результаты произведений. Затем полученная сумма ставится на место пересечения перемножаемой строки и столбца. Так, например, для пары симметричных матриц получим

$$\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

В таком случае говорят, что произведение коммутативно. Такие произведения порождают антикоммутативную алгебру (множество с парой композиций):

$$\{\alpha(1),\alpha(2)\}=\alpha(1)\alpha(2)+\alpha(2)\alpha(1)=C_k^{12}\alpha(k).$$

В рассматриваемом случае таких алгебр, обусловленных структурой матричной группы заполнения физических моделей три. Они заданы семействами

$$\left(c^i\right),\left(e^i\right),\left(f^i\right),i=1,2,3\,.$$

Для пары антисимметричных матриц получим

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

В этом случае произведение некоммутативно. Такие произведения порождают некоммутативную алгебру, которую называют алгеброй Ли:

$$\left[\beta(1),\beta(2)\right]=\beta(1)\beta(2)-\beta(2)\beta(1)=C_k^{12}\beta(k).$$

В рассматриваемом случае таких алгебр, обусловленных структурой матричной группы заполнения физических моделей две. Они заданы семействами

$$\left(a^i\right),\left(b^i\right),i=1,2,3.$$

Единицей для всего множества, как и для подгрупп, ассоциированных с указанными подмножествами, является единичная матрица. Матричное произведение ассоциативно. У каждого указанного элемента есть обратный элемент, совпадающий с ним или умноженный на минус единицу. Следовательно, рассматриваемое семейство образует группу. В нем есть качественно разные подгруппы.

Подгруппы с элементами $(a^i),(b^i), i=1,2,3$ образуют коммутативную алгебру, подгруппы с элементами $(c^i),(e^i),(f^i), i=1,2,3$ образуют антикоммутативную алгебру.

Рассматриваемые алгебры есть неассоциативные множества по операциям коммутирования или антикоммутирования, так как

$$[a[bc]]\neq[[ab]c],\{a\{bc\}\}\neq\{\{ab\}c\}.$$

Неассоциативность естественна для алгебры Ли. Если дополнительно принимается правило неассоциативного произведения для элементов алгебры, когда

$$a(bc)\Rightarrow a\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\left(b\underset{lc}{\overset{k}{\times}}c\right)\neq\left(a\underset{lc}{\overset{k}{\times}}b\right)\underset{lc}{\overset{k}{\times}}c$$

мы имеем дело с двойной неассоциативностью. В этом случае результаты матричного и комбинаторного произведения различны:

$$a\times b\neq a\underset{lc}{\overset{k}{\times}}b, b\times a\neq b\underset{lc}{\overset{k}{\times}}a.$$

Согласно Софусу Ли, каждая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой группы Ли. Если группа Ли состоит из матриц, то алгебра Ли задается коммутаторами на матрицах. Произведения матриц подчинены условию ассоциативности. Если матрицы умножаются по другому закону, становится возможной начальная неассоциативность. Неассоциативность на коммутаторе является вторичной неассоциативностью.

Произведение базисных элементов алгебры принято записывать в виде

$$e_i e_j = C_{ij}^k e_k.$$

В алгебрах Ли аналогично используется правило

$$[e_i e_j]=C_{ij}^k e_k.$$

В некоммутативной группе Ли можно задать инвариантную связность без кручения ненулевой кривизны. Эта аффинная связность определяется геодезическими линиями в форме 1-параметрических подгрупп и их смежных классов. Роль аффинного параметра играет канонический параметр группы, а для смежного класса канонический параметр выражается через канонический параметр группы.

Если группа полупростая и компактная, аффинная связность порождается римановой метрикой группы вида

$$e_{ij}=-C_{ih}^l C_{jl}^h.$$

Тензор Римана задается выражением

$$R_{ij,k}^h=\frac{1}{4}C_{ik}^l C_{jl}^h.$$

Анализ множеств с начальной и вторичной неассоциативностью может дать дополнительные черты её геометрических свойств. По физической сути мы обязаны получить множества с кручением, которое выражается через «структурные постоянные» неассоциативного множества.

Заметим, что в том случае, когда физическая модель может быть представлена в виде элемента алгебры Ли или какой-то другой алгебры, её математический анализ сводится к анализу свойств алгебры и ее возможных «деформаций».

Анализ показал, что все фундаментальные физические модели имеют структуру алгебры. Физика выступает теперь, с точки зрения математика, как раздел алгебры. С другой стороны, учитывая специфику физического анализа, физик может рассматривать алгебру как инструмент моделирования физических изделий и их свойств.

В силу отмеченного обстоятельства было бы желательно сопоставить базовым физическим объектам некоторые базовые математические объекты, а *физическое взаимодействие выразить на основе системы операций, присоединенных к используемым объектам.*

С учетом поставленной цели отметим специфику построения группы заполнения для 5-мерных физических моделей. Они обеспечивают расширение 4-мерных моделей, вводя в рассмотрение дополнительные фундаментальные переменные. Фактически, мы строим модели в многообразии более высокой размерности, чем размерность пространства-времени.

Рассмотрим алгоритм построения базиса 5-мерного пространства. Для этого нам требуется получить 25 мономиальных матриц, значимыми числами в которых являются числа $[-1{,}1]$. Матрицы должны образовывать группу по матричному произведению. Из элементов группы заполнения должны алгебраически следовать элементы канонической матричной алгебры, содержащей в матрицах размерности 5×5 один значимый элемент, равный единице.

Применим последовательно к единичной матрице и к матрицам, получающимся из нее операцию единого сдвига значимых элементов на одну единицу вправо. Получим систему матриц:

$$\begin{pmatrix}\to\\\to\\\to\\\to\\\to\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что они образуют группу по матричному произведению. Начальный этап построения группы заполнения в 5-мерии на этом завершен.

Теперь применим к данной системе матриц знаковую группу. Она представляет собой совокупность знаков, записанных в форме столбца. Операция произведения сводится к тому, что один столбец умножается на другой (по Адамару) в соответствии со стандартными правилами произведения знаков. Для получения 25 матриц нам нужно взять 5 столбцов знаков.

Сконструируем знаковую группу и исследуем её структуру. Рассмотрим элементы

$$E=\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\\+\end{pmatrix},\alpha=\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\\+\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\\-\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\\-\end{pmatrix},\delta=\begin{pmatrix}+\\-\\-\\-\\+\end{pmatrix}.$$

Умножим последовательно эти элементы друг на друга. Элементы (α,β,γ) при произведениях переходят друг в друга, образуя группу вместе с элементом E. Элемент δ порождает три новых элемента вида

$$\alpha\delta=\alpha(1)=\begin{pmatrix}+\\+\\-\\+\\+\end{pmatrix},\beta\delta=\beta(1)=\begin{pmatrix}+\\-\\+\\+\\-\end{pmatrix},\gamma\delta=\delta(1)=\begin{pmatrix}+\\+\\+\\-\\-\end{pmatrix}.$$

Заметим, что элементы $(\alpha(1), \beta(1), \gamma(1))$ при взаимных произведениях превращаются в элементы (α, β, γ). Элементы (α, β, γ) при взаимных произведениях сохраняются. Другими словами, две указанных тройки элементов имеют разные свойства. Элементы (E, δ), как и другие аналогичные пары, образуют самостоятельные подгруппы.

Легко проверить, что мы можем рассматривать пару (E, δ) как нормальную подгруппу. Тогда пары элементов образуют классы фактормножества для группы знаков. Их можно представить диаграммой

$$\begin{array}{c|cc} & \alpha & \alpha(1) \\ \hline E & & \\ & \beta & \beta(1). \\ \delta & & \\ \hline & \gamma & \gamma(1) \end{array}$$

Произведения на «полочках» дают элементы пары (E, δ), произведение элементов с разных «полочек» дает элемент, принадлежащий незадействованной «полочке».

Применим знаковую группу к единичной матрице. Получим совокупность матриц вида

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На их основе можно выразить алгебраически элементы матричной алгебры. Так, например, получим

$$\frac{1}{4}(a + b + c + d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

Для получения группы заполнения в пространстве размерности 5 нужно применить знаковую группу к другим элементам, полученным перестановками элементов из единичной матрицы. Количество канонических мономиальных матриц будет равно $N = 5 \cdot 24 = 120$. Учтем, что знаковая группа состоит из 7 объектов, а также то обстоятельство, что при матричном произведении матриц группы потребуются инверсные знаковые матрицы. Поэтому общее количество элементов группы получится по формуле

$$N(+,-) = 14N = 1680.$$

Элементы группы заполнения в пятимерном пространстве, дополнительные к единичной матрице, имеют вид

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&1\\-1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\-1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\\-1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&1\\-1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\\-1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\\-1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Используя данные матрицы, можно конструировать физические модели в форме групповых модулей. В общей совокупности есть расширенные матрицы, содержащие группу заполнения для четырехмерного пространства. Однако они недостаточны для построения матричной алгебры пятимерного пространства.

Это обстоятельство может быть решающим аргументом для предположения, что физические модели для четырехмерного и пятимерного пространств могут быть качественно разными.

Выполним комбинаторное произведение канонических матриц

$$A\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Получим матрицы:

$$A^*\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\eta^\bullet\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix},$$

$$\xi=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\xi^\bullet\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\eta\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

Эти 30 матриц замкнуты по комбинаторному произведению. 6 классов матриц порождают сложную систему отношений между ними. Она нетривиальна. Трудно угадать закономерности, которым она подчинена. Обсудим этот вопрос. Рассмотрим произведения элементов.

Таблица произведения данных классов матриц такова:

$$A\underset{lc}{\overset{k}{\times}}A=\eta,\ A\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\eta=\eta^*,\ \eta\underset{lc}{\overset{k}{\times}}A=A^*,\ A^\bullet\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\eta=\eta^*,\ \eta\underset{lc}{\overset{k}{\times}}A^\bullet=A,\ A\underset{lc}{\overset{k}{\times}}A^\bullet=\xi,\ A^*\underset{lc}{\overset{k}{\times}}A=\xi^\bullet,\ A^\bullet\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\xi^\bullet=A,$$

$$A^\bullet\underset{lc}{\overset{k}{\times}}A^\bullet=\eta,\ \eta\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\eta=\eta^\bullet,\ \eta\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\eta^\bullet=\eta,\ \eta^\bullet\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\eta=\eta^\bullet,\ \eta^\bullet\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\eta^\bullet=\eta,\ \xi\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\xi=A^\bullet,\ \xi\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\xi^\bullet=\eta,\ \xi^\bullet\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\xi=\eta,$$

$$\xi^\bullet \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \xi^\bullet = A, \eta \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \xi = \xi, \xi \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \eta = \xi^\bullet, \eta \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \xi^\bullet = \xi^\bullet, \xi^\bullet \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \eta = \xi, \eta^\bullet \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \xi = \eta^\bullet, \xi \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \eta^\bullet = \xi, \eta \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \xi^\bullet = \eta^\bullet,$$

$$\xi^\bullet \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \eta^\bullet = \xi^\bullet, \xi \underset{lc}{\overset{k}{\times}} A = A, A \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \xi = A^\bullet, \xi \underset{lc}{\overset{k}{\times}} A^\bullet = \xi^\bullet, A^\bullet \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \xi = \xi, \xi^\bullet \underset{lc}{\overset{k}{\times}} A = \xi, A \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \xi^\bullet = \xi^\bullet, \xi^\bullet \underset{lc}{\overset{k}{\times}} A^\bullet = A^\bullet,$$

$$\eta^\bullet \underset{lc}{\overset{k}{\times}} A = \eta^\bullet, A \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \eta^\bullet = A, \eta^\bullet \underset{lc}{\overset{k}{\times}} A^\bullet = \eta^\bullet, A^\bullet \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \eta^\bullet = A^\bullet, A^* \underset{lc}{\overset{k}{\times}} A^* = \eta, \eta^* \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \xi^* = \eta.$$

Представим таблицу произведений графически. Построим её по определенному алгоритму. Выберем из всей совокупности некоторую конечную совокупность классов. В рассматриваемом случае удобно взять классы η,η^*,ξ,ξ^*. К ним мы присоединяем, в случае диаграммы 1, классы A,A^*. В случае диаграммы 2 присоединяются элементы * η,η^*,ξ. Далее рассматриваются произведения этих элементов с порождением элементов класса согласно таблице произведений. Затем проводятся дальнейшее произведение ближних элементов и расположение итога согласно месту, указанному стрелкой. Когда исчерпаны все варианты произведений, «цепочки» результатов замыкаются. Диаграммы составлены так, чтобы их вид был относительно привлекателен.

Д И А Г Р А М М А 1

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & \xi & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \downarrow & & \uparrow & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \xi & & A^* & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & A^* & & \eta^* & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \xi & \leftarrow & A & \leftrightarrow & A^* & \rightarrow & \eta & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & & & & & & & \\
 & \rightarrow & \xi^* & \leftarrow & \xi^* & \leftarrow & A & \leftarrow & A^* & \leftarrow & \eta & \Leftrightarrow & \eta^* & \rightarrow & A & \rightarrow & \eta^* & \rightarrow & A & \leftarrow & \eta^* & \rightarrow & \\
A & & & & & & & & \downarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & & & & & & & & & \eta \\
 & \leftarrow & \xi & \leftarrow & A^* & \leftarrow & \xi & \leftarrow & A & \leftarrow & \xi^* & \Leftrightarrow & \xi & \rightarrow & A & \rightarrow & A & \rightarrow & \eta & \rightarrow & \eta^* & \rightarrow & \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \eta & \leftarrow & A^* & \leftrightarrow & \xi^* & \rightarrow & \eta & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \eta & & A & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \eta^* & & \xi & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Д И А Г Р А М М А 2

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & A & & & & & \\
 & & & & \uparrow & A^{*} & - & & & & \\
 & & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & - & & & \\
 & - & \xi^{\times} & & \xi & & \xi & & \xi^{*} & - & \\
\xi^{*} & & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & & & \eta^{*} \\
 & \leftarrow & \eta^{*} & \leftarrow & \eta & \leftrightarrow & \eta^{*} & \rightarrow & \eta & \rightarrow & \\
 & & & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \\
 & \leftarrow & \eta & \leftarrow & \xi^{*} & \leftrightarrow & \xi & \rightarrow & \eta & \rightarrow & \\
\eta^{*} & & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & \xi^{*} \\
 & \leftarrow & \eta & & \eta^{*} & & \eta^{*} & & \xi & \rightarrow & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & & & & \eta & & & & &
\end{array}
$$

Сравним полученный результат с диаграммами канонической мономиальной группы. Она представлена классами матриц:

$$A \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$C \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$D \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$F \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Таблица произведения классов выглядит так:

$$AA = A, BB = A, CC = A, DD = A, EF = FA = A,$$
$$BC = F, CD = F, DB = F, DC = E, CB = E, BD = E,$$
$$AE = E, EA = E, AF = F, FA = F, EE = F, FF = E,$$
$$BE = D, BF = C, EB = C, FB = D, CE = B, CF = D,$$
$$EC = D, FC = B, DE = C, DF = B, ED = B, FD = C.$$

Она имеет графическое представление:

$$B \to C \to F \to D \to C \to E \to B \to C,$$
$$B \to E \to D \to B \to F \to C \to B \to E \ ,$$
$$B \to D \to E \to C \to D \to F \to B \to D \ .$$
$$A \to A \to A,$$
$$A \to B \to B \to A,$$
$$A \to C \to C \to A,$$
$$A \to D \to D \to A,$$
$$A \to F \to F \to E \to A,$$
$$A \to E \to E \to F \to A.$$

Нижнюю диаграмму можно представить в другом виде:

$$A \leftarrow B \leftarrow B \leftarrow A - A \to E \to E \to F \to A$$

$$A \leftarrow C \leftarrow C \leftarrow A - A \to A \to A$$

$$A \leftarrow D \leftarrow D \leftarrow A - A \to F \to F \to E \to A$$

Мы замечаем качественное отличие диаграмм для группы, использующей матричное произведение, от диаграмм для неассоциативного множества на комбинаторной операции.

Диаграммы для групп одноуровневые и представляют собой аналог нити. Диаграммы для неассоциативного множества многоуровневые, они достаточно сложно «сплетены» друг с другом.

Свойства мономиальных матриц разной размерности

Размерность 1. Имеем как мультипликативную, так и аддитивную группы, которые состоят из нулей. Есть также мультипликативная группа, состоящая из единиц. Соответствия между ними нет.

Размерность 2×2. Имеем пару матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разобьем совокупность на две качественно разных сущности. Единичные матрицы задают группу. Совокупность других матриц образует класс элементов, напоминающий «полочку» факторгруппы.

Размерность 3×3**.** Получим мономиальные матрицы комбинаторно двумя способами. Согласно первому способу будем двигать единицу по верхней строке матриц 3×3, располагая в остающихся местах указанную пару матриц размерности 2×2. Получим, соответственно

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},e=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},f=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Назовём такой способ получения матриц горизонтальной сдвиг-деформацией. Согласно второму способу получим матрицы размерности 3×3, двигая единицу вертикально и заполняя свободные места матрицами размерности 2×2. Назовём такой способ получения матриц вертикальной сдвиг-деформацией. Получим

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},e=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.f=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Эта совокупность совпадает с предыдущей совокупностью. Матрицы распределятся, например, следующим образом: единичные матрицы образуют группу А. Матрицы b,c,f образуют одинарные «полочки», матрицы d,e образуют двойную «полочку». Есть ещё подгруппы $(a,f),(a,b),(a,c),(a,e,d)$ вида

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},f=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.a=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}b=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.a=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},e=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Размерность 4×4. Анализ показал, что структура этой канонической мономиальной группы аналогична предыдущему случаю. Отличается она тем, что и группа, и «полочки» содержат по четыре элемента.

Первые элементы таких совокупностей получаются при использовании единицы в верхнем углу матриц размерности 4×4 и указанных матриц размерности 3×3 на свободных местах. Следующие тройки элементов получаются посредством комбинаторной операции, двигающей элементы нечетных строк вправо, а элементы четных строк влево.

Среди 24 элементов группы отношений есть 12 элементов вида

$$A+E+F\subset\hat{G}.$$

Они образуют максимальную подгруппу группы отношений.

Кроме этого есть 12 элементов вида

$$B,C,D\subset\hat{Q}.$$

Они образуют факторгруппу данного множества. Их соотношение между собой выражается условиями вида

$$\hat{G}\hat{G} \Rightarrow \hat{G}, \hat{G}\hat{Q} \Rightarrow \hat{Q}, \hat{Q}\hat{G} \Rightarrow \hat{Q}, \hat{Q}\hat{Q} \Rightarrow \hat{G}.$$

Вся группа может быть получена на основе произведения элементов пары подгрупп. Количество неединичных элементов на единицу меньше размерности используемых матриц. Такова же и кратность произведений, которые при этом нужно выполнить. Обозначая совокупность неединичных производящих элементов буквой α, получим условия вывода элементов всей группы:

$$\alpha, \alpha\alpha, \alpha(\alpha\alpha), (\alpha\alpha)\alpha.$$

Размерность 5×5. Получим систему матриц двумя способами, используя вертикальную и горизонтальную сдвиг-деформацию и указанные матрицы размерности 4×4. Для классификации полученной совокупности введем пару «факторгрупп». Произведение этих элементов даёт всю их совокупность. Первая факторгруппа образована элементами:

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

$$B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix},$$

$$C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$D \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix},$$

$$F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}.$$

Они получены посредством вертикальной сдвиг-деформации. Вторая факторгруппа образована матрицами

$$\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$\beta \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\delta \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$\kappa \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Они получены посредством горизонтальной сдвиг деформации. Понятно, что представленная пара факторгрупп размерности 5×5 тривиально повторяют свойства факторгрупп размерности 4×4. Задача состоит в том, чтобы найти место остальным матрицам, а также разобраться в их свойствах. Поступим следующим образом: присоединим к указанным полочкам те матрицы, которые получаются из матриц для полочки посредством сдвиг деформаций своего типа. Тогда у каждой полочки получится «хвост», состоящий из четырех «своих» полочек. Получим аналогию с корнями деревьев, присоединенными к полочкам. Соединим две **подгруппы** исследуемой группы в единое множество. В данном случае имеем дело с 7 различными матрицами:

$$E, a_{12}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}, a_{13}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}, a_{14}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E, c_{21}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}, e_{33}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}, b_{43}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Для этих матриц обратные элементы равны указанным элементам. Обозначим рассматриваемую совокупность буквой $\alpha \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)$. Найдём двойные произведения:

$$\alpha_1\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2,$$
$$\alpha_1\alpha_2 \Rightarrow \{c_{2i}, e_{3k}, b_{4n}\},$$
$$\alpha_2\alpha_1 \Rightarrow \{c^{-1}{}_{2i}, e^{-1}{}_{3k}, b^{-1}{}_{4n}\}.$$

Тройные произведения задают элементы группы вида

$$a_{3i}, a_{5i}, b_{2i}, b_{4i}, c_{2i}, c_{4i},$$
$$d_{2i}, d_{4i},$$
$$e_{1i}, e_{3i}, e_{5i}, f_{1i}, f_{3i}, f_{5i}.$$

Получим совокупность из 60 матриц, которая образует нормальную подгруппу $\hat{G} \subset G$.
Элементы вида

$$a_{2i}, a_{4i}, b_{1i}, b_{3i}, b_{5i},$$
$$c_{1i}, c_{3i}, c_{5i}, d_{1i}, d_{3i}, d_{5i},$$
$$e_{2i}, e_{4i}, f_{2i}, f_{4i}$$

задают класс элементов Q, относящийся к факторгруппе.
Свойства этой пары множеств таковы:

$$\hat{G}\hat{G} \Rightarrow \hat{G}, \hat{Q}\hat{Q} \Rightarrow \hat{G},$$
$$\hat{G}\hat{Q} \Rightarrow \hat{Q}, \hat{Q}\hat{G} \Rightarrow \hat{Q}.$$

Сформулируем их:

1. Произведение элементов подгруппы принадлежит подгруппе (самовоздействие сохраняет множество $\hat{G}$).
2. Произведение элементов подгруппы и фактор-группы принадлежит факторгруппе (взаимные произведения элементов пары множеств модифицируют множество $\hat{Q}$).
3. Произведение элементов фактор-группы принадлежит группе (самовоздействие разрушает множество $\hat{Q}$).

Заметим, что мы можем получить подгруппу $\hat{G}$ более «экономно», выбрав в качестве первой производящей подгруппы единичную матрицу и один из её неединичных элементов. В этом случае понадобятся не только тройные, но и четверные произведения исходных и получаемых элементов. Количество неединичных элементов, образующих мультипликативный базис искомой подгруппы совпадает с количеством взаимных произведений, которые нужно использовать для получения этой подгруппы. Подгруппа $\hat{G}$ **не является простой**. В частности, она содержит 2-подгруппы, состоящие из двух элементов: единицы и одного элемента, который совпадает с обратным себе. К ним относятся в рассматриваемом случае 5×5 матриц 23 элемента:

$a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_{11}, b_{13}, c_{11}, c_{14}, a_{21}, a_{32}, a_{54}, d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{32}, b_{21}, c_{21}, c_{42}, d_{42}, e_{33}, e_{52}, f_{34}, f_{42}, f_{53}.$

Группа содержит 3-подгруппы, состоящие из единичного элемента и пары различных элементов, обратных друг другу. Таких сочетаний в рассматриваемом случае 53. Они принадлежат либо множеству $\hat{G}$, либо множеству $\hat{Q}$. Например,

$$(f_{54}, a_{34}), (f_{52}, b_{42}), (f_{32}, d_{42}), (d_{44}, e_{22}), (c_{41}, b_{23}), \ldots \subset \hat{G},$$
$$(f_{44}, d_{34}), (f_{24}, b_{31}), (e_{42}, c_{52}), (e_{23}, c_{31}), (c_{12}, c_{13}), \ldots \subset \hat{Q}.$$

4-подгруппы образованы разными способами. В частности, это могут быть 3-циклы с единичной матрицей.

8-подгрупппы есть также. Например, это множества вида

$$A_1 + B_1, A_1 + C_1, A_1 + D_1,$$
$$A_2 + B_2, A_2 + C_2, A_2 + D_2 \ldots$$

12-подгруппы имеют вид

$$A_1 + E_1 + F_1,$$
$$A_2 + E_2 + F_2 \ldots$$

Указанные свойства позволяют по-новому представить исследуемую группу. С одной стороны, её можно интерпретировать как картину расположения уровней «энергии» некоторого формального математического изделия, располагая полученное многообразие подгрупп на числовой оси в соответствии с количеством элементов, из которых состоят подгруппы:

1,2,3,4, 5,8,12,...60....120.

С другой стороны, можно графически представить группу на плоскости, указывая количество элементов подгруппы на одной оси координат, а количество – «интенсивность подгрупп в группе» - на другой оси координат. Эти иллюстрации могут оказаться полезными при классификации конечных групп. Укажем алгоритм построения элементов матричной алгебры 5×5, исходя их элементов мономиальной группы. В качестве **первого шага** выберем совокупность мономиальных матриц, которая без повторов заполняет каждое место в матрицах 5×5. Например, рассмотрим

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

В матрицах 5×5 есть пара рядом расположенных столбцов, относящихся к значимым элементам на первой и последней горизонтали. Другие места мономиально заняты элементами, принадлежащими паре подгрупп с матрицами 3×3:

$$A_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$A_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такой вариант соответствует использованию новой комбинаторной операции. В качестве второго шага используем совокупность плюсов и минусов, записанных в виде столбцов. Они представляют группу знаков в спинорной форме. Их использование сводится к замене знаков у матрицы, на которую они действуют, в соответствии с порядков расположения знаков в столбце. Элементы знаковой группы зададим столбцами:

$$\begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix}.$$

Умножим последовательно каждую из предыдущих матриц на элементы знаковой группы. Получим, например, для единичной матрицы совокупность из 6 матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общее количество используемых матриц равно 30. Любой единичный ненулевой элемент получится, если просуммировать необходимые для этого матрицы с разными и с одинаковыми знаками. Так,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2}\left(A_1 + A_0\right).$$

Любые матрицы можно выразить через систему мономиальных матриц в форме их $G-$модуля. По этой причине справедливо высказывание: *мономиальные группы образуют класс базовых (исходных) элементов, достаточный для «изготовления» всякой матричной группы, а также квазигрупп и других математических структур, если дополнить их величинами, входящими в* $G-$*модуль.*

Мы вправе считать, что **физические модели, выраженные в матричном виде, есть системы групп в форме $G-$модулей, построенных на элементах, содержащих спинорные величины Φ, а также дифференциальные и кодифференциальные операторы с разным порядком дифференцирования.** Например,

$$G^k(N,mon)\partial_k\Phi = H,$$
$$G_k(N,mon)\frac{dx^k}{d\theta}\Phi = B...$$

Такую форму имеют уравнения электродинамики, гравидинамики и т.д. Симметрии в форме $G-$модуля становятся базовым изделием каждой физической модели. Можно считать, что *модели явлений и структур есть симметрии.* По этой причине становится понятно, что **обобщение физических моделей есть изготовление разнообразных систем $G-$модулей и практика с ними с целью достижения истины.** Проанализируем некоторые математические и физические свойства системы матриц. Матрицы (в том числе те, которые образуют группу в форме канонических мономиальных матриц) обладают свойством

$$(ab)(ca) = a((bc)a) = (a(bc))a.$$

Оно присуще лупе Муфанг. В этом случае элементы подчинены алгебре Мальцева. Она существенно сложнее алгебры Ли. В силу указанного обстоятельства физические модели, основанные на такой алгебре, будут подчинены новым законам сохранения. Поскольку мономиальные матрицы являются исходными при моделировании явлений и структурных изделий, их свойства, выраженные, в частности через систему квазигрупп, являются базовыми *для физических процессов*, а также *для структуры изделий*, участвующих в этих процессах. Рассматриваемый вариант свидетельствует о том, что фундаментальная структура изделия, выражаемая через систему отношений между его базовыми составляющими, в частности подчинена квазигруппе Муфанг. Симметрия релаксационных процессов в электродинамике, в свою очередь, также подчинена квазигруппе Муфанг. Складывается впечатление, что структуры и их активности софистатны между собой, причем софистатность управляется не алгебрами Ли, а алгеброй Мальцева. Построение алгебры может базироваться на системе соотношений:

$$a((bc)a) - (a(bc))a = 0,$$
$$(ab)(ca) - a((bc)a) = 0,$$
$$(ab)(ca) - (a(bc))a = 0.$$

Пятимерие может иметь новые фундаментальные свойства, столь же общие, как пространство и время. По этой причине физические модели обязаны учитывать зависимость от них.

В электродинамике роль новой фундаментальной величины выполняет показатель отношения w. Он управляет динамическими процессами. Например, зависимость массы от скорости, выражение для которой следует из анализа уравнений геодезической, имеет вид

$$m = m_0\left(1 - w\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}.$$

Поскольку величина показателя отношения может зависеть от «заряда» m_0, реакция разных масс на одно и то же воздействие может быть разной. Так будет всегда, если показатель отношения входит в теорию как внутреннее свойство изделия. Изделия будут вести себя, подчиняясь распределению отношений в физической системе.

1. Рассматривая физическую реальность как многоуровневую материю, мы можем по-новому подойти к законам сохранения. Так, для механической системы в отсутствие внешних воздействий и трения поведение задаётся законом сохранения суммы, составленной из потенциальной и кинетической энергий. Работу внешних сил можно рассматривать как функционал, согласованный с поведением уровневой материи, обусловленный $(l+1)-$ уровнем материи. Трение и химические реакции задают свойства, обусловленные $(l-1)$--уровнем материи. Тогда аналогичные свойства, если принять идею энергетического единства любых уровней материи, будут справедливы для любой тройки уровней материи. Так, должен выполняться закон

$$dE(l)=dA(l+1)-dA(l-1).$$

Он приобретает стандартный вид, если

$$dA(l-1)=Tds.$$

Известно, что законы сохранения, следуя подходу Нётер, ассоциированы с группой симметрии Лагранжиана физической модели. При анализе релаксационных процессов, равно как и при симметрийном анализе физических изделий, мы имеем дело с квазигруппой Муфанг или с более общим объектом. В этом случае законы сохранения могут измениться. Изменения обусловлены, как кажется, связями, которые существуют между уровнями материи. Соответственно, обозначив связи между тройкой уровней материи: $K(l,l-1),K(l,l+1),K(l-1,l+1)$ функционалом $K(l+1,l,l-1)=\hat{K}$, получим обобщенный закон сохранения энергии

$$dE(l)=dA(l+1)-dA(l-1)+d\hat{K}.$$

Известно, что матрицы подчинены условию ассоциативности

$$(ab)c=a(bc).$$

Умножим это выражение справа на d. Получим

$$(ab)c\cdot d=(ab)(cd)=a(bc)d.$$

Умножим справа на e условие

$$(ab)(cd)=a(bc)d.$$

Получим

$$(ab)(cd)e=a(bc)(de).$$

Аналогично выводятся равенства

$$(ab)(cd)(ef)=a(bc)(de)f,$$
$$(ab)(cd)(ef)g=a(bc)(de)(fg),$$
$$(ab)(cd)(ef)(gh)=a(bc)(de)(fg)h...$$

Условие (1) обобщает условие, используемое для лупы Муфанг, переходя в него при

$$d=a.$$

Тогда

$$(ab)(ca)=a(bc)a=(a(bc))a=a((bc)a).$$

Замечание: В общем случае умножение матриц частного вида способно вывести произведение за рамки используемой совокупности.
Оно подчинено условию B:

$$ab=\alpha c+\beta,$$
$$a,b,c\subset M_1,$$
$$\alpha\subset M_2,\beta\subset M_3.$$

Если $\alpha = I, \beta = 0$, приходим к теории групп.
В этом варианте выполняется условие C:

$$ab = c,$$
$$a, b, c \subset M_1.$$

Мономиальные матрицы образуют матричную группу. Условия C, A выполняются для неё и для её подгрупп. Система таких матриц, с одной стороны, обладает сложными алгебраическими свойствами. С другой стороны, она позволяет учесть отношения в системе физических тел, образующих изделие. Они приспособлены для выражения **принципа максимальных возможностей.** По этой причине такому требованию косвенно будут удовлетворять теории, построенные на мономиальных матрицах. Все фундаментальные физические теории, как легко показать, могут быть построены на системе мономиальных матриц. Значит, указанный принцип неявно используется в них. Мономиальные матрицы размерности 5×5 содержат циклические подгруппы разной размерности, состоящие из 3, 4, 5, 6 элементов, включая единицу. Условие A можно изменить, допуская элементы различных степеней в соответствии с размерностью их циклических групп. Так, например, получим

$$\left(a^p b^q\right)\left(c^r d^s\right) = a^p\left(b^q c^r\right)d^s.$$

Другие равенства могут быть обобщены аналогично.
Поскольку полученные условия A справедливы для произвольных невырожденных матриц, их не изменит **частичная деформация**. Так как физика процессов основана на частично деформированных матрицах, физические деформации подчинены условиям A. При деформации, понятно, элементы могут перейти в новое множество, которое уже не является группой. По этой причине они будут подчинены условию B. Мономиальные матрицы размерности 5×5 могут быть получены посредством произведения элементов, принадлежащих двум производящим группам. В силу этого обстоятельства существует **пара калибровочных полей**, им соответствующая. Поскольку в этой паре свойства элементов разные, различными будут и калибровочные поля. Именно с такой ситуацией мы имеем дело в электродинамике. Физически, по-видимому, речь идет в этом разделе физики о паре групп $U(1)$, соответствующих одномерным многообразиям, состоящим из **открытых и замкнутых Ритов** – «струн», способных к продольным и к поперечным соединениям. Для группы $U(2)$ базовыми объектами будут двумерные изделия, для группы $U(3)$ – трёхмерные.

Симметрийное представление электродинамики движущихся сред

Введем

$$\Psi = \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} H_x + iD_x \\ H_y + iD_y \\ H_z + iD_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi^* = \begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^* = \begin{pmatrix} H_x - iD_x \\ H_y - iD_y \\ H_z - iD_z \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_k = \left\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, (-i)\frac{1}{c}\partial_t\right\}, \quad \partial_k^* = \left\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, i\frac{1}{c}\partial_t\right\}, \quad U^k = \left\{\frac{U_x}{c}, \frac{U_y}{c}, \frac{U_z}{c}, i\right\},$$

$$\overset{*}{U}{}^{k} = \left\{ \frac{U_x}{c}, \frac{U_y}{c}, \frac{U_z}{c}, -i \right\}, \qquad g^{kn} = g_{kn} = diag(1,1,1,1), \qquad r^{kn} = r_{kn} = diag(1,1,1,-1).$$

Используем элементы группы заполнения:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

,

$$b^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Введем диагональные элементы матричной алгебры

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Pi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Pi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем по обычной схеме

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Выражения

$$\Psi_1 = E_x + iB_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial A_z}{\partial y} - i\frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$\Psi_2 = E_y + iB_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\frac{\partial A_x}{\partial z} - i\frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$\Psi_3 = E_z + iB_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} + i\frac{\partial A_y}{\partial x} - i\frac{\partial A_x}{\partial y},$$

$$\overline{\Psi}_1 = E_x - iB_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial A_z}{\partial y} + i\frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$\overline{\Psi}_2 = E_y - iB_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i\frac{\partial A_x}{\partial z} + i\frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$\overline{\Psi}_3 = E_z - iB_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} - i\frac{\partial A_y}{\partial x} + i\frac{\partial A_x}{\partial y},$$

допускают алгебраическое представление на кватернионном секторе группы заполнения физических моделей. Действительно, имеем

$$\begin{pmatrix} -\partial_\tau & -i\partial_z & i\partial_y & -i\partial_x \\ i\partial_z & -\partial_\tau & -i\partial_x & -i\partial_y \\ -i\partial_y & i\partial_x & -\partial_\tau & -i\partial_z \\ i\partial_x & i\partial_y & i\partial_z & -\partial_\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ -i\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\partial_\tau & i\partial_z & -i\partial_y & -i\partial_x \\ -i\partial_z & -\partial_\tau & i\partial_x & -i\partial_y \\ i\partial_y & -i\partial_x & -\partial_\tau & -i\partial_z \\ i\partial_x & i\partial_y & i\partial_z & -\partial_\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ -i\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_1 \\ \overline{\Psi}_2 \\ \overline{\Psi}_3 \\ \overline{\Psi}_4 \end{pmatrix}.$$

На основе использования кватернионов $(a^i, b^i) \in V(4)$ получаем две возможности записи уравнений электродинамики через четырехпотенциалы A_ξ. Можно, во-первых, взять

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \equiv \Psi_4$$

в качестве калибровочного условия. Можно, во-вторых, считать, что $\Psi_4 \neq 0$, но использовать "ньютоновскую" метрику при соединении элементов кватернионов. Она ограждает Ψ_4 от экспериментального анализа. В обоих вариантах есть свои преимущества. Уравнениям

$$[(-ib^1\partial_1 - ib^2\partial_2 - ib^3\partial_3) - E\partial_\tau][A] = [\Psi],$$

$$[(ia^1\partial_1 + ia^2\partial_2 + ia^3\partial_3) - E\partial_\tau][A] = [\overline{\Psi}]$$

соответствуют метрики

$$l^{ij} = (-i, -i, -i, -1), \qquad m^{ij} = (+i, +i, +i, -1).$$

Четырехпотенциал A_ξ для электромагнитного поля допускает комплексное и неевклидово трехмерное пространство, так как матрицы $(a^i, b^i) \in G_z$ можно выбрать с любым сочетанием знаков $(+,-)$. Следовательно, пространства для физических полей и для потенциалов может отличаться друг от друга.

Возникает предположение, что *каждому уровню объектов и явлений может соответствовать "свое" пространство-время, его свойства и черты могут быть скрыты от обыденной практики.*

Такое обстоятельство важно корректно учитывать в физических моделях.

Соотношения

$$\varepsilon^{ij}_{klmn} g^{kl} l^{mn} b_i \partial_j [A], \qquad \varepsilon^{ij}_{klmn} g^{kl} m^{mn} a_i \partial_j [A]$$

задают стандартное калибровочное на метрике Минковского g^{kl}. Соотношения

$$\varepsilon^{ij}_{klmn} \hat{n}^{kl} l^{mn} b_i \partial_j [A], \qquad \varepsilon^{ij}_{klmn} \hat{n}^{kl} m^{mn} a_i \partial_j [A]$$

задают те же уравнения, но при условии $\Psi_4 \neq 0$. Для четырехпотенциалов A_ξ в электродинамике пригодны и группа Лорентца и группа Галилея, они дополняют друг друга.

Тензоры полей и индукций F_{mn} и H_{mn}

$$F_{mn}=\begin{pmatrix}0 & B_z & -B_y & -iE_x\\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y\\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z\\ iE_x & iE_y & iE_z & 0\end{pmatrix},\quad H_{mn}=\begin{pmatrix}0 & D_z & -D_y & iH_x\\ -D_z & 0 & D_x & iH_y\\ D_y & -D_x & 0 & iH_z\\ -iH_x & -iH_y & -iH_z & 0\end{pmatrix}$$

также имеют алгебраический вид на кватернионном секторе группы заполнения физических моделей:

$$F_{mn}=\frac{i}{2}\left(a^k\,\Pi_k\,\Psi^*-b^k\,\Pi_k\,\Psi\right),\qquad H_{mn}=\frac{-i}{2}\left(a^k\,\Pi_k\,\varphi-b^k\,\Pi_k\,\varphi^*\right).$$

Следовательно**, электромагнитное поле можно рассматривать не только как калибровочное поле на группе $U(1)$. Электромагнитное поле есть также $G-$ модуль на кватернионном секторе группы заполнения физических моделей.**

Поскольку при выводе выражения для тензора электромагнитного поля использовалось общее выражение для четырехпотенциала, мы вправе выполнить обобщение структуры такого поля. Зададим

$$A_k=p\tau_a A_k^a.$$

Здесь $p-$константа, τ_a- генераторы симметрии внутреннего пространства для калибровочного поля.

Следовательно, кватернионный сектор группы заполнения физических моделей индуцирует структуру дифференциальных составляющих антисимметричных калибровочных полей.

Покажем, что он аналогично индуцирует структуру «конвективную», нелинейную структуру калибровочных полей, выражаемую коммутаторами полей.

Рассмотрим, например, выражение

$$\begin{pmatrix}-A_0 & -iA_z & iA_y & -iA_x\\ iA_z & -A_0 & -iA_x & -iA_y\\ -iA_y & iA_x & -A_0 & -iA_z\\ iA_x & iA_y & iA_z & -A_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\\ -i\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}[A_xA_0]+i[A_yA_z]\\ [A_yA_0]+i[A_zA_x]\\ [A_zA_0]+i[A_xA_y]\\ i\left(A_x^2+A_y^2+A_z^2-A_0^2\right)\end{pmatrix}.,$$

Выражения для тензора напряжений калибровочного поля приобретает стандартный вид

$$F_{mn}=\partial_m A_n-\partial_n A_m+[A_mA_n],$$

$$A_k=p\tau_a A_k^a.$$

Дополнительно появляется алгебраическое условие, аналогичное дифференциальному условию для четырехпотенциалов

$$A_x^2+A_y^2+A_z^2-A_0^2=0.$$

Алгебраическую форму на кватернионном секторе группы заполнения физических моделей имеют также дифференциальные уравнения Максвелла

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\nabla\times\vec{B}=0.$$

Действительно,

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_z + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{i}{c} \partial_t \right\} \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix} = 0 .$$

Аналитически они выглядят так: $a^k\,\partial_k\,\Psi^* + b^k\,\partial_k^*\,\Psi = 0$.

Введем $\Phi = column\left(2\rho U_x,\, 2\rho U_y,\, 2\rho U_z,\, -2i\rho\right)4\pi$. Тогда уравнения

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\pi\,\frac{\vec{j}}{c}, \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$$

Получат форму $a^k\,\partial_k^*\,\varphi^* + b^k\,\partial_k\,\varphi = \Phi$.

Отметим, что уравнения Максвелла «нечувствительны» к умножению слева на мономиальные матрицы. Так, если умножить уравнения Максвелла на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

получим матричные уравнения

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_z + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{(-i)}{c} \partial_t \right\} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_z + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{i}{c} \partial_t \right\} \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Они тождественны указанным выше векторным уравнениям. Аналогично можно показать, что уравнения не изменятся, если умножить их слева на матрицу

$$
\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.
$$

Отсюда, в частности, простейшим способом можно показать, что уравнения Максвелла инвариантны как относительно группы Лорентца, так и относительно группы Галилея. Запишем в спинорной форме материальные уравнения:

$$
\vec{B} + w\left[\vec{E} \times (\vec{u}/c)\right] = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D} \times (\vec{u}/c)\right]\right),
$$

$$
\vec{D} + w\left[(\vec{u}/c) \times \vec{H}\right] = \varepsilon\left(\vec{E} + \left[(\vec{u}/c) \times \vec{B}\right]\right).
$$

Получим

$$
i\mu\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_x}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_y}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_z}{c} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(-i)\right\} \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix} H_x - iD_x \\ H_y - iD_y \\ H_z - iD_z \\ 0 \end{pmatrix} - i\mu\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_x}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_y}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_z}{c} + \right.
$$

$$
\left. + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(i)\right\}\begin{pmatrix} H_x + iD_x \\ H_y + iD_y \\ H_z + iD_z \\ 0 \end{pmatrix} = w\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ w^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_x}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_y}{c} + \right.
$$

$$
\left. + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w \\ 0 & 0 & w^{-1} & 0 \end{pmatrix}\frac{U_z}{c} + \frac{1}{w}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(i)\right\}\begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix} + w\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ w^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_x}{c} + \right.
$$

$$
\left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{U_y}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & -w^{-1} & 0 \end{pmatrix}\frac{U_z}{c} + \frac{1}{w}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(-i)\right\}\begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix} = 0.
$$

Если ввести

$$
G_{kn} = diag\left(1, 1, 1, w^{-1}\right), \quad R_{kn} = diag\left(1, 1, 1, -w^{-1}\right), \quad \tilde{a}^k = Q^{-1}\, a^k\, Q, \quad \Pi^k = g^{kn}\Pi_n,
$$

$$
Q^{-1} = diag(1, 1, 1, w), \quad \tilde{b}^k = Q^{-1}\, b^k\, Q, \quad a_k = a^k, \quad b_k = b^k, \quad U_k = g_{kn}U^k,
$$

получим уравнения

$$i\,\mu\left(b^k U_k^* \varphi^* - a^k U_k\,\varphi\right) = wG_{kn}\left(\widetilde{a}^k U^n \Psi^* + \widetilde{b}^k \overset{*}{U^n}\,\Psi\right)$$

$$i\,\varepsilon\left(b^k U_k\,\Psi^* - a^k U_k^*\,\Psi\right) = w\,R_{kn}\left(\widetilde{a}^k U^{*n}\varphi^* + \widetilde{b}^k U^n\,\varphi\right).$$

ВЫВОД: Матричная группа заполнения физических моделей достаточна и удобна для спинорной записи уравнений электродинамики для движущихся сред. Дифференциальные уравнения, а также материальные уравнения имеют запись в форме групповых модулей.

Начала структурной модели частиц света

С физической точки зрения матрицы размерности 4×4 характеризуют отношения между четырьмя объектами. В рамках развиваемого подхода появляются основания предложить структурную модель частиц света. Действительно, частицы света выступают в эксперименте как объекты, у которых нет электрического и гравитационного заряда. Частицы света при столкновении порождают объекты. Которые имеют электрические заряды и массу. Следовательно, частицы света могут состоять из качественно новых базовых объектов: пары гравитационных предзарядов, которые удобно обозначить $\pm g$, а также пары электрических предзарядов, которые удобно обозначить $\pm q$.

Мы понимаем, исходя из комбинаторики отношений, выражаемые числами $[-1,0,1]$, что система мономиальных отношений формирует систему матриц, которые образуют матричную группу заполнения физических моделей. Такова математика рассматриваемой ситуации. С другой стороны, мы видим физические аспекты проблемы структуры и взаимодействия для частиц света: физика света может базироваться на системе отношений между четверкой электрических и гравитационных предзарядов.

Эти слова остаются пока только формальным пояснением ситуации. Для того чтобы продвинуться к пониманию физики, нужны модели предзарядов. Рассмотрим один из возможных вариантов.

Будем рассматривать предзаряды в форме изделий, изготовленных из атонов: ориентированных струн, имеющих поперечную структуру. Пусть они имеют активный обмен с праматерией.

Гравитационные предзаряды представим в форме « лепестков роз », имеющих поперечные соединения. Если ориентация направлена к центру « лепестков », назовем это изделие отрицательным предзарядом. У положительного гравитационного предзаряда поперечные соединения ориентированы от центра « лепестков ».

Согласно основному допущению, силовые линии способны соединяться, образуя форму тора. Рассмотрим пару разных **гравитационных предзарядов**, полагая, что они отталкиваются. Чтобы понять этот факт с точки зрения обмена с праматерией, нам нужно предположить, что между разными предзарядами праматерия усваивается лучше, чем вне предзарядов. Можно предположить, что рецепторы между ними раскрыты больше, чем снаружи. У одинаковых предзарядов силовые линии могут быть лучше раскрыты вне предзарядов, что приводит к эффекту их притяжения из-за лучшего поступления праматерии.

Для электрических предзарядов ситуация выглядит иначе. Представим их в виде системы «шипов» с ориентацией к центру шипов или от их центра. Примем модель взаимодействия, основанную на их обмене с праматерией. Если предзаряды одинаковы, то рецепторы между предзарядами могут быть открыты лучше и лучше втягивают в себя праматерию, чем рецепторы, которые находятся вдали от линии связи. Если же предзаряды различны, то лучше раскрываются и втягивают в себя праматерию внешние рецепторы, что приводит к эффекту притяжения предзарядов.

Различие механизмов «втягивания праматерии» объясняется различием конструкций, сопоставленных предзарядам. Отметим, что во всех указанных случаях есть предел удаления и приближения предзарядов, а также эффект изменения динамики взаимодействия.

Сложным является взаимодействие предзарядов разных типов.

Аксиоматизируя указанный механизм, мы утверждаем не только формальную, но и физическую причину реализации матриц размерности четыре в физических моделях: матрицы задают математическую и физическую основу для описания базового взаимодействия между четырьмя предзарядами $(\pm g, \pm q)$, находящимися в праматерии.

Вывод: Матричная группа заполнения физических моделей позволяет моделировать **структуру** электромагнитного поля, фундаментального для всей физики.

Расчёт энергии атомов света – нотонов

Следуя квантовой модели электромагнитного поля по Планку и Эйнштейну, мы допускаем дискретную структуру излучения. Энергия «кванта света» задается экспериментально подтвержденной формулой $E = \bar{h}\omega$, где ω – частота поля, $\bar{h} = 6.626176 \cdot 10^{-34}$ Дж. сек. Такая математическая модель, согласующаяся с экспериментом, достаточна для ее применения на практике.

Анализ, проведенный мною, показал возможность механической модели частицы света. Выглядит она следующим образом: свет есть совокупность атомов света, изготовленных из праматерии. Названы они нотонами.

Предложена их модель, аналогичная модели атомов материи:

- атомы света образованы из элонов и пролонов,
- элоны и пролоны представляют собой неточечные нейтральные объекты, изготовленные из предзарядов двух знаков (электрических и гравитационных), соединенных между собой рецепторами в виде силовых трубок,
- пролоны образуют нейтральный аналог протонов и антипротонов, они содержат в себе положительные и отрицательные предмассы, соединенные предмассовыми силовыми трубками,
- элоны образуют нейтральный аналог электронов и позитронов, они содержат в себе положительные и отрицательные предэлектрические заряды, соединенные предэлектрическими силовыми трубками,
- у пролонов есть ненулевой предэлектрический заряд, у элонов есть ненулевой предмассовый заряд,
- и пролоны и элоны образованы из атонов, которые представляют собой систему ориентированных 01-Ритов, напоминающих «катамаран с веслами».

Пролон, вокруг которого вращается элон, образует базовый элемент новой физической модели частиц света. Такой объект назван бароном. Принято предположение, что бароны способны соединяться в систему, напоминающую полимерную молекулу. В простейшем случае пары баронов мы имеем линейный аналог атома гелия (световой гелий). Все другие атомы света будут иметь свои аналоги с атомами материи, в чем-то совпадая по свойствам и в чем-то отличаясь от них (световой водород, световой литий …).

Рассмотрим «световой водород»: физическое изделие, состоящее из элона, вращающегося вокруг пролона. Будем считать, что рецепторы – реальные силовые линии, как и предзаряды, образованы из атонов. Понятно, что физическая среда, в которой находятся элоны и пролоны, будет иметь сложный состав и структуру.

Из общих соображений трудно сказать что-либо о свойствах атонов. Согласно принятой модели, для этого нужна как информация, подтверждающая реальность элонов, пролонов и атонов. Нужна также информация об их структуре и активности.

Фактически требуется изучить два новых уровня материи. Сделать это совсем не просто, учитывая, что для неполного изучения одного уровня материи – атомов и молекул – понадобились значительные усилия всего человечества в течение более 100 лет. На данной стадии «просто» было бы желательно найти некоторые аналогии в поведении материального и предполагаемых праматериальных миров.

В качестве исходного момента числового анализа примем точку зрения, что подход Фарадея-Максвелла к проблеме устройства и взаимодействия электрических зарядов пригоден для электрических предзарядов. Тогда мы можем думать, что предзаряды, имеющие разную топологическую структуру, соединены между собой силовыми трубками, рассматриваемыми как система «нитей». Примем точку зрения, что и предзаряды и силовые линии изготовлены из атонов. Такой модели раньше не было, поэтому ее ни с чем сравнить нельзя. Но по философии и существу физики этот вариант согласуется с представлениями Фарадея и Максвелла для электрических зарядов, что обеспечивает начала некоторой аналогии.

Учтем элементы, из которых образованы нотоны, а также специфику их соединения, следуя механической модели нотона с электрическими и гравитационными предзарядами.

Во-первых, заметим, что внутри нотона находятся положительные и отрицательные предмассы, соединенные силовой трубкой. Будем считать, что их кинетическая энергия равна нулю, так как общая масса равна нулю. Энергию силовой трубки, соединяющей предмассы, мы не будем считать априори равной нулю. Рассчитаем ее по формулам, аналогичным тем, которые используются для расчета силовой трубки, соединяющей электрические заряды.

Во-вторых, учтем, что снаружи нотона находятся положительные и отрицательные электрические предзаряды, соединенные силовой трубкой. Их кинетическую энергию, по аналогии с моделью предмасс, будем считать равной нулю.

Воспользуемся алгоритмом анализа энергии силовых трубок в «световом водороде», предложенным для электрических зарядов Томсоном. Он использовал для энергии силовой трубки выведенную тогда формулу

$$E = 2\pi f^2 V.$$

Здесь f - диэлектрическое смещение (поляризация), V - объем силовой трубки. Силовая трубка связывает между собой пару положительных и отрицательных электрических зарядов e. Поляризация рассчитывается по формуле

$$f \cdot S = \pi \cdot f \cdot b^2 = p \cdot e.$$

Внешний радиус кольца силовой трубки обозначим r, а радиус сечения - b. Коэффициент $p \le 1$, учитывает, все ли силовые линии сосредоточены в силовой трубке. Томсон получил выражение

$$E = 8\pi^2 \left(p \frac{r}{b} \right)^2 \frac{e^2}{c} \omega.$$

Частота задана формулой

$$\omega = \frac{c}{2\pi \cdot r}.$$

Если подставить в указанную формулу значение электрического заряда $e = 1.6021892 \cdot 10^{-19}$ кл, скорости света в вакууме $c = 2.9979256 \cdot 10^8 m \cdot c^{-1}$, получим выражение $E = h\nu$. Расчетное значение постоянной Планка h будет близко к ее экспериментальному значению, если принять условие, что

$$p \frac{r}{b} \cong \pi.$$

Применим это выражение для расчета энергии светового водорода, продолжив формулу Томсона на положительную и отрицательную предмассы. Этого следует ожидать, если принять, что на уровне праматерии предмассы и предэлектрические заряды в чем-то аналогичны. Тогда нужно выполнить замены, состоящие в том, что

$$e \to m, c \to c_g .$$

Рассчитаем энергию элона по формуле

$$E = 8\pi^2 \left(p \frac{r_e}{b_e(1)} \right)^2 \frac{\hat{e}^2}{c} \omega, \omega = \frac{c}{2\pi \cdot r_e}.$$

Для электрического предзаряда будем использовать значение

$$\hat{e} \geq 10^{-20} e.$$

Рассчитаем энергию пролона по формуле

$$E_m = \chi \cdot 8\pi^2 \left(p \frac{r_g}{b_g} \right)^2 \frac{\hat{m}^2}{c_g} \omega_m, \omega_m = \frac{c_g}{2\pi \cdot r_g} \cdot \frac{c}{c} \cdot \frac{r_e}{r_e} = \omega \cdot \frac{c_g r_e}{c r_g}.$$

Заметим, что $\omega_m = \omega$, если $c_g = c \dfrac{r_g}{r_e} \leq c.$ Для предмассы используем значение $\hat{m} \leq 10^{-20} m_e$. Величина m_e есть масса электрона, величиной c_g следует считать скорость передачи взаимодействия между положительными и отрицательными предмассами. Она пока не определена экспериментально. Величины r_g, b_g, используемые для пролона, по логике анализа, меньше величин r_e, b_e, используемых для элона. Примем предположение о геометрической «жесткости» пролона, полагая, аналогично модели силовой линии Томсона, что

$$p \frac{r_g}{b_g} \cong \pi.$$

Умножим E_m на множитель $\dfrac{e^2 c}{e^2 c} = 1$ и выполним преобразования. Получим выражение

$$E_m = \chi \left(\frac{m_e}{e} \right)^2 \frac{r_e}{r_g} 10^{-40} h\omega.$$

Согласно ему следует принять, что энергия прамассовой силовой трубки равна нулю. Поэтому следует считать, что вся выделяемая энергия обусловлена силовой трубкой, ассоциированной с электрическими предзарядами. Для «светового водорода», желая получить согласие расчета с экспериментом, требуется считать, что

$$p \frac{r_e}{b_e} \leq 10^{20}.$$

Из этого выражения следует, что минимальный радиус поперечного сечения силовой трубки для электрических предзарядов намного меньше внешнего радиуса силовой трубки: $b_e \geq 10^{-20} r_e$.

Запишем полученные выше формулы несколько иначе, используя систему единиц СИ. Тогда

$$E = 8\pi^2 \left(p\frac{r}{b} \right)^2 \frac{e^2}{\varepsilon_0 c}\omega.$$

Эта формула согласована с законом Кулона для электростатического взаимодействия зарядов. Действительно, если

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

$$q_1 = q_2 = q,$$

то работа будет задана выражением

$$dA = Fds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}ds.$$

Тогда формула

$$E_q = \alpha\frac{q^2}{\varepsilon_0 r}\frac{t}{t} \Rightarrow \alpha\frac{q^2}{\varepsilon_0 c_q}\omega(q)$$

аналогична полученной Томсоном.

Она следует из общих законов взаимодействия зарядов. Мы получили новое правило для энергии «квантов», ассоциированных с этим взаимодействием.
Для варианта модели

$$q = e, c_q = c_0, \left(p\frac{r}{b} \right) = 0{,}8742 \cdot 10^2,$$

где c_0 – скорость света в вакууме, e – заряд электрона, $p \le 1$- мера «размытости» электрических силовых линий, b – радиус силовой трубки, r – радиус поперечного сечения барона получим выражение для постоянной Планка

$$h(q) = 6{,}626 \cdot 10^{-34},$$

согласующееся с экспериментом. Назовем по-новому эту постоянную: постоянная электрического излучения.

Используя указанное правило, мы можем рассчитать энергию квантов, ассоциированных с гравитационным взаимодействием.

По аналогии с взаимодействием электрических зарядов получим выражение

$$E_\mu = 8\pi^2 \left(p\frac{r}{b} \right)\gamma\frac{m_e^2}{c_\mu}\omega_\mu.$$

Здесь γ – гравитационная постоянная, m_e – масса электрона, c_μ – скорость гравитационного «кванта», которая в качестве минимального значения может быть равна скорости света в вакууме. В этом варианте

$$E_\mu = 3{,}656 \cdot 10^{-78}\left(p\frac{r}{b} \right)\omega_\mu,$$

$$\bar{h}(\mu) = 3{,}656 \cdot 10^{-78}\left(p\frac{r}{b} \right).$$

Постоянная гравитационного излучения оказывается значительно меньше постоянной электрического излучения. Если же скорость гравитационного излучения значительно превосходит скорость света, то величина $\bar{h}(\mu)$ будет еще меньше. Этот результат может свидетельствовать, что передача энергии.

Заметим, что к аналогичным формулам для гравитационного излучения мы придем в модели $\mu -$ барона, рассчитывая его по формуле Томсона.

Для структурной реализации такой возможности требуется в бароне поменять местами пролон и элон. Элон расположится в центре, а пролон будет вращаться вокруг него.

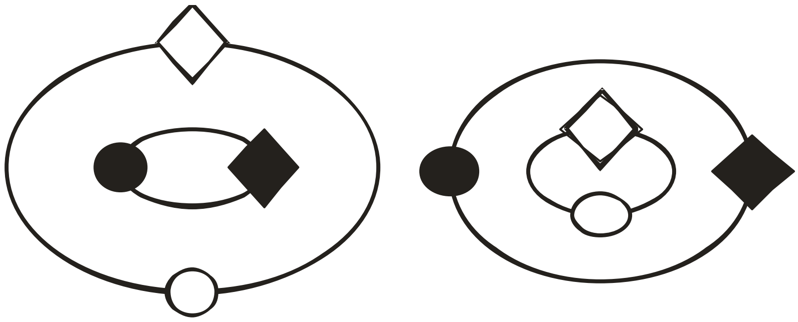

Рис. 1. Геометрическое представление $q -$ барона и $\mu -$ барона.

Выводы:

1. Из экспериментов по дифракции света следует, что поперечные размеры частицы света (им соответствует радиус r силовой трубки для электрических предзарядов) пропорциональны длине волны: $r \cong \lambda$. Толщина силовой трубки задается формулой $b \leq 10^{-25}\lambda$.

2. Рассмотрим нотон, содержащий N основных блоков. В этом случае энергия нотона есть сумма энергий ее отдельных «блоков». Получим формулу

$$E = N 8\pi^2 \frac{1}{N}\left(p\frac{r}{b(1)}\right)^2 \frac{\hat{e}^2}{c}\nu, \nu = \frac{c}{2r\pi}.$$

Из нее следует, что постоянная Планка «непостоянна», она меняется дискретно сообразно количеству блоков, из которых состоит нотон. По какой причине это может произойти? С физической точки зрения ясно, что для образования реальной конструкции из «блоков» требуется обеспечить их поперечное соединение. Предположим, что оно создается за счет элементов силовых линий исходных «блоков». Тогда может выполняться условие: сумма поперечных сечений силовых трубок для системы электрических предзарядов, зависит от числа «блоков» N. На языке формул это означает, что

$$N^{1/2} b(1) = b^* N.$$

Тогда толщина поперечного сечения силовой трубки b_i зависит от числа блоков:

$$b^* = \frac{b(1)}{N^{1/2}}.$$

Предполагая ее справедливость для большого числа слагаемых, мы придем к механизму самопроизвольного распада нотона. Если нотон содержит много основных блоков, толщина его силовых трубок может стать равной базовому физическому элементу, из которого образуется трубка.

В силу указанных обстоятельств невозможны ни инфракрасная, ни ультрафиолетовая катастрофы.

Нотон всегда имеет только конечные размеры. При большом количестве базовых «дисков» в нотоне их постоянная Планка стремится к нулю, что позволяет, согласно стандартному подходу, считать их классическими объектами.

3. Продольные соединения, согласно модели, способны дать вклад в энергию нотона, сравнимый с поперечными соединениями. Их силовые трубки тоже соединяют электрические предзаряды. Поэтому для них пригоден приведенный выше расчет, если продольные соединения устроены аналогично поперечным. Поэтому постоянная Планка уже для «светового гелия» может уменьшиться в четыре раза. Следовательно, постоянная Планка характеризует интегральный эффект влияния физической системы на измерительное устройство или на некоторое другое устройство. Она является интегральной физической постоянной. Если количество «блоков», из которых образован нотон, велико, постоянная Планка физически стремится к нулю, реализуя предполагаемый синтез квантовых и классических представлений о физической реальности.

4. Отметим, что расчет силовых трубок для предзарядов проводился по тем же формулам, по которым Томсон проводил расчет силовых трубок для зарядов. Это означает принятие гипотезы, что для предзарядов выполняются уравнения Максвелла. Поэтому электродинамика Максвелла может оказаться пригодной не только вне нотонов, но внутри их. Мы приходим к предположению, что модель для осредненных макровеличин, используемых в стандартной классической модели электромагнитных явлений, содержит в себе также информацию об отдельных микроблоках, из которых образуются исследуемые макроизделия.

Симметрийное представление гравитации

Нами рассмотрен вариант электродинамики в спинорной форме, выраженной через **ПАРУ кватернионов, которые** ассоциированной с матричной группой $SL(4,C)$ в мономиальном представлении. В такой модели величины, дифференциальные уравнения и связи между полями и индукциями имеют вид $G-$модуля на указанной матричной группе

Известно, (на примере закона Кулона и закона притяжения Ньютона), что взаимодействия между электрическими и массовыми зарядами схожи между собой. *Но видно и другое: для масс используются динамические уравнения, описывающие их поведение, а электрические заряды «не имеют» своей механики. Такой подход, по меньшей мере, странен, если принять предположение, что электрический и массовый заряды составлены по-разному, но из одних и тех же составных элементов*. **Мы понимаем, что электрические и гравитационные взаимодействия и силы имеют физически и математически схожую природу, различаясь не только по типу зарядов**. Исходя из этого и предположения об аналогии двух видов взаимодействия, построим *гравидинамику (динамику массовых зарядов), реализуя модель в спинорной форме на тройке **антикватернионов** группы* $PSL(4,C)$.

Построим вначале простой вариант массодинамики, исходя из предположения о возможной аналогии ее уравнений со структурой электродинамики в спинорной форме. Учтем факт, что стандартная модель электромагнитных явлений базируется на паре антисимметричных тензоров. Они порождаются, как и дифференциальные уравнения и связи между ними, парой кватернионов мономиального представления группы $PSL(4,C)$. Для массодинамики, принимая описание ее парой симметричных тензоров, естественно использовать тройку антикватернионов, которые содержатся в мономиальном представлении группы $PSL(4,C)$.

Отметим, что современные модели представляют собой попытки понять и описать гравитацию, изучая ее «внешние», видимые проявления. Например, так исследуется поведение планет Солнечной системы. Они моделируются массой и скоростью, присоединенными к физическому пространству и времени. Такой подход не в состоянии достичь «внутренней» сущности гравитации, гравитационного заряда, например. Не изучаются и внутренние движения, присущие гравитации. По форме и по сути подхода они продолжают модели одноуровневого материального мира, когда базовым физическим элементом анализа являются макротела. Практика давно уже свидетельствует, что реальность многоуровнева, материя имеет множество структурных элементов, софистатных друг другу. Поэтому становится актуальным и неизбежным анализ структурных составляющих материи, относящихся к гравитации. Требуется структурная теория гравитационных зарядов, а также физический анализ взаимодействий. Движение в этом направлении объективно приведет к структурной модели гравитации. В ней должна быть как-то отражена «квантовая» версия гравитации.

Простая векторная массодинамика

Построим векторную модель массодинамики в форме спинорных уравнений, ассоциированных с антикватернионами. Она позволит выразить математическое единство массодинамики и электродинамики, а также приблизиться к ее физической сути. Модель позволит обсуждать конструкцию массовых зарядов и сравнивать ее с конструкцией электрических зарядов. Появятся новые возможности для прояснения сущности взаимодействий, ассоциированных с указанными зарядами и внешними условиями, в которой они находятся.

И по форме и сути спинорную структуру уравнений массодинамики можно рассматривать как начало многоуровневой модели гравитационных явлений. Она ранее была обнаружена в электродинамике, однако в этом случае многоуровневость «скрыта». Произошло так потому, что электродинамика базируется на алгебре, качественно отличной от алгебры для массодинамики. В массодинамике возможно добавление конвективных слагаемых, что делает ее близкой к микродинамике. Более того, в таком варианте обнаруживаются естественные софистатности новой модели с известными, если на движение разных уровней материи накладываются дополнительные условия.

При построении простейшей модели массодинамики используем аналогию с абелевой электродинамикой.

Введём новые четырехпотенциалы и аналоги «электрических» $\vec{L} \approx \vec{E}$ и «магнитных» $\vec{K} \approx \vec{B}$»полей. Зададим

$$\begin{pmatrix} \partial_\tau & i\partial_z & i\partial_y & i\partial_x \\ i\partial_z & \partial_\tau & i\partial_x & i\partial_y \\ i\partial_y & i\partial_x & \partial_\tau & i\partial_z \\ i\partial_x & i\partial_y & i\partial_z & \partial_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ -i\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_x - iK_x \\ L_y - iK_y \\ L_z - iK_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\partial_x A_0 + \partial_0 A_x\} - i\{\partial_y A_z + \partial_z A_y\} \\ \{\partial_y A_0 + \partial_0 A_y\} - i\{\partial_z A_x + \partial_x A_z\} \\ \{\partial_z A + \partial_0 A_z\} - i\{\partial_y A_x + \partial_x A_y\} \\ 0 \end{pmatrix}.,$$

Так выводятся выражения для компонент симметричного тензора, основанного на паре антикватернионов, принадлежащих структуре группы заполнения физических моделей.

Аналогично можно вывести «конвективные» слагаемые для симметричного тензора. Пусть

$$\begin{pmatrix} A_0 & iA_z & iA_y & iA_x \\ iA_z & A_0 & iA_x & iA_y \\ iA_y & iA_x & A_0 & iA_z \\ iA_x & iA_y & iA_z & A_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ -i\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \{A_x A_0\} + \{A_y A_z\} \\ \{A_y A_0\} + \{A_z A_x\} \\ \{A_z A_0\} + \{A_x A_y\} \\ i\left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 - A_0^2\right) \end{pmatrix}.,$$

Получим обобщенный симметричный тензор

$$G_{nm} = \nabla_n A_m + \nabla_m A_n + r\{A_n A_m\}, A_n = \tau_a A_n^a.$$

Рассмотрим в качестве *пробного шага* для построения уравнения массодинамики соотношения

$$r^{ij} f_i \partial_j \varphi^* + g^{ij} e_i \partial_j \varphi = 0.$$

В матричном виде (следуя ранее принятым обозначениям) они выглядят так:

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{i}{c_g}\partial_t\right\}\begin{pmatrix} L_x - iK_x \\ L_y - iK_y \\ L_z - iK_z \\ L_0 - iK_0 \end{pmatrix} +$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{(-i)}{c_g}\partial_t\right\}\begin{pmatrix} L_x + iK_x \\ L_y + iK_y \\ L_z + iK_z \\ L_0 + iK_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда следуют векторные уравнения

$$-\partial_x(L_0 - iK_0) + \partial_y(L_z - iK_z) + \partial_z(L_y - iK_y) + \frac{i}{c_g}\partial_t(L_x - iK_x) +$$

$$+\partial_x(L_0 + iK_0) + \partial_y(L_z + iK_z) + \partial_z(L_y + iK_y) - \frac{i}{c_g}\partial_t(L_x + iK_x) = 0,$$

$$\partial_x(L_z - iK_z) - \partial_y(L_0 - iK_0) + \partial_z(L_x - iK_x) + \frac{i}{c_g}\partial_t(L_y - iK_{yx}) +$$

$$+\partial_x(L_z + iK_z) + \partial_y(L_0 + iK_0) + \partial_z(L_x + iK_x) - \frac{i}{c_g}\partial_t(L_y + iK_y) = 0$$

$$\partial_x(L_y - iK_y) + \partial_y(L_x - iK_x) - \partial_z(L_0 - iK_0) + \frac{i}{c_g}\partial_t(L_z - iK_z) +$$

$$+\partial_x(L_y + iK_y) + \partial_y(L_x + iK_x) + \partial_z(L_0 + iK_0) - \frac{i}{c_g}\partial_t(L_z + iK_z) = 0,$$

$$-\partial_x(L_x - iK_x) - \partial_y(L_y - iK_y) - \partial_z(L_z - iK_z) + \frac{i}{c_g}\partial_t(L_0 - iK_0) +$$

$$+\partial_x(L_x + iK_x) + \partial_y(L_y + iK_y) + \partial_z(L_z + iK_z) - \frac{i}{c_g}\partial_t(L_0 + iK_0) = 0.$$

Их можно записать в иной форме:

$$\partial_y L_z + \partial_z L_y + \frac{1}{c_g}\partial_t K_x = -i\partial_x K_0, \partial_x L_z + \partial_z L_x + \frac{1}{c_g}\partial_t K_y = -i\partial_y K_0,$$

$$\partial_x L_y + \partial_y L_x + \frac{1}{c_g}\partial_t K_z = -i\partial_z K_0, \partial_x K_x + \partial_y K_y + \partial_z K_z = \frac{i}{c_g}K_0.$$

Введем новый дифференциальный оператор:

$$rat\vec{L} = \begin{Bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ L_x & L_y & L_z \end{Bmatrix} = \vec{i}\left(\partial_y L_z + \partial_z L_y\right) + \vec{j}\left(\partial_x L_z + \partial_z L_x\right) + \vec{k}\left(\partial_x L_y + \partial_y L_x\right).$$

Он позволяет записать предложенные уравнения массодинамики для одного тензора в векторном виде, формально аналогичном уравнениям электродинамики Максвелла. Действительно, получим

$$rat\vec{L} = -\frac{1}{c_g}\partial_t \vec{K} - igradK_0, div\vec{K} = \frac{i}{c_g}K_0.$$

Чтобы достичь большего сходства с электродинамикой, рассмотрим частный случай с $K_0 = const = 0$. Получим упрощенные уравнения

$$rat\vec{L} = -\frac{1}{c_g}\partial_t \vec{K}, div\vec{K} = 0.$$

В электродинамике в силу антисимметричности тензоров отсутствуют диагональные элементы. Для симметричного тензора массодинамики их нужно как-то учесть. Используем для этого третий антикватернион, образующий подгруппу диагональных матриц Картана c^i в группе $SL(4,C)$. Будем рассматривать диагональные элементы симметричных тензоров независимо. Для этого используем проекционные матрицы:

$$\Pi^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Они сконструированы из матриц Картана $c^i, i = 0,1,2,3$ в виде:

$$\Pi^1 = 0{,}25\left(E + c^1 + c^2 + c^3\right), \Pi^2 = 0{,}25\left(E - c^1 + c^2 - c^3\right),$$
$$\Pi^1 = 0{,}25\left(E + c^1 - c^2 - c^3\right), \Pi^0 = 0{,}25\left(E - c^1 - c^2 + c^3\right).$$

Они получаются операцией самообъединения в соответствии со структурой самих матриц c^i:

$$c^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, c^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, c^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим их таким образом, чтобы конструируемые дифференциальные уравнения естественно давали «волновые» уравнения для четырехпотенциала гравидинамики.

Используем, аналогично $\left(e^i, f^i\right)$ пару. Пусть $A = col\left(A_x, A_y, A_z, A_0\right)$. Рассмотрим уравнения

$$\Pi^i \partial_i A + \Pi^i \partial_i A = 0.$$

Получим в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 2\partial_x A_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\partial_y A_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\partial_z A_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\partial_0 A_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Рассмотрим вариант *дополнения* предыдущих уравнений новыми слагаемыми:

$$r^{ij} f_i \partial_j \varphi^* + g^{ij} e_i \partial_j \varphi + 2\Pi^i \partial_i{}^2 A = 0, A = column(A_1, A_2, A_3, A_0).$$

Пусть также, по аналогии с электродинамикой, $K_0 = L_0 = 0.$ Получим уравнения вида

$$rat\vec{L} = -\frac{1}{c_g}\partial_t \vec{K} - 2grad^2\vec{A}, div\vec{K} = \frac{2}{c^2{}_g}\frac{\partial A_0}{\partial t}.$$

Здесь использован оператор

$$grad^2\vec{A} = \vec{i}\partial_x^2 A_x + \vec{j}\partial_y^2 A_y + \vec{k}\partial_z^2 A_z.$$

Предлагаемые уравнения построены с использованием двух новых дифференциальных операторов:

$$rat\vec{L}, grad^2\vec{A}.$$

Их нет в электродинамике, они не использовались и в других разделах физики. Понятно, что мы получаем некую качественно новую физическую модель. Выполним ее начальный анализ. Обратим внимание на возможные новые физические следствия.

Однотензорная массодинамика

Выразим симметричный тензор гравидинамики формулой

$$\varphi_{kl} = \partial_k A_l + \partial_l A_k.$$

Получим компоненты тензора, образованные дифференцированием четырехпотенциала по координатам. Рассматриваемый вариант можно назвать *абелевой массодинамикой*. В матричном виде

$$\varphi_{ij} = \begin{pmatrix} 2\partial_x A_1 & \partial_x A_2 + \partial_y A_1 & \partial_x A_3 + \partial_z A_1 & \partial_x A_0 + \partial_0 A_1 \\ \partial_x A_2 + \partial_y A_1 & 2\partial_y A_2 & \partial_y A_3 + \partial_z A_2 & \partial_y A_0 + \partial_0 A_2 \\ \partial_x A_3 + \partial_z A_1 & \partial_y A_3 + \partial_z A_2 & 2\partial_z A_3 & \partial_z A_0 + \partial_0 A_3 \\ \partial_x A_0 + \partial_0 A_1 & \partial_y A_0 + \partial_0 A_2 & \partial_z A_0 + \partial_0 A_3 & 2\partial_0 A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{11} & L_z & L_y & K_x \\ L_z & L^{22} & L_x & K_y \\ L_y & L_x & L^{33} & K_z \\ K_x & K_y & K_z & L^{00} \end{pmatrix}.$$

Антисимметричный тензор, в котором аналогично рассматривается разность дифференциальных выражений, используется в абелевой электродинамике. В этом случае

$$h_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x A_2 - \partial_y A_1 & \partial_x A_3 - \partial_z A_1 & \partial_x A_0 - \partial_0 A_1 \\ \partial_x A_2 - \partial_y A_1 & 0 & \partial_y A_3 - \partial_z A_2 & \partial_y A_0 - \partial_0 A_2 \\ \partial_x A_3 - \partial_z A_1 & \partial_y A_3 - \partial_z A_2 & 0 & \partial_z A_0 - \partial_0 A_3 \\ \partial_x A_0 - \partial_0 A_1 & \partial_y A_0 - \partial_0 A_2 & \partial_z A_0 - \partial_0 A_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем тензор

$$\varphi^{ij} = \gamma^{ik}\gamma^{jl}\varphi_{kl}, \gamma^{ik} = diag(1,1,1,1).$$

Рассмотрим уравнения тензорного вида

$$\partial_i \varphi^{ij} = s^j.$$

Они совпадут с векторными уравнениями гравидинамики при $K_0 = 0$, полученными нами ранее. Проведем их анализ. *Заметим, что «электрический» вектор массодинамики построен из уравнений для четырехпотенциалов массодинамики по аналогии с «магнитным» вектором электродинамики. Заметим, что дифференциальные операторы используются разные, поэтому эта аналогия является только формальной.*

Запишем дифференциальные уравнения для четырехпотенциалов массодинамики. Они имеют вид

$$\partial_x(2\partial_x A_1) + \partial_y(\partial_x A_2 + \partial_y A_1) + \partial_z(\partial_x A_3 + \partial_z A_1) + \partial_0(\partial_x A_0 + \partial_0 A_1)... \Rightarrow$$

$$\nabla^2 A_1 + \partial_0{}^2 A_1 + \partial_x\left(div\vec{A} + \partial_0 A_0\right) = s_1,$$

$$\nabla^2 A_2 + \partial_0{}^2 A_2 + \partial_y\left(div\vec{A} + \partial_0 A_0\right) = s_2,$$

$$\nabla^2 A_3 + \partial_0{}^2 A_3 + \partial_z\left(div\vec{A} + \partial_0 A_0\right) = s_3,$$

$$\nabla^2 A_0 + \partial_0{}^2 A_0 + \partial_0\left(div\vec{A} + \partial_0 A_0\right) = s_0.$$

Примем условие

$$div\vec{A} + \partial_0 A_0 = const = 0.$$

Для четырехпотенциала массодинамики получим уравнения, «аналогичные» используемым в электродинамике. Компоненты ПЕРВОГО четырехпотенциала массодинамики подчинены «волновому» уравнению вида

$$\nabla^2 A_p + \partial_0{}^2 A_p = s_p.$$

Отметим, что **предложенные уравнения в частном случае содержат модель Ньютона**. Действительно, если оставить ненулевой только четвертую компоненту четырехпотенциала и отождествить величину s_0 с плотностью массы ρ, получим уравнение Лапласа для гравитационного поля. Поэтому начальная модель массодинамики согласуется с теорией Ньютона.

Слово «волновому» взято в кавычки потому, что дифференциальный оператор второго порядка может относиться не только к гиперболическому, но и к эллиптическому типу. Это зависит от выбора выражения для координаты времени и компонент четырехпотенциала массодинамики. Обычный волновой оператор является гиперболическим. Для него известны решения и поведение полей. Этот волновой процесс хорошо изучен в электродинамике

Для эллиптического оператора меняется структура решений. Если исходным является общее выражение для четырехметрики, полученное в электродинамике, которое зависит от динамической скалярной функции, то становится возможным изменение сигнатуры. Известно, что изменение сигнатуры приводит к потере устойчивости решений. Следовательно, массодинамика изначально приводит к модели, которая обладает свойствами потери устойчивости решений, характерной для динамического хаоса.

Есть и другие специфические моменты. Действительно, рассмотрим решения в форме плоской волны для эллиптического уравнения вида

$$A_p = A_{p0} \exp\left\{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)\right\}.$$

По стандартной методике получим дисперсионное уравнение

$$k^2 + \frac{\omega^2}{c_g^2} = 0.$$

Из него следует, что уравнения массодинамики для первого четырехпотенциала обладают свойством задавать мнимую скорость для гравитационного взаимодействия:

$$c_g = \pm i \frac{\omega}{k}.$$

Мы приняли точку зрения, что мнимые величины свидетельствуют о «внутренних» движениях. Тогда из простейшей модели гравидинамики следует, что у гравитации могут быть практически необнаружимые внешние движения и скрытое изменение внутреннего состояния. Таким может быть поведение конструкций, ассоциированных с массами. В частности, э*то могут быть некоторые периодические изменения в самой структуре масс и тех элементов, из которых они изготовлены.* По этой причине анализируемые процессы и состояния может быть сложно измерить.

«Слабость» гравитации может оказаться иллюзорной потому, что для нее могут быть более важны внутренние движения, а внешние проявления могут быть достаточно малы.

Сравнение массодинамики с другими моделями гравитации

Рассмотрим систему уравнений массодинамики для первого четырехпотенциала без учета конвективных движений в виде

$$\gamma^{kl} \partial_k \partial_l A_p = 0, \gamma^{kl} \partial_k A_l = 0.$$

Покажем, как из неё следует релятивистская модель гравитации Логунова. Во-первых, *выразим четырехпотенциал гравидинамики* $A_p(g)$ *через четырехскорость праматерии* u^s *и новую переменную - симметричный тензор второго ранга* $\sigma_{ps}, \sigma = \det|\sigma_{ps}|$. Пусть

$$A_p = \sigma_{ps} \sqrt{-\sigma} \frac{u^s}{\sqrt{-\sigma}} = \tilde{\sigma}_{ps} \hat{u}^s.$$

Тогда

$$\gamma^{kl} \partial_k \partial_l A_p = \gamma^{kl} \partial_k \partial_l \left(\tilde{\sigma}_{ps} \hat{u}^s \right) = \left(\gamma^{kl} \partial_k \partial_l \tilde{\sigma}_{ps} \right) \hat{u}^s + 2\gamma^{lk} \partial_l \tilde{\sigma}_{ps} \partial_k \hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps} \gamma^{kl} \partial_k \partial_l \hat{u}^s.$$

Во-вторых, примем предположения:

- конвективные слагаемые значительно «меньше» волновых слагаемых,
- поведение праматерии согласовано со свойствами материи, в частности, с тензором энергии-импульса материи $\tilde{T}_{ps}$ (алгоритм позволяет учесть дополнительно тензор энергии-импульса самого гравитационного поля $\tilde{T}_{ps}(g)$),
- конкретизируем движение праматерии условием

$$2\gamma^{lk} \partial_l \tilde{\sigma}_{ps} \partial_k \hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps} \gamma^{kl} \partial_k \partial_l \hat{u}^s = (k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon \tilde{\sigma}_{ps}) \hat{u}^s.$$

Получим уравнения массодинамики, согласованные с поведением праматерии:

$$\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\sigma}_{ps} = k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps}.$$

В-третьих, найдем дополнительные ограничения, которые следуют из калибровочных условий:

$$\gamma^{kl}\partial_k A_l = \gamma^{kl}\partial_k\left(\tilde{\sigma}_{ls}\hat{u}^s\right) = \left(\gamma^{kl}\partial_k\tilde{\sigma}_{ls}\right)\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s = 0\,.$$

Если

$$\tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s = \tilde{\chi}_s\hat{u}^s,$$

то

$$\gamma^{kl}\partial_k\tilde{\sigma}_{ls} = \tilde{\chi}^s.$$

В предлагаемой системе уравнений массодинамики кроме анализа «метрического тензора» проводится расчет поведения праматерии. Ее поведение обязано зависеть от массивных тел, а также от гравитационного излучения.

Эта модель является новой по ряду признаков. Она многоуровнева. У нее много возможностей, не учитываемых в обычных моделях гравитации. Кроме этого, в ней «метрический тензор» или физическое тензорное поле являются частью общей конструкции в массодинамике. Получим тензорную модель массодинамики, учитывающую движение праматерии, зависящее от массивных тел:

$$\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\sigma}_{ps} = k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps}, \gamma^{kl}\partial_k\tilde{\sigma}_{ls} = \chi_s,$$
$$2\gamma^{lk}\partial_l\tilde{\sigma}_{ps}\partial_k\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\hat{u}^s = (k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps})\hat{u}^s,$$
$$\tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s = \tilde{\chi}_s\hat{u}^s.$$

В-четвертых, введем контрвариантные компоненты используемых тензоров по правилу

$$\tilde{\sigma}_{ps} = \lambda_{pr}\lambda_{sq}\tilde{\sigma}^{rq}, \tilde{T}_{ps} = \lambda_{pr}\lambda_{sq}\tilde{T}^{rq}.$$

Пусть $\lambda_{ij} = const$. Указанные выше уравнения преобразуются в систему вида

$$\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\sigma}^{ps} = k\tilde{T}^{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}^{ps},$$
$$\gamma^{kl}\partial_k\delta_{lp}\tilde{\sigma}^{ps} = \tilde{\chi}^s,$$
$$2\gamma^{lk}\partial_l\tilde{\sigma}_{ps}\partial_k\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\hat{u}^s = (k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps})\hat{u}^s,$$
$$\tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s = \tilde{\chi}_s\hat{u}^s.$$

Они обобщают систему уравнений релятивистской теории гравитации: мы используем в ней систему четырехметрик, гравитационные явления зависят от поведения праматерии. К таким выводам мы приходим, используя только один тензор массодинамики. Примем предположение, что он описывает структуру и влияние 0-РИТОВ для гравитации. Однако есть еще второй тензор массодинамики, который подчинен более сложным уравнениям. Он описывает структуру и поведение 1-РИТОВ, ассоциированных с массами. Поэтому предлагаемая модель массодинамики качественно отлична от моделей, используемых ранее.

Поскольку релятивистская теория гравитации не только согласуется с подходом и моделью Эйнштейна, а развивает и обобщает ее, предлагаемая модель гравидинамики содержит в себе в частном случае теорию гравитации Эйнштейна.

Учет материальных тел, как это уже обнаружено в теории электрона и в гидродинамической модели микродинамики, может и должен выполняться через конструирование правых частей предлагаемых уравнений. Однако это только одна возможность. Есть и другие возможности, которые следует учесть.

Поскольку материя многоуровнева, требуется задавать структурные и динамические уравнения для каждого уровня материи. Затем их нужно согласовывать друг с другом. Таких задач мы не решали ранее. К ним подойти нужно совсем вниманием и осторожностью. *Поэтому из общих соображений следует, что вариант абелевой гравидинамики значительно выходит за рамки стандартной классической релятивистской теории гравитации.*

Обратимся к релятивистской теории гравитации Логунова. В его модели введено соответствие

$$g_{rl} = \sqrt{-\gamma}\gamma_{rl} + \sqrt{-\gamma}\varphi_{rl}.$$

Здесь $\gamma = Det\gamma_{rl}, \gamma_{rl} = diag(1,1,1,-1)$ – метрика Минковского, φ_{rl} - тензорное физическое поле гравитации.

Поскольку поля инерции могут и должны быть присущи любому материальному объекту (а «поля» относятся к таким объектам), то и гравитационное поле тоже владеет инерцией и тяготением. Поэтому может и должна быть пара тензорных физических полей, что обнаруживается при построении массодинамики по аналогии с электродинамикой.

В электродинамике эффекты инерции скрыты из-за тождественного выполнения первой пары уравнений электродинамики при переходе к четырехпотенциалам. Но они учитываются во второй паре уравнений через связи между полями и индукциями. В случае пространства постоянной кривизны метрика инерции подчинена уравнениям

$$R_{ij} - \frac{1}{2}\Omega_{ij}R = 0.$$

Логунов показал, что уравнения релятивистской теории гравитации приводят к **формальному соответствию** с теорией гравитации Эйнштейна, хотя физические их основы и выводы во многом различаются. В этом случае «эффективная» метрика будет подчинена уравнениям

$$R_{ij} - \frac{1}{2}\Omega_{ij}R = \kappa T_{ij}.$$

В силу указанных обстоятельств мы вправе ожидать, что, с общих позиций анализа, бипотенциальная абелева массодинамика представляет собой дальнейшее развитии известных моделей гравитации. Возможность рассмотрения метрического тензора гравитации как тензорного произведения пары четырехпотенциалов гравидинамики свидетельствует о том, что мы имеем модель, учитывающую **глубинные стороны и свойства гравитации**. Аналогия с электродинамикой облегчает понимание физических ситуаций в гравитации и, по-видимому, стимулирует создание технических устройств для новой физической практики.

Наличие первого четырехпотенциала позволяет ввести в рассмотрение семейство решений в форме *постоянных значений четырехпотенциала*. При переходе к четырехметрикам эффективного риманова пространства на основе тензорного произведения четырехпотенциалов мы получим систему постоянных четырехметрик. В частности, из уравнений для первого четырехпотенциала массодинамики следует также метрика Ньютона.

Система постоянных четырехметрик является качественно новым звеном электродинамики в спинорной форме. Она важна и для других разделов физики.

Легко понять, что предложенная модель является простейшей. Происходит это по двум причинам. Во-первых, не детализирован тензор напряжений праматерии и ее составляющие. Поскольку мы выделили 8 базовых физических объектов и допускаем существование большого количества изделий, изготовленных из них, указанные выше величины будут зависеть от всех физических слагаемых. Во-вторых, следует учесть всю систему ранговых движений: размеры, скорости, ускорений и т.п. В частности, требует усложнения зависимость 4-потенциала массодинамики от всей совокупности обозначенных величин и их свойств. Например, можно рассмотреть выражение

$$A_k(g) = a_s \sigma_{kl}{}^{sp} v_p^l + b_s \kappa_{kl}{}^{sp} v_p^l .$$

Здесь индекс s выражает ранг учитываемого движения, индекс p выражает тип микрообъекта, принадлежащего тонкой материи (открытые или замкнутые струны, электрические или гравитационные предзаряды…). Тензоры $\sigma_{kl}^{sp}, \kappa_{kl}^{sp}$ - задают слагаемые напряжений в тонкой материи, обусловленные разными типами этой материи.

Понятно, что возникает проблема замыкания уравнений для тонкой материи, решение которой станет возможным после достаточно сложной экспериментальной работы.

Вывод: Матричная группа заполнения физических моделей удобна для представления гравитационных явлений.

Группа заполнения физических моделей в механике жидкостей

Мы показали выше, что подгруппы матричной группы могут быть эффективно использованы для записи уравнений электродинамики (построенной на антисимметричных тензорах), а также уравнений гравитации (построенных на симметричных тензорах). В обоих случаях модели используют только часть элементов группы заполнения. Поскольку, с физической точки зрения, электромагнетизм и гравитация физически едины, было бы желательно изучить уравнения, в которых этот факт используется. Конечно, в идеальном случае было бы желательно согласовать модель с экспериментом.

Покажем, что такие надежды оправданы в рамках используемого формализма. Более того, мы получаем некую возможность для преодоления «пропасти» между структурными и бесструктурными физическими теориями.

Он основан на записи уравнений механики вязкой жидкости в форме обобщенной калибровочной модели. Эксперименты доказали структурность механики жидкости. Она физически основана на атомах и молекулах.

Если калибровочные поля, которые по сложившейся физической идеологии, не имеют структуры, аналогичны уравнениям жидкости, мы получаем дополнительные аргументы для поиска моделей структурного описания полей.

Рассмотрим алгоритм вывода уравнений динамики вязкой жидкости, основанный на построении закона сохранения для пары тензоров.

Пусть один тензор зависит от произведений компонент скорости, а другой тензор зависит от произведений компонент скорости на производные от компонент скорости по координатам.

Тогда

$$N^{ij} = \begin{pmatrix} u^1u^1 & u^1u^2 & u^1u^3 & u^1u^0 \\ u^2u^1 & u^2u^2 & u^2u^3 & u^2u^0 \\ u^3u^1 & u^3u^2 & u^3u^3 & u^3u^0 \\ u^0u^1 & u^0u^2 & u^0u^3 & u^0u^0 \end{pmatrix}, \Phi^{ij} = \begin{pmatrix} \partial_1 u^1 & \partial_1 u^2 & \partial_1 u^3 & \partial_1 u^0 \\ \partial_2 u^1 & \partial_2 u^2 & \partial_2 u^3 & \partial_2 u^0 \\ \partial_3 u^1 & \partial_3 u^2 & \partial_3 u^3 & \partial_3 u^0 \\ \partial_0 u^1 & \partial_0 u^2 & \partial_0 u^3 & \partial_0 u^0 \end{pmatrix}.$$

Применим к ним требование закона сохранения энергии и импульса, в форме

$$\partial_i \left(\alpha N^{ij} + \beta \Phi^{ij} \right) = f^j .$$

Легко показать, что в этом случае мы приходим к обобщенным уравнениям движения вязкой жидкости. Модифицируем их. Запишем тензоры второго ранга через симметричные и антисимметричные слагаемые:

$$N^{ij} = 0{,}5\left(N^{ij} - N^{ji}\right) + 0{,}5\left(N^{ij} + N^{ji}\right) = N^{ij}(1) + N^{ij}(2),$$

$$\Phi^{ij} = 0{,}5\left(\Phi^{ij} - \Phi^{ji}\right) + 0{,}5\left(\Phi^{ij} + \Phi^{ji}\right) = \Phi^{ij}(1) + \Phi^{ij}(2).$$

Получим

$$N^{ij}(1) = 0{,}5\begin{pmatrix} 0 & u^1u^2 & u^1u^3 & u^1u^0 \\ u^2u^1 & 0 & u^2u^3 & u^2u^0 \\ u^3u^1 & u^3u^2 & 0 & u^3u^0 \\ u^0u^1 & u^0u^2 & u^0u^3 & 0 \end{pmatrix}_{[\,]}, \Phi^{ij}(1) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1u^2 & \partial_1u^3 & \partial_1u^0 \\ \partial_2u^1 & 0 & \partial_2u^3 & \partial_2u^0 \\ \partial_3u^1 & \partial_3u^2 & 0 & \partial_3u^0 \\ \partial_0u^1 & \partial_0u^2 & \partial_0u^3 & 0 \end{pmatrix}_{[\,]},$$

$$N^{ij}(2) = 0{,}5\begin{pmatrix} u^1u^1 & u^1u^2 & u^1u^3 & u^1u^0 \\ u^2u^1 & u^2u^2 & u^2u^3 & u^2u^0 \\ u^3u^1 & u^3u^2 & u^3u^3 & u^3u^0 \\ u^0u^1 & u^0u^2 & u^0u^3 & u^0u^0 \end{pmatrix}_{\{\,\}}, \Phi^{ij}(2) = 0{,}5\begin{pmatrix} \partial_1u^1 & \partial_1u^2 & \partial_1u^3 & \partial_1u^0 \\ \partial_2u^1 & \partial_2u^2 & \partial_2u^3 & \partial_2u^0 \\ \partial_3u^1 & \partial_3u^2 & \partial_3u^3 & \partial_3u^0 \\ \partial_0u^1 & \partial_0u^2 & \partial_0u^3 & \partial_0u^0 \end{pmatrix}_{\{\,\}}.$$

Знаки коммутаторов и антикоммутаторов в качестве нижних индексов под обозначениями тензоров с числами означают, что мы имеем дело с коммутаторами и антикоммутаторами, обозначенными в выражениях.

Так, например, получим

$$\left[\partial_1u^2\right] = \partial_1u^2 - \partial_2u^1, \left\{u^1u^2\right\} = u^1u^2 + u^2u^1 \ldots.$$

Заметим, что уравнения движения жидкости могут быть записаны в виде модуля на матричной группе заполнения по новому алгоритму, более сложному, чем алгоритм, используемый для электромагнитных или гравитационных явлений. Запишем, для примера, уравнения динамики идеальной жидкости.

Получим после дифференцирования тензора N^{ij} «волновую функцию» вида

$$\Psi = \begin{pmatrix} u^1\partial_1u^1 & u^2\partial_2u^1 & u^3\partial_3u^1 & u^0\partial_0u^1 \\ u^1\partial_1u^2 & u^2\partial_2u^2 & u^3\partial_3u^2 & u^0\partial_0u^2 \\ u^1\partial_1u^3 & u^2\partial_2u^3 & u^3\partial_3u^3 & u^0\partial_0u^3 \\ u^1\partial_1u^0 & u^2\partial_2u^0 & u^3\partial_3u^0 & u^0\partial_0u^0 \end{pmatrix}.$$

Она может быть записана через всю совокупность матриц группы заполнения, если матрицы умножить на сумму элементов, получаемую при пересечении Ψ с данной матрицей. Так, получим

$$\Psi = E\left(u^1\partial_1u^1 + u^2\partial_2u^2 + u^3\partial_3u^3 + u^0\partial_0u^0\right) + \ldots + f_3\left(u^2\partial_2u^1 + u^1\partial_1u^2 - u^0\partial_0u^3 - u^3\partial_3u^0\right).$$

Запишем уравнения механики вязкой жидкости в виде, учитывающем коммутаторы и антикоммутаторы:

$$\partial_i\left(\alpha\left(N^{ij}(1) + N^{ij}(2)\right) + \beta\left(\Phi^{ij}(1) + \Phi^{ij}(2)\right)\right) = f^j.$$

Они задают «электромагнитную» (антисимметричную) и «гравитационную» (симметричную) части динамики. Действительно,

$$\partial_i\left(\alpha N^{ij}(1) + \beta\Phi^{ij}(1)\right) + \partial_i\left(\alpha N^{ij}(2) + \beta\Phi^{ij}(2)\right) = f^j.$$

В иной форме они выглядят так:

$$\partial_i\tilde{F}^{ij} + \partial_i\tilde{G}^{ij} = f^j.$$

Здесь выполнена модификация тензорной структуры уравнений с учетом четырехметрики. Тогда

$$\tilde{F}^{ij} = \alpha N^{ij}(1) + \beta\Phi^{ij}(1), \tilde{G}^{ij} = \alpha N^{ij}(2) + \beta\Phi^{ij}(2).$$

Дифференциальные выражения содержат модель калибровочных полей вида

$$F_{kl} = (\partial_k u_l - \partial_l u_k) + (u_k u_l - u_l u_k) = (\partial_k u_l - \partial_l u_k) + \lfloor u_k, u_l \rfloor.$$

Она композиционно деформирована скалярами α, β. Они содержат также модифицированную часть гравитационных полей в представлении потенциала вида

$$G_{kl} = (\partial_k u_l + \partial_l u_k) + (u_k u_l + u_l u_k) = (\partial_k u_l + \partial_l u_k) + \{u_k, u_l\}.$$

Она деформирована теми же скалярами α, β. Если величины u^k есть компоненты четырехвектора, то коммутатор равен нулю. Мы получаем тогда абелево калибровочное поле. Антикоммутатор в этом случае не равен нулю. С физической точки зрения это обстоятельство означает, что симметричное «гравитационное» слагаемое подчинено более сложным законам, чем несимметричное «электромагнитное».

Принимая идеологию и алгоритмы построения неабелевых калибровочных полей, разработанные в теории классического и квантового поля, мы можем предложить обобщение модели вязкой жидкости. Выразим компоненты скорости в матричном виде, полагая

$$u_k = a\tau_\alpha u_k^\alpha .$$

Здесь, следуя модели калибровочных полей, τ_α задают генераторы группы симметрии. Модель жидкости, состоящей из нескольких компонент u_k^α, можно назвать «неабелевой» моделью.

Ситуацию можно формально обобщить, исходя из концепции неассоциативного множества, порождаемого из матричной группы на основе комбинаторной операции. Генераторы группы симметрии τ_α можно дополнить генераторами σ_α группы, подчиненной поэлементному произведению Адамара, состоящей из элементов множества, неассоциативного по комбинаторному произведению.

Коррекция модели элементами неассоциативного множества соответствует, с физической точки зрения, тому, что мы вводим в жидкость «примеси», поведение которых может отличаться от поведения жидкости.

С математической точки зрения применяется обобщение величин в форме

$$u_k = a\tau_\alpha u_k^\alpha + b\sigma_\beta u_k^\beta.$$

Этот вариант можно обобщить таким образом, чтобы модель допускала самостоятельное рассмотрение электромагнитного и гравитационного «поля». Обобщенные уравнения механики жидкости в форме обобщенных законов сохранения энергии и импульса выглядят так:

$$u_k = a\tau_\alpha u_k^\alpha + b\sigma_\beta u_k^\beta,$$

$$\partial_i\left[\Omega^{ik}\Omega^{jl}\left(\alpha_1(\partial_k u_l - \partial_l u_k) + \beta_1(u_k u_l - u_l u_k)\right)\right] + \partial_i\left[\tilde{\Omega}^{ik}\tilde{\Omega}^{jl}\left(\alpha_2(\partial_k u_l + \partial_l u_k) + \beta_2(u_k u_l + u_l u_k)\right)\right] = F^j.$$

Здесь величины Ω^{ik} обозначают компоненты тензора, ассоциированного со свойствами среды. Они сложны и их нужно находить из дополнительных соображений. Формальная система уравнений содержит слагаемые, которые дополняют коммутаторы и антикоммутаторы алгебры дифференциальными выражениями. Кроме этого, вводятся элементы, соединяющие полученные звенья математической модели между собой. Физическая модель построена в форме дифференциального закона сохранения для полученного «комплекса» величин.

Если $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \beta_2 = 0$, вместо силы ввести плотность электрического тока, мы получаем стандартную теорию электромагнитных явлений:

$$\Omega^{ik}\Omega^{jl}\nabla_i\left((\nabla_k A_l(e) - \nabla_l A_k(e))\right) = S^j.$$

Если $\alpha_1 = \alpha = 0{,}5\alpha, \beta_1 = \beta_2 = 0{,}5\beta, F^i$ (плотность силы), мы имеем дело с формой уравнений механики вязкой жидкости.

Если $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = \beta_2 = 1$ и вместо силы ввести плотность массового тока, мы получаем теорию гравитационных явлений, выраженную через четырехпотенциал и симметричный тензор второго ранга:

$$\tilde{\Omega}^{ik}\tilde{\Omega}^{jl}\nabla_i\left(\left(\nabla_k A_l(m) + \nabla_l A_k(m)\right) + \left(A_k(m)A_l(m) + A_l(m)A_k(m)\right)\right) = Q.$$

При использовании римановой связности получим обобщенную, формальную систему уравнений для движения жидкости в ковариантном виде:

$$\Omega^{ik}\Omega^{jl}\nabla_i\left(\alpha_1\left(\nabla_k u_l - \nabla_l u_k\right) + \beta_1\left(u_k u_l - u_l u_k\right)\right) +$$
$$+ \tilde{\Omega}^{ik}\tilde{\Omega}^{jl}\nabla_i\left(\alpha_2\left(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k\right) + \beta_2\left(u_k u_l + u_l u_k\right)\right) = F^i.$$

Вывод. *Уравнения движения вязкой жидкости, уравнения неабелевых и абелевых электромагнитных полей, уравнения неабелевой и абелевой гравитации, заданные через четырехпотенциалы, можно представить в едином виде. Этот вид базируется на матричной группе заполнения физических моделей.*

В физических задачах важную роль играют «конвективные» слагаемые. Произведение компонент скоростей относится к их числу. Однако ситуация, представленная выше, кажется очень упрощенной, если принять во внимание факт, что у компонент скорости могут быть слагаемые, обусловленные как электрическими, так и гравитационными предзарядами. Тогда естественно представить компоненты выражением

$$u^i = \alpha(i)u_q^i + \beta(i)u_\mu^i, N^{ij} = u^i u^j = \left(\alpha(i)u_q^i + \beta(i)u_\mu^i\right)\left(\alpha(j)u_q^j + \beta(j)u_\mu^j\right).$$

Тогда

$$N^{ij} = \alpha N_q^{ij} + \beta N_{q\mu}^{ij} + \gamma N_\mu^{ij}.$$

Каждое из указанных слагаемых допускает разложение на частично антисимметрийную и частично симметрийную части. Так, получим

$$N_\varsigma^{ij} = a(\varsigma)\left(N_\varsigma^{ij} - N_\varsigma^{ji}\right) + \left(1 - a(\varsigma)\right)\left(N_\varsigma^{ij} + N_\varsigma^{ji}\right) + \left(2a(\varsigma) - 1\right)N_\varsigma^{ij}, \varsigma \to q, q\mu, \mu.$$

Поскольку разные слагаемые могут быть по-разному представлены в динамике, естественно попытаться корректно учитывать их как в исходной модели, так и при экспериментальном исследовании ситуаций. Принятая точка зрения соответствует фундаментальной гипотезе: *доступное математическим средствам, в силу софистатности математики и физики, может иметь экспериментальное проявление*.

Ожидаемые перспективы симметрийного физического моделирования

Концепция группы заполнения, базирующаяся на системе мономиальных матриц со значимыми числами, соответствующими полугруппе $[-1,0,1]$, доказала свою эффективность в задачах физического моделирования.

Перспективы дальнейшего моделирования достаточно очевидны:

- применить к матрицам новые операции, изучить их проявления в физических моделях,
- обобщить концепцию ассоциативных объектов (в частности, групп заполнения физических моделей) до совокупности неассоциативных объектов, выступающих в роли инструмента физического моделирования,
- выяснить соотношение и роль ассоциативных и неассоциативных множеств в задачах физического моделирования,
- решить практические задачи, в которых важно учитывать неассоциативность, а также новые операции с матрицами.

Назовём такое вид расширения *операционной деформацией модели*. Её аналогом являются формализмы квантования, используемые для классических моделей.

Рассматривая проблему взаимодействия с математической точки зрения, мы понимаем, что речь может идти, с одной стороны, об изменении величин, используемых в модели, с другой стороны, об изменении операций, используемых в модели.

Анализ многоуровневой материи предполагает построение моделей как для каждого из её уровней, так и для системы в целом. Естественно ожидать, что взаимодействие материи на каждом из уровней, а также между уровнями, может быть разным. Было бы желательно разобраться в этих вопросах с физической точки зрения, используя эксперименты и измерительную технику. Однако как на очень малых, так и на очень больших расстояниях сделать это очень трудно, а, может быть и вообще будет невозможно. Кроме этого, для такого исследования нужны значительные материальные средства.

В силу указанных обстоятельств желательно создавать новые математические *инструменты для* построения базовых физических моделей, способных описывать как разные физические изделия, так и *разные виды взаимодействия*. Для выполнения такого плана следует использовать уже известные модели. Для них нужно найти алгоритмы оценки уровня фундаментальности моделей, их познавательной корректности. Ещё более важно построить общий алгоритм расширения известных моделей, пригодных для уровневой материи, для материи трансфинитной. Средствами для выполнения такой задачи могут быть как математические возможности моделей, так и алгоритмы учета в моделях специфики конкретных изделий и их взаимодействий. При этом, принимая софистатность структур и активностей, следует связать структуру объектов с взаимодействием.

Начала новой математической операции

Формально охарактеризуем абстрактный физический объект двумя числами. Математически зададим его в форме столбца. Назовём такой объект диадой. При увеличении количества величин, характеризующих объект, получим триаду, тетраду. пентаду...

Если таких столбцов несколько, при их объединении в плоский математический объект получаем матрицу. Если объект характеризуется системой согласованных между собой плоских матриц, назовем эту систему матритом.

Поставим задачу:

- **предложить и проанализировать новые операции для матриц и, позднее, для матритов,**
- **применить полученную информацию к моделированию физической реальности в изученных условиях и при учете качественно новых обстоятельств,**
- **сравнить проведенный анализ и его следствия со стандартными подходами и результатами.**

Введём *алгоритм стандартного комбинаторного умножения:*

- первая компонента произведения пары объектов равна сумме произведений соответствующих компонент обоих объектов,
- следующие компоненты произведения пары объектов равны суммам произведений соответствующих компонент первого объекта на компоненты второго объекта, полученные после их циклического изменения.

Проиллюстрируем комбинаторное умножение на примере тройки диад:

$$A(1,2)=\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}, A(2,2)=\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}, A(3,2)=\begin{pmatrix}a_3\\ b_3\end{pmatrix}.$$

Построим новый вектор-столбец по паре исходных векторов-столбцов. Выполним циклическое комбинаторное умножение диад, принимая для произведения компонент и их сложения стандартные математические операции. Получим

$$(A(1,2)\overset{k}{\times}A(2,2))=\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c|c}a_1 & b_1\\ \hline a_2 & b_2\\ b_2 & a_2\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1b_2\\ a_1b_2+b_1a_2\end{pmatrix},$$

$$(A(1,2)\overset{k}{\times}A(2,2))\overset{k}{\times}A(3,2)=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1b_2\\ a_1b_2+b_1a_2\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}a_3\\ b_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c|c}a_1a_2+b_1b_2 & a_1b_2+b_1a_2\\ \hline a_3 & b_3\\ b_3 & a_3\end{array},$$

$$(A(1,2)\overset{k}{\times}A(2,2))\overset{k}{\times}A(3,2)=\begin{pmatrix}a_1a_2a_3+b_1b_2a_3+a_1b_2b_3+b_1a_2b_3\\ a_1a_2b_3+b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3\end{pmatrix}.$$

$$A(2,2)\overset{k}{\times}A(3,2))=\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}a_3\\ b_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c|c}a_2 & b_2\\ \hline a_3 & b_3\\ b_3 & a_3\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_2a_3+b_2b_3\\ a_2b_3+b_2a_3\end{pmatrix},$$

$$A(1,2)\overset{k}{\times}(A(2,2)\overset{k}{\times}A(3,2))=\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}a_2a_3+b_2b_3\\ a_2b_3+b_2a_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c|c}a_1 & b_1\\ \hline a_2a_3+b_2b_3 & a_2b_3+b_2a_3\\ a_2b_3+b_2a_3 & a_2a_3+b_2b_3\end{array},$$

$$A(1,2)\overset{k}{\times}(A(2,2)\overset{k}{\times}A(3,2))=\begin{pmatrix}a_1a_2a_3+a_1b_2b_3+a_2b_3b_1+b_2a_3b_1\\ a_2b_3a_1+b_2a_3a_1+a_2a_3b_1+b_2b_3b_1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим

$$A(2,2)\overset{k}{\times}A(1,2)=\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c|c}a_2 & b_2\\ \hline a_1 & b_1\\ b_1 & a_1\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_2a_1+b_2b_1\\ a_2b_1+b_2a_1\end{pmatrix},$$

$$A(1,2)\overset{k}{\times}A(2,2)=\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{c|c}a_1 & b_1\\ \hline a_2 & b_2\\ b_2 & a_2\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1b_2\\ a_1b_2+b_1a_2\end{pmatrix}.$$

Комбинаторная операция на диадах, построенная на основе циклической перестановки компонент второго вектора (*циклическая комбинаторная операция*), коммутативна:

$$A(1,2)\overset{k}{\times}A(2,2)=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1b_2\\ a_1b_2+b_1a_2\end{pmatrix}\neq A(2,2)\overset{k}{\times}A(1,2)=\begin{pmatrix}a_2a_1+b_2b_1\\ a_2b_1+b_2a_1\end{pmatrix}.$$

На диадах циклическая комбинаторная операция ассоциативна:

$$(A(1,2)\overset{k}{\times}A(2,2))\overset{k}{\times}A(3,2)=\begin{pmatrix}a_1a_2a_3+b_1b_2a_3+a_1b_2b_3+b_1a_2b_3\\ a_1a_2b_3+b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3\end{pmatrix}=$$

$$=A(1,2)\overset{k}{\times}(A(2,2)\overset{k}{\times}A(3,2))=\begin{pmatrix}a_1a_2a_3+a_1b_2b_3+a_2b_3b_1+b_2a_3b_1\\ a_2b_3a_1+b_2a_3a_1+a_2a_3b_1+b_2b_3b_1\end{pmatrix}$$

Изучим свойства циклического комбинаторного произведения для триад. Введём

$$A(1,3)=\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix}, A(2,3)=\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\end{pmatrix}, A(3,3)=\begin{pmatrix}a_3\\ b_3\\ c_3\end{pmatrix}.$$

Найдём

$$A(1,3)\overset{k}{\times}A(2,3)=\begin{array}{c|c|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ \hline a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{array}=\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 \\ a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2 \\ a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2 \end{pmatrix},$$

$$(A(1,3)\overset{k}{\times}A(2,3))\overset{k}{\times}A(3,3)=\begin{array}{c|c|c} a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2 & a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2 \\ \hline a_3 & b_3 & c_3 \\ c_3 & a_3 & b_3 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{array}=$$

$$=\begin{pmatrix} (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)a_3+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)b_3+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)c_3 \\ (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)c_3+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)a_3+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)b_3 \\ (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)b_3+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)c_3+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)a_3 \end{pmatrix}=(ab)c.$$

$$A(2,3)\overset{k}{\times}A(3,3)=\begin{array}{c|c|c} a_2 & b_2 & c_2 \\ \hline a_3 & b_3 & c_3 \\ c_3 & a_3 & b_3 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{array}=\begin{pmatrix} a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_2c_3+b_2a_3+c_2b_3 \\ a_2b_3+b_2c_3+c_2a_3 \end{pmatrix},$$

$$A(1,3)\overset{k}{\times}(A(2,3)\overset{k}{\times}A(3,3))=\begin{array}{c|c|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ \hline a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a_2c_3+b_2a_3+c_2b_3 & a_2b_3+b_2c_3+c_2a_3 \\ a_2b_3+b_2c_3+c_2a_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a_2c_3+b_2a_3+c_2b_3 \\ a_2c_3+b_2a_3+c_2b_3 & a_2b_3+b_2c_3+c_2a_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \end{array}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_1(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)+b_1(a_2c_3+b_2a_3+c_2b_3)+c_1(a_2b_3+b_2c_3+c_2a_3) \\ a_1(a_2b_3+b_2c_3+c_2a_3)+b_1(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)+c_1(a_2c_3+b_2a_3+c_2b_3) \\ a_1(a_2c_3+b_2a_3+c_2b_3)+b_1(a_2b_3+b_2c_3+c_2a_3)+c_1(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3) \end{pmatrix}=a(bc).$$

$$(A(3,3)\overset{k}{\times}A(2,3))\overset{k}{\times}A(1,3)=(cb)a=$$

$$\begin{pmatrix} (a_3a_2+b_3b_2+c_3c_2)a_1+(a_3c_2+b_3a_2+c_3b_2)b_1+(a_3b_2+b_3c_2+c_3a_2)c_1 \\ (a_3a_2+b_3b_2+c_3c_2)c_1+(a_3c_2+b_3a_2+c_3b_2)a_1+(a_3b_2+b_3c_2+c_3a_2)b_1 \\ (a_3a_2+b_3b_2+c_3c_2)b_1+(a_3c_2+b_3a_2+c_3b_2)c_1+(a_3b_2+b_3c_2+c_3a_2)a_1 \end{pmatrix}.$$

$$A(3,3)\overset{k}{\times}(A(2,3)\overset{k}{\times}A(1,3))=$$

$$=\begin{pmatrix} a_3(a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1)+b_3(a_2c_1+b_2a_1+c_2b_1)+c_3(a_2b_1+b_2c_1+c_2a_1) \\ a_3(a_2b_1+b_2c_1+c_2a_1)+b_3(a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1)+c_3(a_2c_1+b_2a_1+c_2b_1) \\ a_3(a_2c_1+b_2a_1+c_2b_1)+b_3(a_2b_1+b_2c_1+c_2a_1)+c_3(a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1) \end{pmatrix}=c(ba).$$

Вывод: Проверка показала, что $(ab)c-a(bc)+(cb)a-c(ba)\neq 0$. Следовательно, рассматриваемая **алгебра неэластична**.

Вывод: На разных триадах циклическая **комбинаторная операция неассоциативна**:

$$(A(1,3)\overset{k}{\times}A(2,3))\overset{k}{\times}A(3,3)\neq A(1,3)\overset{k}{\times}(A(2,3)\overset{k}{\times}A(3,3)).$$

$$\begin{pmatrix}(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)a_3+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)b_3+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)c_3\\(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)c_3+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)a_3+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)b_3\\(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)b_3+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)c_3+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)a_3\end{pmatrix}\neq$$

$$\neq\begin{pmatrix}a_1(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)+b_1(a_2c_3+b_2a_3+c_2b_3)+c_1(a_2b_3+b_2c_3+c_2a_3)\\a_1(a_2b_3+b_2c_3+c_2a_3)+b_1(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)+c_1(a_2c_3+b_2a_3+c_2b_3)\\a_1(a_2c_3+b_2a_3+c_2b_3)+b_1(a_2b_3+b_2c_3+c_2a_3)+c_1(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)\end{pmatrix}.$$

Вывод: На одинаковых триадах циклическая **комбинаторная операция ассоциативна**. В силу ассоциативности операция также альтернативна.

Обладает ли данное произведение свойством альтернативности на разных триадах? Рассмотрим данный вопрос, заменив индекс 3 на индекс 1.

$$A(1,3)=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},A(2,3)=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},A(3,3)=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}=A(2,3).$$

Найдём

$$A(1,3)\overset{k}{\times}A(2,3)=\begin{array}{c|c|c}a_1&b_1&c_1\\\hline a_2&b_2&c_2\\c_2&a_2&b_2\\b_2&c_2&a_2\end{array}=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\\a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2\\a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2\end{pmatrix},$$

$$(A(1,3)\overset{k}{\times}A(2,3))\overset{k}{\times}A(2,3)=\begin{array}{c|c|c}a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2&a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2&a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2\\\hline a_2&b_2&c_2\\c_2&a_2&b_2\\b_2&c_2&a_2\end{array}=$$

$$=\begin{pmatrix}(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)a_2+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)b_2+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)c_2\\(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)c_2+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)a_2+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)b_2\\(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)b_2+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)c_2+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)a_2\end{pmatrix}.$$

$$A(2,3)\overset{k}{\times}A(2,3)=\begin{array}{c|c|c}a_2&b_2&c_2\\\hline a_2&b_2&c_2\\c_2&a_2&b_2\\b_2&c_2&a_2\end{array}=\begin{pmatrix}a_2a_2+b_2b_2+c_2c_2\\a_2c_2+b_2a_2+c_2b_2\\a_2b_2+b_2c_2+c_2a_2\end{pmatrix},$$

$$A(1,3)\overset{k}{\times}(A(2,3)\overset{k}{\times}A(2,3))=\begin{array}{c|c|c}a_1&b_1&c_1\\\hline a_2a_2+b_2b_2+c_2c_2&a_2c_2+b_2a_2+c_2b_2&a_2b_2+b_2c_2+c_2a_2\\a_2b_2+b_2c_2+c_2a_2&a_2a_2+b_2b_2+c_2c_2&a_2c_2+b_2a_2+c_2b_2\\a_2c_2+b_2a_2+c_2b_2&a_2b_2+b_2c_2+c_2a_2&a_2a_2+b_2b_2+c_2c_2\end{array}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_1(a_2a_2+b_2b_2+c_2c_2)+b_1(a_2c_2+b_2a_2+c_2b_2)+c_1(a_2b_2+b_2c_2+c_2a_2) \\ a_1(a_2b_2+b_2c_2+c_2a_2)+b_1(a_2a_2+b_2b_2+c_2c_2)+c_1(a_2c_2+b_2a_2+c_2b_2) \\ a_1(a_2c_2+b_2a_2+c_2b_2)+b_1(a_2b_2+b_2c_2+c_2a_2)+c_1(a_2a_2+b_2b_2+c_2c_2) \end{pmatrix}.$$

На разных триадах циклическая комбинаторная **операция неальтернативна:** $(ab)b \neq a(bb)$. Действительно

$$\begin{pmatrix} (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)a_2+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)b_2+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)c_2 \\ (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)c_2+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)a_2+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)b_2 \\ (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)b_2+(a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2)c_2+(a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2)a_2 \end{pmatrix} \neq$$

$$\neq \begin{pmatrix} a_1(a_2a_2+b_2b_2+c_2c_2)+b_1(a_2c_2+b_2a_2+c_2b_2)+c_1(a_2b_2+b_2c_2+c_2a_2) \\ a_1(a_2b_2+b_2c_2+c_2a_2)+b_1(a_2a_2+b_2b_2+c_2c_2)+c_1(a_2c_2+b_2a_2+c_2b_2) \\ a_1(a_2c_2+b_2a_2+c_2b_2)+b_1(a_2b_2+b_2c_2+c_2a_2)+c_1(a_2a_2+b_2b_2+c_2c_2) \end{pmatrix}.$$

На *разных* триадах циклическая комбинаторная операция **некоммутативна**:

$$A(1,3)\overset{k}{\times}A(2,3) \neq A(2,3)\overset{k}{\times}A(1,3),$$

$$A(1,3)\overset{k}{\times}A(2,3) = \begin{array}{c:c:c} a_1 & b_1 & c_1 \\ \hline a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{array} = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 \\ a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2 \\ a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2 \end{pmatrix},$$

,

$$A(2,3)\overset{k}{\times}A(1,3) = \begin{array}{c:c:c} a_2 & b_2 & c_2 \\ \hline a_1 & b_1 & c_1 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{array} = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 \\ a_2c_1+b_2a_1+c_2b_1 \\ a_2b_1+b_2c_1+c_2a_1 \end{pmatrix}.$$

На *одинаковых* триадах циклическая комбинаторная операция **коммутативна**.

Докажем неассоциативность комбинаторного произведения для матриц размерности 2×2:

$$\left(a\overset{k}{\times}b\right)\overset{k}{\times}c = \begin{pmatrix} c_{11}(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})+c_{21}(a_{11}b_{21}+a_{12}b_{11}) & c_{21}(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})+c_{11}(a_{11}b_{21}+a_{12}b_{11}) \\ c_{12}(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})+c_{22}(a_{21}b_{22}+a_{22}b_{12}) & c_{22}(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})+c_{12}(a_{21}b_{22}+a_{22}b_{12}) \end{pmatrix},$$

$$a\overset{k}{\times}\left(b\overset{k}{\times}c\right) = \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{12}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) & a_{21}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{11}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{21}+b_{12}c_{11})+a_{22}(b_{21}c_{22}+b_{22}c_{12}) & a_{22}(b_{11}c_{21}+b_{12}c_{11})+a_{21}(b_{21}c_{22}+b_{22}c_{12}) \end{pmatrix}.$$

Кроме этого, комбинаторное произведение некоммутативно.

Рассмотрим математическое обоснование комбинаторной операции для матриц. Обратимся к варианту матриц размерности 2×2. Выберем заполнение матриц нулями и единицей. Получим совокупность вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Эти элементы образуют *пару алгебр* вида

$$T_\alpha T_\beta + T_\beta T_\alpha = q^\gamma_{\alpha\beta} T_\gamma,$$
$$T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha = g^\gamma_{\alpha\beta} T_\gamma.$$

Обозначим матрицы, содержащие один значимый элемент:

$$\alpha(1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \alpha(2) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \alpha(3) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \alpha(4) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Упростим запись, заменяя $\alpha(i) \to i$. Получим таблицу матричного умножения реперов:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4\\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 3 & 4\end{array}\right).$$

Если мы представим матрицы через её реперы, то произведение матриц получается при умножении векторов данного пространства с учётом правила перемножения реперов:

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix} = \left(a_i \alpha^i\right) \cdot \left(b_i \alpha^i\right).$$

Посмотрим на таблицу произведений с другой точки зрения. Сдвинем элементы во второй и четвёртой строках на две единицы. Получим матрицы размерности 2×2, выраженные через канонические правые идеалы (построенные на единицах), вида

$$\begin{pmatrix}a & b\\ a & b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Представление структуры электрических предзарядов в форме «ежей» имеет форму правых идеалов. В данном случае ориентированные струны замкнуты на выбранном объекте, а другие струны направлены на него. В случае левого идеала ориентированные струны замкнуты на выделенном объекте, а другие струны направлены от объекта.

К аналогичному выводу мы приходим при анализе матричного произведения матриц размерности 3×3. Получим таблицу произведений вида

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccc} & 11 & 12 & 12 & 21 & 22 & 23 & 31 & 32 & 33\\ \hline 11 & 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 12 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 & 13 & 0 & 0 & 0\\ 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 & 13\\ 21 & 21 & 22 & 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 22 & 0 & 0 & 0 & 21 & 22 & 23 & 0 & 0 & 0\\ 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 22 & 23\\ 31 & 31 & 32 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 32 & 0 & 0 & 0 & 31 & 32 & 33 & 0 & 0 & 0\\ 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 32 & 33\end{array}\right).$$

При сдвиге значимых элементов по строкам получим систему правых идеалов в качестве базисных элементов для разложения совокупности произведений.

Матричная алгебра некоммутативна, **она ассоциативна и поэтому альтернативна и эластична.**

Поскольку полную систему образует указанная пара «ежей», следует рассмотреть представление базисного произведения в виде **совокупности левых идеалов**. Рассмотрим такой вариант, формально используя таблицу произведений вида

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cccc} & 11 & 12 & 21 & 22 \\ \hline 11 & 11 & 11 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 12 & 12 \\ 21 & 21 & 21 & 0 & 0 \\ 22 & 0 & 0 & 22 & 22 \end{array}\right).$$

Получим правило произведения: элементы первого столбца умножаются на сумму элементов первой строки, элементы второго столбца умножаются на сумму элементов второй строки. Тогда

$$(a_1 1 + a_2 2 + a_3 3 + a_4 4)(b_1 1 + b_2 2 + b_3 3 + b_4 4) =$$
$$= a_1(b_1 + b_2)1 + a_2(b_3 + b_4)2 + a_3(b_1 + b_2)3 + a_4(b_3 + b_4)4.$$

$$A \vec{\times} B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \vec{\times} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(b_1+b_2) & a_2(b_3+b_4) \\ a_3(b_1+b_2) & a_4(b_3+b_4) \end{pmatrix}.$$

Изучим свойства данной алгебры. Алгебра *некоммутативна*, так как $A \vec{\times} B \neq B \vec{\times} A.$

$$B \vec{\times} A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \vec{\times} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(a_1+a_2) & b_2(a_3+a_4) \\ b_3(a_1+a_2) & b_4(a_3+a_4) \end{pmatrix}.$$

Алгебра *неассоциативна*, так как $\left(A \vec{\times} B\right) \vec{\times} C \neq A(B \vec{\times} C)$. Действительно,

$$\left(A \vec{\times} B\right) \vec{\times} C = \begin{pmatrix} a_1(b_1+b_2) & a_2(b_3+b_4) \\ a_3(b_1+b_2) & a_4(b_3+b_4) \end{pmatrix} \vec{\times} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_1(b_1+b_2)(c_1+c_2) & a_2(b_3+b_4)(c_3+c_4) \\ a_3(b_1+b_2)(c_1+c_2) & a_4(b_3+b_4)(c_3+c_4) \end{pmatrix},$$

$$A \vec{\times} (B \vec{\times} C) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(c_1+c_2) & b_2(c_3+c_4) \\ b_3(c_1+c_2) & b_4(c_3+c_4) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_1\big(b_1(c_1+c_2) + b_2(c_3+c_4)\big) & a_2\big(b_3(c_1+c_2) + b_4(c_3+c_4)\big) \\ a_3\big(b_1(c_1+c_2) + b_2(c_3+c_4)\big) & a_4\big(b_3(c_1+c_2) + b_4(c_3+c_4)\big) \end{pmatrix}.$$

Алгебра *неальтернативна*, так как $\left(A \vec{\times} B\right) \vec{\times} B \neq A(B \vec{\times} B)$. Действительно,

$$\left(A \vec{\times} B\right) \vec{\times} B = \begin{pmatrix} a_1(b_1+b_2) & a_2(b_3+b_4) \\ a_3(b_1+b_2) & a_4(b_3+b_4) \end{pmatrix} \vec{\times} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_1(b_1+b_2)(b_1+b_2) & a_2(b_3+b_4)(b_3+b_4) \\ a_3(b_1+b_2)(b_1+b_2) & a_4(b_3+b_4)(b_3+b_4) \end{pmatrix},$$

$$A(B\overset{\to}{\times}B)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1(b_1+b_2) & b_2(b_3+b_4)\\ b_3(b_1+b_2) & b_4(b_3+b_4)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_1\big(b_1(b_1+b_2)+b_2(b_3+b_4)\big) & a_2\big(b_3(b_1+b_2)+b_4(b_3+b_4)\big)\\ a_3\big(b_1(b_1+b_2)+b_2(b_3+b_4)\big) & a_4\big(b_3(b_1+b_2)+b_4(b_3+b_4)\big)\end{pmatrix}..$$

Алгебра *неэластична*: $\left(A\overset{\to}{\times}B\right)\overset{\to}{\times}C-A\overset{\to}{\times}(B\overset{\to}{\times}C)+\left(C\overset{\to}{\times}B\right)\overset{\to}{\times}A-C\overset{\to}{\times}(B\overset{\to}{\times}A)\neq 0.$ Действительно,

$$\left(A\overset{\to}{\times}B\right)\overset{\to}{\times}C=\begin{pmatrix}a_1(b_1+b_2) & a_2(b_3+b_4)\\ a_3(b_1+b_2) & a_4(b_3+b_4)\end{pmatrix}\overset{\to}{\times}\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_1(b_1+b_2)(c_1+c_2) & a_2(b_3+b_4)(c_3+c_4)\\ a_3(b_1+b_2)(c_1+c_2) & a_4(b_3+b_4)(c_3+c_4)\end{pmatrix},$$

$$A\overset{\to}{\times}(B\overset{\to}{\times}C)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1(c_1+c_2) & b_2(c_3+c_4)\\ b_3(c_1+c_2) & b_4(c_3+c_4)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_1\big(b_1(c_1+c_2)+b_2(c_3+c_4)\big) & a_2\big(b_3(c_1+c_2)+b_4(c_3+c_4)\big)\\ a_3\big(b_1(c_1+c_2)+b_2(c_3+c_4)\big) & a_4\big(b_3(c_1+c_2)+b_4(c_3+c_4)\big)\end{pmatrix}.$$

$$\left(C\overset{\to}{\times}B\right)\overset{\to}{\times}A=\begin{pmatrix}c_1(b_1+b_2) & c_2(b_3+b_4)\\ c_3(b_1+b_2) & c_4(b_3+b_4)\end{pmatrix}\overset{\to}{\times}\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}c_1(b_1+b_2)(a_1+a_2) & c_2(b_3+b_4)(a_3+a_4)\\ c_3(b_1+b_2)(a_1+a_2) & c_4(b_3+b_4)(a_3+a_4)\end{pmatrix},$$

$$C\overset{\to}{\times}(B\overset{\to}{\times}A)=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1(a_1+a_2) & b_2(a_3+a_4)\\ b_3(a_1+a_2) & b_4(a_3+a_4)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}c_1\big(b_1(a_1+a_2)+b_2(a_3+a_4)\big) & c_2\big(b_3(a_1+a_2)+b_4(a_3+a_4)\big)\\ c_3\big(b_1(a_1+a_2)+b_2(a_3+a_4)\big) & c_4\big(b_3(a_1+a_2)+b_4(a_3+a_4)\big)\end{pmatrix}.$$

При рассмотрении матриц более высокой размерности **правило распределения произведений** можно **«строить» по аналогии** с поведением таблицы матричных произведений. Рассмотрим матрицы размерности 3×3. Получим таблицу произведения реперов

	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	11	11	11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	12	12	12	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	13	13	13
21	21	21	21	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	22	22	22	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	23	23	23
31	31	31	31	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	32	32	32	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	33	33	33

.

Поскольку математические произведения такого вида нам не встречались на практике, мы получаем дополнительный аргумент в пользу математического обоснования факта, почему электрические предзаряды одного типа «встречаются» чаще, чем электрические предзаряды другого типа.

Конечно, может быть так, что для материи с характерными размерами предзарядов обе указанные операции встречаются в других пропорциях.

Выполним циклическое комбинаторное произведение реперов. Получим таблицу комбинаторного циклического произведения реперов:

$$\begin{pmatrix} \overset{k}{\times} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{k}{\times} & 11 & 12 & 21 & 22 \\ \hline 11 & 11 & 0 & 12 & 0 \\ 12 & 12 & 0 & 11 & 0 \\ 21 & 0 & 21 & 0 & 22 \\ 22 & 0 & 22 & 0 & 21 \end{pmatrix}.$$

Используя таблицу, легко проверить, что произведение матриц размерности 2×2 можно записать в виде формулы

$$\begin{pmatrix} 1\textit{строка} \times 1\textit{столбец} & 1\textit{строка} \times 1^t\,\textit{столбец} \\ \hline 2\textit{строка} \times 2\textit{столбец} & 2\textit{строка} \times 2^t\,\textit{столбец} \end{pmatrix}.$$

Индекс t над числом означает, что в столбце сделана перестановка. Для матриц размерности 2×2 перестановка только одна. Если размерность матриц больше, то и элементов будет больше. Мы их получаем посредством циклической перестановки.

Таблица допускает неаналитическое выражение вида

$$i_{kl}i_{mn} = \delta_{kn}i_{LM},\, L = \begin{cases} l-1, k-l = -1,-2,... \\ l, k = l \\ l+1, k-l = 1,2,... \end{cases},\, M = \begin{cases} m-1, l = m, \\ m, l-m = -1,-2,... \\ m+1, l-m = 1,2,... \end{cases}$$

Эти выражения различны для матриц разной размерности. Дельта функция обращается в ноль при несовпадающих внешних индексах.

Для матричного произведения формула проста

$$i_{kl}i_{mn} = \delta_{lm}i_{kn}.$$

Эти выражения одинаковы для матриц разной размерности. Дельта функция обращается в ноль при несовпадающих внутренних индексах. На данном этапе видна некоторая дополнительность пары введенных произведений. Рассмотрим композиционное произведение с 1-сдвигом вправо. Получим таблицу

$$\begin{pmatrix} & 11 & 12 & 21 & 22 \\ \hline 11 & 0 & 11 & 0 & 12 \\ 12 & 0 & 12 & 0 & 11 \\ 21 & 22 & 0 & 21 & 0 \\ 22 & 21 & 0 & 22 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц будет задано формулой:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \overset{1sk}{\times} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{22} + a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} + a_{22}b_{11} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1s \times 2v & 1s \times 2^t v \\ 2s \times 1^t v & 2s \times 1v \end{pmatrix}.$$

Следуя по указанному алгоритму, можно получить совокупность комбинаторных операций, как с разными сдвигами, так и с разным алгоритмом распределения реперов.

Рассмотрим новый вариант комбинаторного произведения матриц на примере матриц размерности 2×2. Пусть первая строка первой матрицы комбинаторно умножается на первый столбец второй матрицы при его расположении на первой строке в комбинаторной матрице. Пусть вторая строка первой матрицы комбинаторно умножается на второй столбец второй матрицы при его расположении на второй строке в комбинаторной матрице.

Тогда

$$\left(A_1 \underset{lcp}{\overset{k}{\times}} A_2 \right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \underset{lcp}{\overset{k}{\times}} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \frac{a_1 \quad b_1}{\begin{matrix} a_2 & c_2 \\ c_2 & a_2 \end{matrix}} + \frac{c_1 \quad d_1}{\begin{matrix} d_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{matrix}} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 c_2 + b_1 a_2 \\ c_1 d_2 + d_1 b_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix},$$

$$\left(A_1 \underset{lcp}{\overset{k}{\times}} A_2 \right) \underset{lcp}{\overset{k}{\times}} A_3 = \begin{pmatrix} (a_1 a_2 + b_1 c_2) a_3 + (a_1 c_2 + b_1 a_2) c_3 & (a_1 a_2 + b_1 c_2) c_3 + (a_1 c_2 + b_1 a_2) a_3 \\ (c_1 d_2 + d_1 b_2) d_3 + (c_1 b_2 + d_1 d_2) b_3 & (c_1 d_2 + d_1 b_2) b_3 + (c_1 b_2 + d_1 d_2) d_3 \end{pmatrix}.$$

Действуя аналогично, получим

$$\left(A_2 \underset{lcp}{\overset{k}{\times}} A_3 \right) = \begin{pmatrix} a_2 a_3 + b_2 c_3 & a_2 c_3 + b_2 a_3 \\ c_2 d_3 + d_2 b_3 & c_2 b_3 + d_2 d_3 \end{pmatrix},$$

$$A_1 \underset{lcp}{\overset{k}{\times}} \left(A_2 \underset{lcp}{\overset{k}{\times}} A_3 \right) = \begin{pmatrix} a_1 (a_2 a_3 + b_2 c_3) + b_1 (c_2 d_3 + d_2 b_3) & a_1 (c_2 d_3 + d_2 b_3) + b_1 (a_2 a_3 + b_2 c_3) \\ c_1 (c_2 b_3 + d_2 d_3) + d_1 (a_2 c_3 + b_2 a_3) & c_1 (a_2 c_3 + b_2 a_3) + d_1 (c_2 b_3 + d_2 d_3) \end{pmatrix}.$$

Произведение неассоциативно как на разных, так и на одинаковых матрицах.

Заметим, что разделение матриц на части не меняет результата произведения. Другими словами, комбинаторное произведение не «вступает в противоречие» с привычным правилом разделения объекта на части. С математической точки зрения этот результат кажется естественным. С физической точки зрения он не очень хорош, потому что разделение на части делает объект другим, нарушает его функциональность. По этой причине возможно нахождение таких комбинаторных операций, которые дают разные результаты при «взаимодействии» составных объектов и объектов, взаимодействующих частями. Мы приходим **к пониманию необходимости новых аддитивных операций**. Этот вариант соответствует идеологии более глубокого учета свойств трансфинитной реальности.

С физической точки зрения требуется расширить не только алгоритмы произведения, но также алгоритмы и концепцию сложения. Простая аддитивность в форме представления составного объекта в виде суммы частей должна быть заменена на функциональную аддитивность, когда разложение сопровождается функциональным изменением слагаемых.

Задача состоит в том, чтобы выяснить, при каких условиях и каким образом операции произведения «нарушают» операцию сложения? Что это даёт для моделирования и для практики?

Исследуемые множества величин, выражаемых матрицами или спинорами, допускают систему произведений, среди которых есть как неассоциативные, так и ассоциативные возможности.

Наличие системы произведений для матриц естественно порождает проблему сравнения результатов, получаемых при разных произведениях.

Для примера сравним комбинаторное и матричное произведение треугольных матриц. Получим

$$A_1 \overset{k}{\underset{lcp}{\times}} A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lcp}{\times}} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & b_1a_2 \\ d_1b_2 & d_1d_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 \times A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & b_1d_2 + a_1b_2 \\ 0 & d_1d_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 \overset{k}{\underset{lcp}{\times}} A_2 = A_1 \times A_2 + \begin{pmatrix} 0 & b_1a_2 - (b_1d_2 + a_1b_2) \\ d_1b_2 & 0 \end{pmatrix} = A_1 \times A_2 + \sum_k F^k(A_1, A_2).$$

В рассматриваемом случае комбинаторное и матричное произведение полученной разницы дает одинаковый результат:

$$\sum_k F^k(A_1, A_2) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = \delta, \alpha = \delta \overset{k}{\underset{lcp}{\times}} \delta = \beta = \delta \times \delta, \alpha - \beta = 0.$$

Возможно, для разных типов матриц есть «свои» функциональные условия, посредством которых описываются различия меду комбинаторным и матричным произведениями.

Если мы представим матрицы через базисные реперы, то комбинаторное произведение матриц получается при комбинаторном умножении векторов данного пространства с учётом комбинаторного правила перемножения реперов:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = (a_i\alpha^i) \overset{k}{\times} (b_i\alpha^i).$$

В других обозначениях получим

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1c_2 + b_1a_2 \\ c_1b_2 + d_1d_2 & c_1d_2 + d_1b_2 \end{pmatrix}$$

Посмотрим на таблицу произведений с алгебраической точки зрения. Сдвинем элементы во второй и четвёртой строках на две единицы. Получим матрицы размерности 2×2, выраженные через канонические правые идеалы (построенные на единицах), вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти выражения типичны в модели математического описания гравитационных предзарядов, когда изделия представляются в форме независимых или замкнутых в «кольцо» объектов. Пара предзарядов отличается только ориентацией поперечных соединений к центру изделия или от него.

Рассмотрим таблицу комбинаторных произведений для базовых элементов матричной алгебры, используя матрицы размерности 3×3 с одним значимым элементом. Охарактеризуем элементы их индексами по строке и по столбцу. Получим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 & 31 & 32 & 33 \\ \hline
11 & 11 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\
12 & 12 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\
13 & 13 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\
21 & 0 & 21 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 & 22 & 0 \\
22 & 0 & 22 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 & 23 & 0 \\
23 & 0 & 23 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 21 & 0 \\
31 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 33 & 0 & 0 & 32 \\
32 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 33 \\
33 & 0 & 0 & 33 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 31
\end{array}\right).$$

Объединим полученные выражений, сдвинув данные произведения по таблице с удалением нулей. Получим для каждой тройки строк единый функциональный вид:

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, *с таблицей композиционных произведений ассоциирована группа, использующая матричное произведение.*

Эти выражения типичны в модели математического описания гравитационных предзарядов, когда эти физические изделия представляются в форме независимых или замкнутых в «кольцо» базовых струн. Пара предзарядов отличается только ориентацией поперечных соединений к центру изделия или от него.

Новой математической операции на описание подобной ситуации не требуется.

Заметим, что комбинаторная операция вводит разные объекты при произведении «структурно схожих» матриц разной размерности. Действительно, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ldots$$

По этой причине нужно быть осторожным при распространении выводов, полученных в физических моделях одной размерности на многообразия другой размерности. *Согласно комбинаторной операции, структурно похожие объекты способны вести себя по-разному в многообразиях с другой размерностью*. Это обстоятельство в физике было известно давно. Однако оно не имело конструктивного математического выражения.

Нормы с сопряжением и функциональные нормы

Концепция нормы используется в алгебре с делением, чтобы на этой основе находить обратные элементы алгебры.

Для этого используется операция сопряжения или другие приемы математического моделирования. Сопряжение для кватернионов согласовано с операциями в алгебре кватернионов. Рассмотрим эти вопросы.

Кватернион задается формулой

$$a = a_0 1 + a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3,$$

$$1 q_k = q_k 1, q_j q_k = -\delta_{jk} 1 + \varepsilon_{jkn} q_n.$$

Здесь $\delta_{jk}, \varepsilon_{jkn}$ – символы Кронекера и Леви-Чивита соответственно.

Сопряженным кватернионом называют

$$\bar{a} = a_0 1 - a_1 q_1 - a_2 q_2 - a_3 q_3.$$

Нормой $N(a)$называют произведение кватерниона с сопряженным ему. С учетом правила произведения реперов получим

$$N(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Сопряженный кватернион можно также вычислить по формуле

$$\bar{a} = -0{,}5(a + q_1 a q_1 + q_2 a q_2 + q_3 a q_3).$$

В этом случае принято сопряженный элемент называть согласованным с алгеброй. Проверить данную формулу можно, используя таблицу произведений для реперов вида

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & q_1 & q_2 & q_3 \\ \hline -1 & -1 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_1 & -1 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_2 & -q_3 & -1 & q_1 \\ q_3 & q_3 & q_2 & -q_1 & -1 \end{array}\right).$$

В таком виде таблица произведений задает самостоятельный кватернион вида

$$-1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + q_1\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + q_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + q_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q.$$

Получим выражение для функциональной нормы FN, рассмотрев произведение кватерниона самого на себя (согласованно со своей алгеброй), представив результат в форме квадратной матрицы, которую назовем функциональным представлением квадрата элемента алгебры $FQ(a^2)$. Сокращенно удобно называть это выражение функциональным квадратом алгебры. Получим

$$FQ(a^2) = \begin{pmatrix} a_0^2 & a_0 a_1 q_1 & a_0 a_2 q_2 & a_0 a_3 q_3 \\ a_1 a_0 q_1 & -a_1^2 & a_1 a_2 q_1 q_2 & a_1 a_3 q_1 q_3 \\ a_2 a_0 q_2 & a_2 a_1 q_2 q_1 & -a_2^2 & a_2 a_3 q_2 q_3 \\ a_3 a_0 q_3 & a_3 a_1 q_1 & a_3 a_2 q_3 q_2 & -a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Зададим функциональную норму в алгебре выражением вида

$$FN(a) = 2a_0 1 a_0 1 - SP(FQ(a)).$$

Определение 1. *Норма элемента алгебры равна удвоенному квадрату первичного элемента минус значение шпура от его функционального квадрата.*

В рассматриваемом случае кватерниона она совпадет с его стандартным определением

$$N(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = FN(a).$$

В рассматриваемом случае кватернион представлен в виде вектора, не имеющего матричного представления.

В случае матричного представления элемента алгебры можно поступить иначе: определить норму разность между удвоенным элементом, стоящим на первом месте по главной диагонали минус шпур всей матрицы.

На примере матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

получим формулу вида

$$FN(A) = a + d.$$

Пусть

$$A\overset{\rightarrow}{\times}A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\overset{\rightarrow}{\times}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1(a_1+a_2) & a_2(a_3+a_4) \\ a_3(a_1+a_2) & a_4(a_3+a_4) \end{pmatrix},$$
$$FN(A)=a_1(a_1+a_2)+a_4(a_3+a_4).$$
$$B\overset{\rightarrow}{\times}B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\overset{\rightarrow}{\times}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1(b_1+b_2) & b_2(b_3+b_4) \\ b_3(b_1+b_2) & b_4(b_3+b_4) \end{pmatrix},$$
$$FN(B)=b_1(b_1+b_2)+b_4(b_3+b_4).$$

$$\left(B\overset{\rightarrow}{\times}A\right)\overset{\rightarrow}{\times}\left(B\overset{\rightarrow}{\times}A\right)=\begin{pmatrix} b_1(a_1+a_2) & b_2(a_3+a_4) \\ b_3(a_1+a_2) & b_4(a_3+a_4) \end{pmatrix}\overset{\rightarrow}{\times}\begin{pmatrix} b_1(a_1+a_2) & b_2(a_3+a_4) \\ b_3(a_1+a_2) & b_4(a_3+a_4) \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} b_1(a_1+a_2)\big(b_1(a_1+a_2)+b_2(a_3+a_4)\big) & b_2(a_3+a_4)\big(b_3(a_1+a_2)+b_4(a_3+a_4)\big) \\ b_3(a_1+a_2)\big(b_1(a_1+a_2)+b_2(a_3+a_4)\big) & b_4(a_3+a_4)\big(b_3(a_1+a_2)+b_4(a_3+a_4)\big) \end{pmatrix},$$
$$FN(BA)=b_1(a_1+a_2)\big(b_1(a_1+a_2)+b_2(a_3+a_4)\big)+b_4(a_3+a_4)\big(b_3(a_1+a_2)+b_4(a_3+a_4)\big).$$

Согласно полученным выражениям, в данной алгебре функциональная норма от произведения элементов алгебры не равна произведению от функциональных норм обоих элементов: $FN(BA)\neq FN(B)FN(A)$.

Функциональная норма позволяет по данному элементу находить обратный элемент. В силу этого обстоятельства мы получаем возможность рассматривать новые классы **алгебр с делением.**

Некоторые возможности комбинаторного произведения

Произведение матриц, с точки зрения комбинаторного произведения, можно определить разными способами.

Вариант 1. Комбинаторно умножим слева построчно первую матрицу на неизменную вторую, формируя столбцы матрицы произведения, которые можно рассматривать как элементы, суммируемые комбинаторно, на основе алгоритма их расстановки в итоговой матрице. Расположение друг за другом соответствует *тривиальной расстановке*. Пусть

$$A\overset{k}{\times}B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{array}{c:c} a_1 & a_2 \\ \hline c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{array}\overset{k}{+}\begin{array}{c:c} b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{array}=\begin{pmatrix} a_1c_1+a_2c_2 & a_1d_1+a_2d_2 \\ b_1c_1+b_2c_2 & b_1d_1+b_2d_2 \end{pmatrix},$$

Вариант 2. Комбинаторно умножим слева построчно первую матрицу на транспонированную вторую, формируя столбцы матрицы произведения. Будем рассматривать их как элементы, суммируемые комбинаторно, на основе их последовательной расстановки в итоговой матрице.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{array}{c:c} a_1 & a_2 \\ \hline c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{array}\overset{k}{+}\begin{array}{c:c} b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{array}=\begin{pmatrix} a_1c_1+a_2d_1 & b_1c_1+b_2d_1 \\ a_1c_2+a_2d_2 & b_1c_2+b_2d_2 \end{pmatrix}..$$

Оба указанных варианта обеспечивают некоммутативность и неассоциативность произведения. Покажем это на примере варианта 1. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix},$$

$$A\overset{k}{\times}B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{array}{c:c} a_1 & a_2 \\ \hline c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{array}\overset{k}{+}\begin{array}{c:c} b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{array}=\begin{pmatrix} a_1c_1+a_2c_2 & a_1d_1+a_2d_2 \\ b_1c_1+b_2c_2 & b_1d_1+b_2d_2 \end{pmatrix}\neq B\overset{k}{\times}A.$$

Тогда

$$B\overset{k}{\times}C=\begin{array}{c:c} c_1 & c_2 \\ \hline e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{array}\overset{k}{+}\begin{array}{c:c} d_1 & d_2 \\ \hline e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{array}=\begin{pmatrix} c_1e_1+c_2e_2 & d_1e_1+d_2e_2 \\ c_1f_1+c_2f_2 & d_1f_1+d_2f_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix},$$

$$\left(A\overset{k}{\times}B\right)\overset{k}{\times}C=\begin{array}{c:c} (a_1c_1+a_2c_2) & (a_1d_1+a_2d_2) \\ \hline e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{array}\overset{k}{+}\begin{array}{c:c} (b_1c_1+b_2c_2) & (b_1d_1+b_2d_2) \\ \hline e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{array},$$

$$A\overset{k}{\times}\left(B\overset{k}{\times}C\right)=\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ \hline \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{array}\overset{k}{+}\begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ \hline \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{array},$$

$$A\overset{k}{\times}\left(B\overset{k}{\times}C\right)=\begin{pmatrix} a_1(c_1e_1+c_2e_2)+a_2(d_1e_1+d_2e_2) & b_1(c_1e_1+c_2e_2)+b_2(d_1e_1+d_2e_2) \\ a_1(c_1f_1+c_2f_2)+a_2(d_1f_1+d_2f_2) & b_1(c_1f_1+c_2f_2)+b_2(d_1f_1+d_2f_2) \end{pmatrix},$$

$$\left(A\overset{k}{\times}B\right)\overset{k}{\times}C=\begin{pmatrix} e_1(a_1c_1+a_2c_2)+e_2(a_1d_1+a_2d_2) & e_1(b_1c_1+b_2c_2)+e_2(b_1d_1+b_2d_2) \\ f_1(a_1c_1+a_2c_2)+f_2(a_1d_1+a_2d_2) & f_1(b_1c_1+b_2c_2)+f_2(b_1d_1+b_2d_2) \end{pmatrix}$$

Действительно, например

$$a_1(c_1e_1+c_2e_2)+a_2(d_1e_1+d_2e_2)\neq e_1(a_1c_1+a_2c_2)+e_2(a_1d_1+a_2d_2).$$

Ситуация выглядит так: циклическая комбинаторная операции для чисел и для диад всегда коммутативна и ассоциативна, циклическая комбинаторная операция для триад может быть как коммутативной, так и некоммутативной, она может быть как ассоциативна, так и неассоциативна.

Матричное произведение можно рассматривать как вариант комбинаторного произведения строк первой матрицы на элементы транспонированной второй матрицы. Этот вариант назовем комбинаторной операцией с транспонированием. Получим, например,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1c_1+a_2d_1 & a_1c_2+a_2d_2 \\ b_1c_1+b_2d_1 & b_1c_2+b_2d_2 \end{pmatrix}=\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ \hline c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{array}+\begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{array}.$$

Тензорное произведение можно рассматривать как вариант расширенного комбинаторного произведения, отличающийся тем, что значимые элементы заменяются матрицами с учетом значения значимого элемента. Нулевые элементы получают размерность, ассоциированную с размерностью значимых элементов после обобщенного комбинаторного произведения. Получим, например,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} & a_2\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \\ b_1\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} & b_2\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{a_1 \quad a_2}{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}} + \frac{b_1 \quad b_2}{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}}.$$

Обозначение в форме скобки означает, что элементы в верхней строке умножаются на матрицу в целом, а не на элементы строки.

Замечание. Операция на множестве «векторов» зависит от размерности «векторов». При размерности один и два циклическая комбинаторная операция коммутативна и ассоциативна. При размерности больше двух циклическая комбинаторная операция некоммутативна и неассоциативна.

Замечание. Неассоциативность, следуя принятому подходу, базируется на комбинаторике. Комбинаторике, с физической точки зрения, соответствует учет полной совокупности отношений между изделиями. Этот подход согласуется с принципом максимальных возможностей, принятым в модели трансфинитной реальности. Стандартное матричное произведение соответствует одному варианту из всей совокупности возможных отношений. Тот аргумент, что матричное произведение обосновано решением системы линейных уравнений, не является доказательством единственности этого произведения, как и аргументом в пользу его достаточности.

Замечание. Принимая другие варианты произведений, мы фактически переходим к физике нового типа, когда *изделия не укладываются в рамки системы линейных уравнений*. А для нелинейных уравнений матричная физика неконструктивна. Однако кажется очевидным, что нелинейные системы уравнений подчинены комбинаторным произведениям. Если это будет доказано, тогда возможной становится **классификация нелинейных уравнений по типу комбинаторной операции**, на основе которой можно находить её решения. Более того, комбинаторные операции становятся средством для получения новых систем нелинейных уравнений.

Заметим, что комбинаторное произведение является, *с точки зрения произведения векторов, «избыточным»*. Эта избыточность не даёт некоммутативности и неассоциативности для «малых» объектов, однако она проявляет себя некоммутативно и неассоциативно на «больших» объектах. Избыточность в данном случае сводится к усилению учета комбинаторики элементов. Комбинаторику можно рассматривать как внутреннее, скрытое свойство объектов, представленных в спинорном виде. Для первого объекта второй объект показывает себя в разных состояниях. Другими словами, речь идет об *учёте отношений одного объекта с классом объектов*, порождаемых из другого объекта по некоторому алгоритму, в частности, комбинаторно. Источником некоммутативности и неассоциативности в рассматриваемом случае выступает комбинаторика. Не исключено, что для отношений в паре объектов достаточна ассоциативность. При отношениях объекта с классом других объектов возможна неассоциативность. Фактически, мы вычисляем скалярное произведение одного вектора с классом векторов, алгоритмически выраженных через второй вектор, представляя результат в форме вектора.

С точки зрения матричного произведения матриц циклическое комбинаторное произведение выглядит «недостаточным», частичным, хотя и подчиненным определенному «правилу игры».

Умножение реализуется недостаточно с точки зрения, принятой при произведении матриц, так как согласованно перемножаются строки и столбцы только **соответствующих матриц** $(1,1),(2,2),\ldots$, но само комбинаторное произведение избыточно на векторах, построенных по соответствующим строкам и столбцам.

Комбинаторное произведение явно выражает и соединяет идею частичной деформации математических величин (этот вариант софистатен частичной деформации физических объектов) с идеей творческого, согласованного изменения *математических величин (этот вариант софистатен трансфинитной активности физических объектов).*

Комбинаторное произведение можно интерпретировать иначе, рассматривая его, как правило умножения строки на матрицу, ассоциированную со вторым вектором. Действительно, компоненты произведения будут одинаковы по правилу комбинаторного произведения и по умножению строки матрично на транспонированную матрицу, (строки стали столбцами). Получим сопоставление

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \hline a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & d_2 & a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \hline a_2 & d_2 & c_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 & d_2 & c_2 \\ c_2 & b_2 & a_2 & d_2 \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

В данном случае оба указанных представления базируются на подгруппе канонической мономиальной группы. Она образована матрицами, которые частично составлены из элементов «ствола» A этой группы и элементов одной из её «веточек» B. Так, получим

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы второго вектора образуют матрицу, используемую при построчном комбинаторном умножении компонент, согласно правилу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} a_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} c_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} d_2.$$

А*лгоритм* данного комбинаторного умножения выглядит так:

- берутся элементы из нормальной подгруппы (например, канонической мономиальной группы) и из её факторгруппы так, чтобы они образовали группу, которая назовём **группой размещения**,
- обеспечивается совпадение размерности группы с размерностью используемых «векторов»,
- матрица для второго вектора получается умножением элементов группы размещения на компоненты второго вектора,
- допускается трансформация полученной матрицы, например, на основе транспонирования, что позволяет реализовать комбинаторное произведение, матрично умножая строку из элементов первого вектора на столбцы матрицы, полученные транспонированием.

Для пятимерного вектора группа матриц выглядит так:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$(E,\alpha,\beta,\gamma,\delta).$$

Правила произведения элементов образуют таблицу 1.

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & \alpha & \beta & \gamma & \delta\\ \hline \alpha & \gamma & E & \delta & \beta\\ \beta & E & \delta & \alpha & \gamma\\ \gamma & \gamma & \alpha & \beta & E\\ \delta & \beta & \gamma & E & \alpha\end{array}\right).$$

Поскольку эти «несущие конструкции» заданы, к ним можно в произвольном порядке присоединять компоненты второго вектора. Так образуется семейство перестановок компонент второго вектора. С ним связано семейство неассоциативных умножений.

Введем комбинаторную операцию произведения строки на соответствующий столбец, меняя циклически вправо значимый элемент для последующих строк. В этом случае, как показано ранее, мы неявно учитываем неассоциативные свойства модели.

Сравним комбинаторное и обычное умножение матриц:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{(k)}{\otimes}\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Результаты отличаются не только знаками. Волновая функция со своими производными присоединена к матрицам-идеалам по правилу: $\partial_x \to 2, \partial_y \to 3, \partial_z \to 4, \partial_t \to 1$.

Рассмотрим комбинаторное произведение кватернионных единиц, принадлежащих мономиальной проективной группе. Так, например,

$$\left(a\overset{k}{\times}b\right)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\left(a\overset{k}{\times}b\right)\overset{k}{\times}c=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\left(b\overset{k}{\times}c\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&1\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

.

$$a\overset{k}{\times}\left(b\overset{k}{\times}c\right)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&1\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\left(a\overset{k}{\times}b\right)\overset{k}{\times}c-a\overset{k}{\times}\left(b\overset{k}{\times}c\right)=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\1&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

В данном случае квадрат разницы (по матричному произведению) будет идемпотентом вида

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Квадрат разницы, вычисленный по комбинаторному произведению, если рассмотреть четвертую его степень по матричному произведению, будет идемпотентом:

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}^{4m}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

В других случаях получатся более сложные выражения. Это обстоятельство позволяет классифицировать неассоциативность по типу математических изделий, им соответствующих. С физической точки зрения за ними «стоят» физические изделия разных типов. В случае ассоциативных алгебр этого «богатства» нет.

Комбинаторное произведение можно рассматривать как **произведение с многократной (в данном случае тройной) операцией:**

- на первом шаге образуется матрица, строки которой есть комбинаторно переставленные компоненты второго «вектора»,
- затем выполняется транспонирование этой матрицы,
- на третьем шаге проводится матричное произведение первого «вектора» на матрицу, полученную после транспонирования.

Из анализа следует возможное **правило комбинаторного произведения для матриц**: можно строки первой матрицы комбинаторно умножить на аналогичные столбцы второй матрицы. В этом случае результат не совпадет с матричным произведением.

Можно умножить комбинаторно матрицу на матрицу, полагая, что вторая матрица есть вторая строка, размещенная в форме матрицы. Добавим к этому алгоритму операцию комбинаторного сложения для матриц, согласно которой итоговые столбцы образуют матрицу. Мы получаем алгоритм приведения комбинаторного произведения матриц к стандартному матричному произведению. Результаты матричного и комбинаторного произведения совпадут, если транспонировать исходную вторую матрицу, а также транспонировать итог комбинаторного произведения. Покажем это. Умножим матрицу на матрицу стандартным образом. Получим

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2d_1 & a_1c_2 + a_2d_2 \\ b_1c_1 + b_2d_1 & b_1c_2 + b_2d_2 \end{pmatrix}.$$

Комбинаторно умножим матрицу на матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{array} \overset{k}{+} \begin{array}{c|c} b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{array} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2d_1 & a_1c_2 + a_2d_2 \\ b_1c_1 + b_2d_1 & b_1c_2 + b_2d_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим комбинаторное умножение справа, когда столбцы второй матрицы комбинаторно умножаются на матрицу слева. Получим

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{\leftarrow}{\times}} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} c_1 & d_1 \\ \hline a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \overset{k}{+} \begin{array}{c|c} c_2 & d_2 \\ \hline a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2d_1 & a_1c_2 + a_2d_2 \\ b_1c_1 + b_2d_1 & b_1c_2 + b_2d_2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае комбинаторное произведение «ближе» к матричному, так как использует меньше операций, требуемых для совпадения данных. Мы приходим к концепции операторного расстояния, выражаемого количеством операций, требующихся для совпадения данных, полученных разными способами.

Пример 1.

Покажем, что *операция комбинаторного произведения допускает изменения*, позволяющие трактовать обычные операции с векторами как их частный случай.

Предложим **вместо элементов группы** размещения **элементы базиса алгебры Ли** для вектора с тремя компонентами. Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В первой матрице первая строка и первый столбец нулевые, во второй – вторые, в третьей – третьи. Расположение знаков подчинено циклу. Матрицы обладают свойством $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2I$, так как

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \beta^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они подчинены правилам, которые характеризуют эту систему как совокупность базисных элементов алгебры Ли. Действительно, получим

$$\beta\alpha - \alpha\beta = \gamma, \alpha\gamma - \gamma\alpha = \beta, \gamma\beta - \beta\gamma = \alpha.$$

Они обладают свойствами:

$$\sigma \cdot \pi - \pi \cdot \sigma = 0,$$
$$\sigma, \pi \Rightarrow \alpha^2, \beta^2, \gamma^2.$$

Сконструируем матрицу по второму вектору: $M \Rightarrow \alpha b_x + \beta b_y + \gamma b_z$. Получим формулу для комбинаторного произведения обычных трёхмерных векторов:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \underset{A}{\overset{k}{\times}} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c:c:c} a_x & a_y & a_z \\ \hline 0 & b_z & -b_y \\ -b_z & 0 & b_x \\ b_y & -b_x & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}.$$

Заметим, что размещение компонент вектора по базисным матрицам можно реализовать по-разному. По этой причине к известным соотношениям добавляются также новые соотношения.

Вывод: Комбинаторное произведение векторов трехмерного пространства, основанное на использовании в качестве матрицы заполнения для второго вектора элементов базиса алгебры Ли, задает стандартное векторное произведение векторов.

Пример 2.

Используем для построения матрицы размещения для второго вектора в комбинаторном произведении те матрицы, которые полиномиально выражаются через базисные элементы алгебры Ли:

$$\alpha^* = 0{,}5\left((\alpha^2 - \gamma^2) - \beta^2\right), \beta^* = 0{,}5\left((\beta^2 - \alpha^2) - \gamma^2\right), \gamma^* = 0{,}5\left((\gamma^2 - \beta^2) - \alpha^2\right).$$

Получим

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Они не образуют группу. Они не являются базисными элементами для алгебры Ли. Получим объект

$$\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Трансформируем его посредством канонического правого идеала:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно принять другую исходную точку зрения. Зададим комбинаторную триаду

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Спроектируем её посредством элемента единичной матрицы, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдём для этого случая комбинаторное произведение векторов:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{\xi}{\times}} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c:c:c} a_1 & b_1 & c_1 \\ \hline a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\vec{A}_1, \vec{A}_2\right) = \vec{j}\,(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)\,\vec{j}.$$

Вывод: Комбинаторное произведение векторов в случае многократной операции допускает вектор с компонентой, соответствующей обычному скалярному произведению векторов.

Вывод: Рассматриваемое произведение коммутативно и неассоциативно. Действительно, получим

$$(A \cdot B) \cdot C = ((a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1, 0, 0), \qquad A \cdot (B \cdot C) = (a_1(c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3), 0, 0).$$

Вывод: Рассматриваемое произведение может быть получено, исходя из разных исходных посылок.

Замечание 1. Рассматриваемый вариант можно назвать *тривиальным комбинаторным произведением*. В нём реализуется однократное, явное произведение компонент с последующим сложением результатов.

Для четырёхмерного вектора зададим элементы, формирующие матрицу заполнения, используя матрицы трехмерных вращений. Пусть, например, компонентам соответствуют матрицы

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они имеют ряд свойств, которые выходят за рамки свойств группы или алгебры Ли. Так,

$$x^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},y^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},z^2=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},t^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Это множество коммутативно:

$$\sigma\cdot\pi-\pi\cdot\sigma=0,$$
$$\sigma,\pi\Rightarrow x^2,y^2,z^2,t^2.$$

Так, например, получим

$$x^2y^2-y^2x^2=0,......,z^2t^2-t^2z^2.$$

Выполним комбинаторное произведение четырёхвекторов при указанном функциональном свойстве матриц заполнения. Рассмотрим

$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{f}{\times}}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\\d_2\end{pmatrix}=\begin{array}{c:c:c:c}a_1&b_1&c_1&d_1\\\hline a_2&c_2&d_2&b_2\\-c_2&-d_2&-b_2&0\\d_2&0&0&a_2\\b_2&0&-a_2&c_2\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2+c_1d_2+d_1b_2\\-a_1c_2-b_1d_2-cb_2\\a_1d_2+a_2d_1\\a_1b_2-c_1a_2+d_1c_2\end{pmatrix}.$$

Вывод: *Нелинейные соотношения* для элементов множества, размещающего второй вектор в матрицу, *задают* через комбинаторное умножение *сложные отношения* для компонент суммарного вектора. **Каждая компонента произведения вычисляется по «своему» закону.**

Изучим вариант комбинаторной операции с применением в качестве средств заполнения элементов, расположенных на «полочке» факторгруппы. Этот пример важен потому, что физические модели могут быть заданы на основе таких элементов.

Выберем совокупность, состоящую из четырёх матриц $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ вида

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\delta=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Они получаются комбинаторно из матриц при последовательном перемещении каждого значимого элемента на шаг вперед. Аналогичный результат получим при движениях на шаг назад.

Матрицы имеют общие свойства:

$$\xi\varsigma\neq\varsigma\xi,$$
$$(\xi\varsigma)^2=(\varsigma\xi)^2.$$

Они подчинены также системе частных свойств:

$$\alpha\alpha+\beta\beta=0,\beta\beta+\gamma\gamma=0,\gamma\gamma+\delta\delta=0,\delta\delta+\alpha\alpha=0,$$
$$\alpha\beta-\gamma\delta=0,\beta\alpha-\delta\gamma=0,\alpha\beta+\delta\alpha=0,\beta\alpha+\alpha\delta=0,$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma=0,\beta\alpha+\alpha\beta=0,\alpha\beta-\gamma\delta=0,\beta\alpha-\delta\gamma=0,$$

$$\beta\gamma - \delta\alpha = 0, \gamma\beta - \alpha\delta = 0, \gamma\beta + \delta\gamma + 0, \beta\gamma + \gamma\delta = 0,$$
$$\delta\alpha + \gamma\delta = 0, \alpha\delta + \delta\gamma = 0, \delta\alpha - \beta\gamma = 0, \alpha\delta - \gamma\beta = 0.$$

При взаимном произведении указанных элементов мы получаем элементы проективной группы. Её факторгруппа по Z_2 задана матрицами

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изучим свойства комбинаторной операции на указанной системе исходных матриц.

Анализ показал, что *данное комбинаторное произведение* некоммутативно и неассоциативно.

Возникает *предположение*, что *неассоциативность есть фундаментальное свойство комбинаторной операции, построенной на элементах факторгруппы.*

Поскольку стандартные физические модели обычно сконструированы на группах заполнения, в них на этапе конструирования заложена ассоциативность. Однако это не так, потому что физические модели могут быть записаны и на элементах факторгруппы.

Более глубокая причина ассоциативности кроется в том, что в физических моделях используются матрицы и ассоциативная операция матричного умножения.

Неассоциативность появляется тогда, когда операции, используемые в физических моделях, «выходят за рамки» стандартных матричных операций.

Речь фактически идёт об алгоритмах анализа алгебраических аспектов структуры и взаимодействия физических объектов.

Анализ конечных физических систем, с математической точки зрения, есть построение величин, сопоставляемых этим системам, а также построение операций, которым они подчинены.

Величины софистатны изделиям, операции софистатны взаимодействиям. Поскольку принято базовое предположение, что структуры и взаимодействия софистатны, желательно по обоим указанным обстоятельствам работать е единым изделием.

На роль такого математического изделия претендует алгебра. В ней есть как сами величины, так и их дополнительные качества, выраженные, например, системой реперов. С другой стороны, операции в алгебре могут соответствовать аспектам реального взаимодействия.

Поскольку свойства математических систем *достаточно общие и глубокие*, вариант построения физики как алгебраической дисциплины может позволить нам выяснить не только известные стороны структур и взаимодействий, но и те, которые сейчас недоступны эксперименту.

Более того, математика может скорректировать мышление, направив его в сторону **созидания** *новых свойств* физических изделий и их взаимодействий.

Обобщение формализма Кэли-Диксона

Хорошо известен алгоритм удвоения Кэли-Диксона для получения комплексных чисел, кватернионов и октонионов. Он построен на взаимном произведении пар объектов. Вначале создаются удвоенные объекты вида

$$A = a_1 + a_2 e, \quad B = b_1 + b_2 e.$$

Слагаемые $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ имеют известные свойства и новую формальную единицу e. Произведение задается правилом

$$(a_1 + a_2 e)(b_1 + b_2 e) = (a_1 b_1 - \bar{b}_2 a_2) + (b_2 a_1 + a_2 \bar{b}_1)e.$$

Черта над числом означает сопряжение. Так строятся комплексные числа из действительных чисел, кватернионы – из комплексных чисел, октонионы – из кватернионов. Действительные и комплексные числа, а также кватернионы ассоциативны, октонионы альтернативны.

По теореме Гурвича этот набор альтернативных алгебр с делением единственен.

Покажем, что формализм Кэли-Диксона (КЭД) соответствует схеме комбинаторного произведения с дополнениями (КОД). Пусть произведение пар задано стандартным правилом, дополненным изменением элементов в столбце, соответствующем второй паре чисел. Получим

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \overset{\delta}{*} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & \overset{\circ}{b}_2 \\ b_2 & \overset{\circ}{b}_1 \end{array} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 \overset{\circ}{b}_2 \\ a_1 b_2 + a_2 \overset{\circ}{b}_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(a_2 \overset{\circ}{b}_2 = \delta(2) a_2 \bar{b}_2, \quad a_2 \overset{\circ}{b}_1 = \delta(1) a_2 \bar{b}_1 \right) \Rightarrow (\delta(1) = 1, \delta(2) = -1).$$

Знак $\Rightarrow$ мы используем с морфологическим содержанием «если принять условия». Знак δ соответствует инволюции, знак $*$ соответствует комбинаторному произведению с частичным сопряжением (второй инволюцией).

Тогда элементы произведения будут заданы формулой

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \overset{\delta}{*} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 - \bar{b}_2 a_2 \\ b_2 a_1 + a_2 \bar{b}_1 \end{pmatrix}.$$

Она соответствует алгоритму Кэли-Диксона.

Вывод: Формализм Кэли-Диксона (КЭД) есть комбинаторная операция с дополнениями (КОД).

Обобщение: Сопряжение и изменение знака плюс на минус выступают в роли пары инволюций в алгебре. Мы вправе применить подобный или измененный алгоритм не только для пар, но и для любой конечной совокупности элементов. Элементами могут быть не только числа, но и матрицы конечной размерности.

Обычное комбинаторное произведение с сопряжением столбца для второй пары матриц в форме транспонирования матриц $\bar{b} = b^T$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & \bar{b}_2 \\ b_2 & \bar{b}_1 \end{array} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + \bar{b}_2 a_2 \\ b_2 a_1 + a_2 \bar{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + b_2^T a_2 \\ b_2 a_1 + a_2 b_1^T \end{pmatrix}.$$

Замечания о базисах алгебр

При построении схем вложения практических данных в математическую модель требуется использовать разные системы матриц. Чтобы разобраться в их многообразии, желательно провести некоторую классификацию возможностей такого вложения

Размерность 2×2

Начнём с рассмотрения матричных уравнений, основанных на матрицах размерности 2×2.

Элементы матричной алгебры, содержащие один значимый элемент, равный единице, выглядят так:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \beta^p,\ p=1,2,3,4.$$

Любая матрица размерности 2×2 запишется через указанные элементы, рассматриваемые как математический базис для физических моделей:

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}=\beta^p a_p.$$

Рассматриваемые матрицы можно выразить на основе пары значимых элементов:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Полусуммы и полуразности этих элементов задают элементы с одной значимой единицей. Их количество равно четырём. Назовём совокупность матриц, из которой элементы матричной 1-алгебры (с одним значимым элементом, равным единице), получаются на основе сложения и вычитания, **аддитивным базисом.**

Введём новое понятие: мультипликативный базис есть минимальная совокупность элементов, произведение которых задаёт аддитивный базис.

В рассматриваемом случае есть пара мультипликативных базисов, реализующихся на матричной операции:

$$B_m(1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$B_m(2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Базис $B_m(1)$ не мономиален и не порождает избыточных членов, базис $B_m(2)$ мономиален и порождает дополнительные члены вида

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Рассматриваемые элементы позволяют индуцировать систему трёх фундаментальных чисел с качественно разными базисами, соответствующие комплексным, дуальным и двойным числам (имеют гиперболический, параболический, эллиптический тип):

$$A\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad B\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad C\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение характеристических уравнений для них вида

$$\det(M-I\lambda)=0, M\to A,B,C$$

даёт, соответственно, числа $\lambda(A)=-1,\ \lambda(B)=0,\ \lambda(C)=1.$Они кореллируют с квадратами базисных матриц в матричном представлении:

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=(-1)\cdot I,\qquad B^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0\cdot I,\qquad C^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1\cdot I.$$

Аддитивный базис можно рассматривать мультипликативно. Используя матричное произведение, получим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|cccc}
\times & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\
\hline
\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

Таблица задаёт группу из восьми элементов. Исходные элементы аддитивного 2-базиса дополнены элементами, умноженными на минус единицу. С точки зрения графического представления объектов, ассоциированных с данными матрицами, мы имеем дело с системой одиночных или парных циклов. Они интерпретируются как **математическая реализация и взаимодействия *простейших* гравитационных предзарядов**.

Рассмотрим произведение указанных матриц, используя циклическую комбинаторную операцию. Получим таблицу, согласно которой **произведение гравитационных предзарядов порождает систему электрических предзарядов**. Действительно,

$$\left(\begin{array}{c|cccc}
\overset{k}{\times} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\
\hline
\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

Рассмотрим матричное произведение идеалов. Получим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|cccc}
* & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\\
\hline
\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

Вывод: Матричное произведение гравитационных предзарядов дает гравитационные предзаряды, их циклическое комбинаторное произведение порождает электрические предзаряды.

Из неё следует, что матричное произведение левых идеалов не выводит произведение из их семейства. Заметим, что циклическое комбинаторное произведение обладает аналогичными свойствами.

Ситуация меняется, если рассматривается матричное произведение левых и правых идеалов. Например, получим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|cc} \overset{k}{\times} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=a & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=b \\ \hline \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=c & \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=d & \begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix} \end{array}\right).$$

Гравитационные предзаряды получаются из электрических предзарядов по формуле матричного произведения левого и правого идеалов с последующей их суммой или разностью:

$$cb \pm da \Rightarrow 2\begin{pmatrix}0&1\\\pm1&0\end{pmatrix}.$$

Алгоритм построения **аддитивного базиса** размерности 3×3, состоящего из двух значимых канонических чисел, выглядит так:

- в правом верхнем углу располагаются элементы аддитивного 2-базиса размерности 2×2,
- аналогично предыдущим матрицам заполняется второстепенная диагональ,
- затем заполняются оставшиеся места,
- свободный единственный элемент согласовывается с другими диагональными элементами.

Конкретизируем представленный алгоритм. Получим матрицы 2-базиса размерности 3×3:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицы аддитивного 3-базиса размерности 3×3:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Таких базисов много. Они не обязаны быть группой. Рассмотрим, например, произведение трех элементов.

$$\left(\begin{array}{c|ccc}
 & \alpha=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \beta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \gamma=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\\
\hline
\alpha=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\\
\beta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\\
\gamma=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

Аддитивный 1-базис получается из многократных указанных произведений и самих исходных элементов. Так, например, получим

$$\frac{1}{2}(\alpha\beta-\alpha)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{2}(\beta\beta-\beta)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ldots$$

$$\frac{1}{2}(\gamma(\gamma\alpha)+\alpha)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ldots$$

Аддитивный 1-базис представляет собой систему простых «слов», составленных из сложных «букв». Другими словами, **внешняя простота математического изделия может скрывать систему функционально соединенных между собой сложных математических изделий.** В силу софистатности математики и физики аналогичные варианты возможны и для физических изделий.

Аддитивный 2-базис для матриц размерности 4×4 получается по алгоритму, используемому ранее для матриц размерности 3×3.

Мультипликативных базисов размерности 4×4, посредством которых получаются, например, элементы проективной группы в мономиальном представлении, очень много. Они частично проанализированы в монографии «Новая физика света».

Триплеты

Триплеты как математические объекты применяются, например, в моделях ядерной физики и биологии. В ядерной физике их ассоциируют с тройкой кварков, семейство которых образует триплет. В биологии триплеты ассоциируют с кодонами – тройками аминокислот, из которых в определенной последовательности образуются молекулы ДНК.

В математике триплеты ассоциируются с именами Гамильтона и Фробениуса. Гамильтон искал ассоциативную алгебру с делением, но успеха в этом направлении не имел. Позднее Фробениус доказал, что алгебры с делением возможны только для действительных чисел, комплексных чисел, кватернионов и октонионов.

В данном разделе проводится анализ математических свойств и степеней свободы для триплетов с целью дальнейшего применения их в ядерной физике и биологии. Анализ показал возможность их применения в теории гравитации, что может позволить нам найти её новые свойства.

Уточнение теоремы Фробениуса

Рассмотрим триплетную алгебру. Зададим базис алгебры матрицами

$$i=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, j=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, k=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Они построены по алгоритму комбинаторной перестановки элементов строк единичной матрицы. Базис подчинен **матричной таблице** умножения:

$$\left(\begin{array}{c|ccc}\times & i & j & k\\ \hline i & i & j & k\\ j & j & k & i\\ k & k & i & j\end{array}\right).$$

Построим произведение векторов такого трехмерного пространства. Получим

$$M_1\cdot M_2=(a_1i+b_1j+c_1k)(a_2i+b_2j+c_2k)=a_1a_2i+c_1c_2j+b_1b_2k+$$
$$+(b_1c_2+c_1b_2)i+(a_1b_2+b_1a_2)j+(a_1c_2+c_1a_2)k.$$

Выражение представлено в форме суммы двух векторов. Второй вектор аналогичен предыдущему вектору, полученному по формуле альтернативного определителя. Первый вектор образован из однотипных компонент.

Произведение ассоциативно и дистрибутивно. Дистрибутивность очевидна. Докажем ассоциативность:

$$a(bc)=(ab)c.$$

Получим выражения

$$bc=(b_1i+b_2j+b_3k)(c_1i+c_2j+c_3k)=$$
$$=b_1c_1i+b_1c_2j+b_1c_3k+b_2cj+b_2c_2k+b_1c_3i+b_3c_1k+b_3c_2i+b_3c_3j.$$
$$a(bc)=(a_1i+a_2j+a_3k)bc=$$
$$=a_1b_1c_1i+a_1b_1c_2j+a_1b_1c_3k+a_1b_2c_1j+a_1b_2c_2k+a_1b_2c_3i+a_1b_3c_1k+a_1b_3c_2i+a_1b_3c_3j+$$
$$+a_2b_1c_1j+a_2b_1c_2k+a_2b_1c_3i+a_2b_2c_1k+a_2b_2c_2i+a_2b_2c_3j+a_2b_3c_1i+a_2b_3c_2j+a_2b_3c_3k+$$
$$+a_3b_1c_1k+a_3b_1c_2i+a_3b_1c_3j+a_3b_2c_1i+a_3b_2c_2j+a_3b_2c_3k+a_3b_3c_1j+a_3b_3c_2k+a_3b_3c_3i.$$

$$.a_1b_1c_3k+a_1b_2c_3i+a_1b_3c_3j+a_2b_1c_3i+a_2b_2c_3j+a_2b_3c_3k+a_3b_1c_3j+a_3b_2c_3k+a_3b_3c_3i+$$
$$+a_1b_1c_2j+a_1b_2c_2k+a_1b_3c_2i+a_2b_1c_2k+a_2b_2c_2i+a_2b_3c_2j+a_3b_1c_2i+a_3b_2c_2j+a_3b_3c_2k+$$
$$(ab)c=a_1b_1c_1i+a_1b_2c_1j+a_1b_3c_1k+a_2b_1c_1j+a_2b_2c_1k+a_2b_3c_1i+a_3b_1c_1k+a_3b_2c_1i+a_3b_3c_1j+$$

$$ab=a_1b_1i+a_1b_2j+a_1b_3k+a_2b_1j+a_2b_2k+a_2b_3i+a_3b_1k+a_3b_2i+a_3b_3j.$$
$$(ab)c=ab(c_1i+c_2j+c_3k).$$

Столбцы нижнего выражения совпадают со строками в верхнем выражении.

Докажем, что в поле действительных и комплексных чисел данная алгебра деления не имеет.

Рассмотрим произведение элементов алгебры, полагая, что у ненулевого элемента a есть обратный элемент b:

$$ab=(a_1i+a_2j+a_3k)(b_1i+b_2j+b_3k)=(a_1b_1+a_3b_2+a_2b_3)i+$$
$$+(a_2b_1+a_1b_2+a_3b_3)j+(a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3)k=1_{ab}i+1_{ab}j+1_{ab}k.$$

Введенные единицы 1_{ab} ассоциированы со стандартными единицами, но они не имеют явного математического выражения и рассматриваются как операторы. Их роль состоит в преобразовании числового базиса в исходный базис алгебры триплетов. Конкретный вариант таких действий будет указан ниже.

Для нахождения обратного триплета требуется решить систему уравнений вида

$$a_1 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 = 1_{ab},$$
$$a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_3 b_3 = 1_{ab},$$
$$a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 = 1_{ab}.$$

Произведение чисел a, b задано, если задана операция произведения для этих чисел. Поскольку числа разные, такое произведение из общих соображений может быть подчинено *самостоятельному закону*. Речь идет о произведении числовых базисов, относящихся к «отличаемым» числам. Поскольку единицы 1_{ab} играют роль оператора, данную систему мы можем решить после того, как найдем место данному оператору.

Применим к операторной линейной системе стандартный метод решения Крамерса.

В таком варианте компоненты b_i могут быть определены, если не равен нулю определитель

$$G = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - a_1 a_2 a_3 - a_2 a_3 a_1 - a_3 a_2 a_1.$$

Проанализируем некоторые возможности.

Вариант 1.

Очевидно, что для действительных и комплексных чисел этот определитель может обратиться в ноль.

Вариант 2.

Выберем числа a_i в соответствии с базисом алгебры, подчиненном матричному произведению. Так, пусть

$$a_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тройное произведение этих чисел вида $a_1 a_2 a_3$ соотносит элементы к базису i. Поэтому

$$a_1^3 = \alpha_1^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2^3 = \alpha_2^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_3^3 = \alpha_3^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_1 + a_3 a_2 a_1 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как мы имеем дело с полиномами третьего порядка, возможен набор чисел α_i, при котором определитель обратится в ноль: $G = 0$. Следовательно, при выборе чисел на базисе с матричным произведением мы имеем **алгебру без деления**.

Вариант 3.

Ситуация меняется, если числа a_i. рассматриваются как самостоятельные триплеты и них введено **произведение их реперов.** Пусть базисные элементы числа подчинены правилу:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \otimes_a & i_a & j_a & k_a \\ \hline i_a & i_a & j_a & k_a \\ j_a & k_a & i_a & j_a \\ k_a & j_a & k_a & i_a \end{array}\right).$$

Они соответствуют правилу комбинаторного произведения строк на соответствующие столбцы базисов исходного репера с последующей перестановкой элементов в строках полученной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ + \\ - \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} \overset{k}{\times}\pi & i & j & k \\ \hline i & i & j & k \\ j & k & i & j \\ k & j & k & i \end{array}\right).$$

Зададим величины выражениями (приняв обозначения для нового базиса, похожие на исходный базис):

$$a_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_a, a_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_a, a_3 = \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_a.$$

Тогда

$$a_1^3 = \alpha_1^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_a, a_2^3 = \alpha_2^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_a, a_3^3 = \alpha_3^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_a,$$

$$a_1 a_2 a_3 = a_3 a_2 a_1 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_a, a_2 a_3 a_1 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_a.$$

Учитывая введенные правила, получим

$$G = \alpha_1^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_a + (\alpha_2^3 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_a + (\alpha_3^3 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_a.$$

Рассмотрим разные ситуации:

1. Пусть две компоненты равны нулю. Тогда $G \neq 0$.
2. Пусть одна из компонент равна нулю. Тогда $G \neq 0$.
3. Пусть все компоненты не равны нулю. Поскольку компенсация слагаемых возможна только по второму и третьему слагаемому, то и в этом случае $G \neq 0$.

Триплет был задан по матричному произведению, числа заданы аналогично в форме триплета, но с другим произведением базисных реперов.

Действуя указанным образом, мы получаем в матричной алгебре триплетов **выражение для триплетного определителя** линейной системы. Он не равен нулю для ненулевого числа.

Очевидно, что этого обстоятельство недостаточно, чтобы получить обратный триплет.

Для искомого (другого) числа b используем таблицу произведений, аналогичную таблице для числа a, допуская, что базовые реперы, им соответствующие, могут быть различны.

В этом варианте мы выходим за рамки концепции одноуровневой алгебры. Мы имеем исходный триплет со своими базисными реперами. Кроме этого, задан второй триплет или триплет второго уровня. Триплеты различаются реперами и законами их произведения. Базисы разных уровней алгебры согласованы между собой. Пусть

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \otimes_b & i_b & j_b & k_b \\ \hline i_b & i_b & j_b & k_b \\ j_b & k_b & i_b & j_b \\ k_b & j_b & k_b & i_b \end{array}\right).$$

Зададим искомые величины для обратного триплета выражениями

$$b_i = \beta_i^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_b + \beta_i^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_b + \beta_i^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_b = \beta_i^1 i_b + \beta_i^2 j_b + \beta_i^3 k_b.$$

Решения рассматриваемой линейной системы, согласно правилу Крамерса, таковы:

$$b_1 = \frac{\delta_1}{G}, b_2 = \frac{\delta_2}{G}, b_3 = \frac{\delta_3}{G}.$$

Величина G указана ранее. Числители δ_i заданы выражениями вида

$$\delta_1 = \det \begin{pmatrix} 1_{ab} & a_3 & a_2 \\ 1_{ab} & a_1 & a_3 \\ 1_{ab} & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1_{ab} & a_2 \\ a_2 & 1_{ab} & a_3 \\ a_3 & 1_{ab} & a_1 \end{pmatrix}, \delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 1_{ab} \\ a_2 & a_1 & 1_{ab} \\ a_3 & a_2 & 1_{ab} \end{pmatrix}.$$

Чтобы их вычислить, необходимо задать действие оператора 1_{ab} на числа и базисные векторы. Определим их выражениями:

$$1_{ab} i_a = i = i_a 1_{ab}, 1_{ab} j_a = j = j_a 1_{ab}, 1_{ab} k_a = k = k_a 1_{ab},$$
$$1_{ab} i_b = i = i_b 1_{ab}, 1_{ab} j_b = j = j_b 1_{ab}, 1_{ab} k_b = k = k_b 1_{ab}.$$

Оператор 1_{ab} умножает число на единицу и превращает базовые матрицы, ассоциированные с числами, в базисные матрицы исходного репера. Оператор 1_{ab} играет роль *первого проектора* в алгебре триплетов, предназначенный согласовать систему базисов.

Зададим необходимое для развиваемого алгоритма правило произведения базиса триплетных чисел на исходный базис триплета. Пусть, например, принято правило (с точностью до умножения на ненулевые числа):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i_a & i & j & k \\ j_a & k & i & j \\ k_a & j & k & i \end{array}\right).$$

Его можно рассматривать как пример четырехкратной функциональной операции, в которой используется двойное проектирование. Рассмотрим этапы такой операции:

1. $\eta_b(\pi) \to \eta : i_b \to i, j_b \to j, k_b \to k,$
2. $\xi_a \to (\xi_a)^2_{\otimes} = i_a,$
3. $\xi_a(\pi) \to \xi : i_a \to i,$
4. $\eta \times \xi.$

На первом этапе первый элемент проектируется на аналогичный исходный репер триплета. На втором этапе второй элемент возводится в квадрат согласно таблице собственного умножения. На третьем этапе полученное выражение для квадрата проектируется на аналогичный исходный репер триплета. На четвёртом этапе выполняется матричное умножение полученных реперов.

Его можно рассматривать как правило произведения похожих реперов, определенное с точностью до выбора той или иной операции из полного набора операций.

Проиллюстрируем цепочку операций примером. Так, получим

$$j_b \otimes i_a = j \times i = j, j_b \otimes j_a = j \times i = j, j_b \otimes k_a = j \times i = j.$$

Тогда

$$\delta_i = \sigma_i^1 i + \sigma_i^2 j + \sigma_i^3 k, i = 1,2,3.$$

Запишем конкретное выражение для δ_1. Получим

$$\delta_1 = 1_{ab}(a_1 i_a a_1 i_a - a_2 j_a a_3 k_a) - a_3 k_a (1_{ab} a_1 i_a - 1_{ab} a_3 k_a) + a_2 j_a (1_{ab} a_2 j_a - 1_{ab} a_1 i_a) =$$
$$= 1_{ab}(a_1 a_1 i_a - a_2 a_3 k_a) - a_3 k_a (a_1 i_a - a_3 k_a) + a_2 j_a (a_2 j_a - a_1 i_a) =$$
$$= a_1^2 i - a_2 a_3 k - a_3 a_1 j + a_3^2 i + a_2^2 i - a_2 a_1 k = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) i + (-a_3 a_1) j + (-a_2(a_1 + a_3)) k.$$

Следовательно, $\sigma_1^1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \sigma_1^2 = -a_3 a_1, \sigma_1^3 = -a_2(a_1 + a_3).$

До сих пор базисы, ассоциированные с числами, не согласованы с исходным базисом триплета. Сделаем этот шаг. Будем считать, что произведение реперов некоммутативно:

$$\xi_a \xi_b \neq \xi_b \xi_a.$$

Примем правила произведения вида

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & i_a & j_a & k_a \\ \hline i_b & i & i & i \\ j_b & j & j & j \\ k_b & k & k & k \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} & i_b & j_b & k_b \\ \hline i_a & i & j & k \\ j_a & i & j & k \\ k_a & i & j & k \end{array}\right).$$

Таблица произведения базисов имеет вид левых или правых идеалов.

Если не принимать во внимание индексы реперов, правило произведений выразится единой формулой

$$\xi\eta - \eta\xi = \xi - \eta.$$

Ей соответствуют элементы матрита, задающие систему структурных постоянных вида

$$C_1^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что указанные таблицы возможны при функциональном использовании комбинаторного произведения для базисов исходного триплета. Действительно, рассмотрим

$$i\overset{k}{\times}i(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$j\overset{k}{\times}k(3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\ldots$$

По указанной причине мы вправе использовать числовые базисы, эквивалентные базисам исходных реперов, но подчиненные другим правилам умножения.

Введем, кроме этого, алгоритм произведения чисел. Пусть умножение чисел в выбранном базисе реализуется на основе квадратов компонент второго вектора. Так вводится *второй проектор* в алгебре. Мы принимаем вторую некоммутативность для триплетных чисел. Тогда, например, получим

$$\begin{gathered}(b_1i_b+b_2j_b+b_3k_b)(a_1i_a+a_2j_a+a_3k_a)=\\ \left(b_1(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\right)i+\left(b_2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\right)j+\left(b_3(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\right)k.\end{gathered}$$

Принятый вариант не противоречит дистрибутивности и ассоциативности исходных элементов алгебры. Решение линейной системы уравнений, задающей обратный триплет, имеет вид:

$$\begin{aligned}\Lambda_i&=(b_i^1i_b+b_i^2j_b+b_i^3k_b)(G_1i_a+G_2j_a+G_3k_a)=\delta_i=\sigma_i^1i+\sigma_i^2j+\sigma_i^3k=\\&=(b_i^1(G_1^2+G_2^2+G_3^2))i+(b_i^2(G_1^2+G_2^2+G_3^2))j+(b_i^3(G_1^2+G_2^2+G_3^2))k=\delta_i.\end{aligned}$$

При указанном наборе допущений мы получаем уравнения для обратного триплета:

$$(b_i^1(G_1^2+G_2^2+G_3^2))i+(b_i^2(G_1^2+G_2^2+G_3^2))j+(b_i^3(G_1^2+G_2^2+G_3^2))k=\sigma_i^1i+\sigma_i^2j+\sigma_i^3k.$$

Компоненты обратного триплета заданы выражениями:

$$b_i^k=\frac{\sigma_i^k}{(G_1^2+G_2^2+G_3^2)},i=1,2,3,k=1,2,3.$$

Произведения b_iG, равно как и величины δ_i, теперь представлены в виде, зависящем от закона умножения базисных реперов чисел, от функциональных свойств оператора проектирования реперов 1_{ab}, от закона произведения базисов чисел и базисов исходного триплета.

Мы ввели для чисел другой базис и другие их произведения, а также алгоритм, учитывающий различие чисел. Кроме этого, введен оператор, проектирующий базисные реперы чисел на исходные базисные реперы. Так *реализован вариант двухуровневой алгебры*.

Тогда возможен триплет, обратный исходному ненулевому триплету. Он получен в рамках модели ассоциативной двухуровневой алгебры.

Складывается впечатление, что мы находимся у истоков моделей многоуровневых алгебр. Их свойства, а потому и приложения, могут существенно превзойти свойства обычных алгебр. Алгебра в рассматриваемом варианте становится похожей на тонкий, сложный инструмент математической практики.

Фробениус ограничился использованием чисел, которые не выходят за рамки исходной *одноуровневой алгебры*. Ассоциативной одноуровневой алгебры с делением в этом случае нет.

Вывод: ***Возможна двухуровневая ассоциативная алгебра с делением для триплетов. Для этого в исходном триплете достаточно использовать триплетные числа, а также согласовать базисы используемой пары триплетов.***

Замечание 1. Определим произведение чисел-триплетов по другой формуле, используя принятые допущения о произведении числовых реперов:

$$\Lambda_i = \left(b_i^1 i_b + b_i^2 j_b + b_i^3 k_b\right)\left(G_1 i_a + G_2 j_a + G_3 k_a\right) =$$
$$= (\left(b_i^1\right)^2 + \left(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2\right))i + (\left(b_i^2\right)^2 + \left(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2\right))\,j + (\left(b_i^3\right)^2 + \left(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2\right))k.$$

Соответственно изменится выражение для обратного триплета.

Исследование неассоциативности в первую очередь направлено на нахождение новых приемов и алгоритмов для описания многоуровневой материи. В простейшем случае речь может идти о *двухуровневой материи*. Согласно основному требованию о единстве физического мира, оба уровня материи согласованы между собой. Это обстоятельство следует выразить математически. Оно тем более важно, что жизнедеятельность изделий, находящихся на двух уровнях материи, согласована между собой. В частности, обязано быть согласование свойств объектов, распределенных по первому и второму уровню.

Почти все указанные условия проявляются при построении ассоциативной алгебры триплетов с делением. Алгебра триплетов выступает как проявитель свойств двухуровневой материи. *Алгебра триплетов двухуровневая*. На первом уровне алгебры мы имеем триплет со своими базисными реперами и правилом их произведения. Он содержит числа, принадлежащие другому уровню алгебры. У другого уровня алгебры есть свои базисные реперы и правило их произведения. *Оба уровня алгебры согласованы друг с другом посредством некоторого функционального закона*. На каждом уровне алгебры «действуют» свои законы.

На первом уровне при произведении чисел они просто умножаются друг на друга без изменений, в соответствии с представителем числа. На втором уровне алгебры числа умножаются функционально, что качественно отличает оба уровня. Проведенный анализ показал, что сложными могут быть согласования реперов «алгоритмы взаимного проектирования» для реперов разного уровня. Согласно развиваемому подходу, реперы могут быть активными, что не только формально, но и сущностно меняет картину отображения физических экспериментальных данных на математические средства.

Замечание 2. Поскольку правил умножения чисел может быть достаточно много, складывается впечатление, если наличие обратного триплета считать законом Природы, что мы многого не знаем о её функциях и устройстве. Алгоритм получения моделей обратного триплета может быть математическим инструментом анализа закономерностей реального мира. Если же это так, то качественно иначе нужно подойти к использованию числовых систем, раскрытию возможностей их активности и трансфинитности.

Построение многоуровневых алгебр становится новой конструктивной задачей для математиков.

Применение многоуровневых алгебр в физике, очевидно, позволит получить качественно новые алгоритмы описания эксперимента и качественно новые предсказания свойств и закономерностей трансфинитной реальности.

Замечание 3. Многогранность и многоуровневость числовых систем хорошо иллюстрируется формализмом получения обратного триплета. Поскольку есть другие размерности, указанные свойства могут быть ещё более сложными. Принцип максимальных возможностей, предложенный ране в физике, инициирует попытки исследования новых возможностей, прежде всего, в математике.

Функциональное произведение матриц и альтернативный определитель

Построим систему матриц размерности 3×3 по правилу конструирования мономиальных канонических матриц, используя для этого первую строку этих матриц и единичную матрицу размерности 2×2. Получим совокупность матриц вида

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данный базис не замкнут по матричному произведению. По этой причине рассмотрим другую возможность. Формально введем таблицу произведений:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & i & j & k \\ j & j & i & i \\ k & k & i & i \end{array}\right).$$

Реализуем её на основе **функционального произведения**:

- поставим в соответствие матрицам числа $\alpha(i) = 0, \alpha(j) = \alpha(k) = 1$,
- определим произведение матриц формулой, согласованной с указанными числами, полагая $\xi \cdot \eta = (\xi \times \eta)^p, p = \alpha(\xi) + \beta(\eta)$.

Знак $(\times)$ соответствует матричному произведению. Построим произведение векторов трехмерного пространства по данной таблице. Получим

$$M_1 \cdot M_2 = (a_1 i + b_1 j + c_1 k)(a_2 i + b_2 j + c_2 k) = (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) i +$$
$$+ (b_1 c_2 + c_1 b_2) i + (a_1 b_2 + b_1 a_2) j + (a_1 c_2 + c_1 a_2) k.$$

Выражение содержит $i-$компоненту в виде скалярного произведения векторов стандартного трехмерного пространства. Кроме этого, есть слагаемые, которые можно трактовать как составляющие **альтернативного определителя**. Определим альтернативный определитель как аналог обычного определителя без минусов в полученных выражениях. Получим, например,

$$DA = \left(\begin{array}{ccc} i & j & k \\ \hline a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} i & & \\ \hline & b_1 & c_1 \\ & b_2 & c_2 \end{array}\right) + \ldots = (b_1 c_2 + c_1 b_2) i + (a_1 b_2 + b_1 a_2) j + (a_1 c_2 + c_1 a_2) k.$$

Сумма взаимных произведений задает элемент указанного базиса. Разность взаимных произведений тождественно равна нулю. По этой причине мы имеем дело с алгеброй Клиффорда. Она дополнительна алгебре Ли для обычных векторов трехмерного пространства.

В варианте, когда числа a_i, b_i, c_i принадлежат полю действительных или комплексных чисел, ситуация относительно проста. Полученное выражение напоминает произведение кватернионов, «спроектированное» на трехмерное пространство. В нём соединено скалярное произведение и векторное произведение векторов. В трехмерии они рассматриваются как отдельные самостоятельные операции. В формализме кватернионов для четырехмерия они объединены. В рассматриваемом случае свойства, аналогичные кватернионам, имеют вектора с трехмерном пространстве, ассоциированном с обычным трехмерным пространством.

В данном варианте произведения стандартное трехмерное пространство получает «двойника», свойства которого дополнительны обычным свойствам этого пространства. «Двойник» проявляет себя через свойства гипотетического базиса.

Числа a_i, b_i, c_i можно выразить матрицами размерности 3×3. Например, это может быть заполнение (случайное или подчиненное некоторому алгоритму) компонентами трехмерного вектора мест в матрице размерности 3×3. Например, пусть

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае компоненты пары трехмерных векторов распределены случайно, но расположены на местах, которые занимают элементы базисных матриц. Распределение компонент случайным образом согласовано с выбранным базисом трехмерного пространства.

Тогда

$$a_1 a_2 = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_1 a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{12}b_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_1 a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{13}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остальные слагаемые равны нулю. Слагаемые b_{12}, b_{13} не проявляют себя в произведении. Произведение может частично «скрывать» исследуемые величины.

Неассоциативная алгебра с делением

Рассмотрим другой вариант для произведений базовых реперов. Пусть для репера, замкнутого по матричному произведению, выполняются условия «**внутреннего произведения»** вида

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & i & j & k \\ j & k & i & j \\ k & j & k & i \end{array}\right).$$

В таблице произведений реперы расположились в соответствии со своей исходной структурой, заданной расположением значимых элементов.

Дистрибутивность алгебры с таким законом произведения доказывается легко, так как произведение и сумма не противоречат друг другу. Принятому произведению соответствует функциональный закон: $\xi \cdot \eta = (\xi \times \xi) \times \eta$.

Получим

$$i \cdot i = (i \times i) \times i = i, i \cdot j = (i \times i) \times j = j, i \cdot k = (i \times i) \times k = k,$$
$$j \cdot i = (j \times j) \times i = k, j \cdot j = (j \times j) \times j = i, j \cdot k = (j \times j) \times k = j,$$
$$k \cdot i = (k \times k) \times i = j, k \cdot j = (k \times k) \times j = k, k \cdot k = (k \times k) \times k = i.$$

Данная алгебра неассоциативна. Действительно, получим

$$\begin{aligned} a(bc) &= a_1b_1c_1 i + a_1b_1c_2 j + a_1b_1c_3 k + a_1b_2c_1 k + a_1b_2c_2 i + a_1b_2c_3 j + a_1b_3c_1 j + a_1b_3c_2 k + a_1b_3c_3 i + \\ &+ a_2b_1c_1 k + a_2b_1c_2 i + a_2b_1c_3 j + a_2b_2c_1 j + a_2b_2c_2 k + a_2b_2c_3 i + a_2b_3c_1 i + a_2b_3c_2 j + a_2b_3c_3 k + \\ &+ a_3b_1c_1 j + a_3b_1c_2 k + a_3b_1c_3 i + a_3b_2c_1 i + a_3b_2c_2 j + a_3b_2c_3 k + a_3b_3c_1 k + a_3b_3c_2 i + a_3b_3c_3 j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ab)c &= a_1b_1c_1 i + a_1b_2c_1 k + a_1b_3c_1 j + a_2b_1c_1 j + a_2b_2c_1 i + a_2b_3c_1 k + a_3b_1c_1 k + a_3b_2c_1 j + a_3b_3c_1 i + \\ &+ a_1b_1c_2 j + a_1b_2c_2 i + a_1b_3c_2 k + a_2b_1c_2 k + a_2b_2c_2 j + a_2b_3c_2 i + a_3b_1c_2 i + a_3b_2c_2 k + a_3b_3c_2 j + \\ &+ a_1b_1c_3 k + a_1b_2c_3 j + a_1b_3c_3 i + a_2b_1c_3 i + a_2b_2c_3 k + a_2b_3c_3 j + a_3b_1c_3 j + a_3b_2c_3 i + a_3b_3c_3 k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a(bc) \neq (ab)c.$$

В произведении $a \cdot b$ компоненты a_i распределены по комбинаторному закону:

$$a \cdot b = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)i + (a_3b_1 + a_1b_2 + a_2b_3)j + (a_2b_1 + a_3b_2 + a_1b_3)k.$$

Покажем, что для ненулевого вектора a существует ненулевой вектор b, который является обратным ему. Для этого нужно решить систему линейных уравнений вида

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 1,$$
$$a_3b_1 + a_1b_2 + a_2b_3 = 1,$$
$$a_2b_1 + a_3b_2 + a_1b_3 = 1.$$

Ненулевые решения получатся, если определитель системы отличен от нуля:

$$G = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - a_1a_3a_2 - a_2a_3a_1 - a_3a_2a_1 \neq 0.$$

При использовании обычных чисел требуемое условие недостижимо. Ситуация меняется, если в роли чисел выступают матрицы, **ассоциированные с используемым базисом** алгебры. Так, пусть

$$a_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$a_1^3 = \alpha_1^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2^3 = \alpha_2^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3^3 = \alpha_3^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_1a_3a_2 = a_2a_3a_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, a_3a_2a_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$G=\alpha_1^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(\alpha_2^3-\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}(\alpha_3^3-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Проанализируем полученное выражение, рассмотрев разные ситуации:
1. Пусть две компоненты равны нулю. Тогда $G\neq 0$.
2. Пусть одна из компонент равна нулю. Тогда $G\neq 0$.
3. Пусть все компоненты не равны нулю. Поскольку компенсация слагаемых возможна только по второму и третьему слагаемому, то и в этом случае $G\neq 0$.

Мы получим, следуя правилам, найденным для триплетов с ассоциативной исходной алгеброй, **неассоциативную алгебру с делением** в том случае, когда перейдем к многоуровневой алгебре. В частности, это может быть двухуровневая алгебра.

Двойная комбинаторная операция

Обобщенный формализм Кэли-Диксона базируется, с позиции комбинаторного произведения, на многократной операции. Проанализируем некоторые новые возможности, которые появляются в таком варианте.

Дополним комбинаторное произведение комбинаторной операцией перестановок элементов в матрице. Поскольку строк три, есть 18 операций однократной перестановки элементов матрицы. Они имеют вид:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\pm\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\pm\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\pm\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\+\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\0\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\0\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\-\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\+\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\+\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\-\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\+\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\-\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\+\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\-\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\+\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\-\\-\end{pmatrix}.$$

Воспользуемся их действием на элементы базовых матриц, полученные посредством комбинаторной операции, когда строка комбинаторно умножается на строку.

Выполним двойное комбинаторное произведение матриц

$$i=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},j=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},k=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Пусть матрицы сначала комбинаторно умножаются друг на друга, а затем полученное выражение меняется операцией перестановки.

Выберем в качестве первого этапа комбинаторное произведение аналогичных строк в паре матриц. Выберем в качестве второй операции, применяемой к полученному произведению, перестановку элементов в строках вида $\begin{pmatrix}0&+&-\end{pmatrix}$. Первая строка остается неизменной, элементы второй строки сдвигаются на один шаг вправо, третья строка аналогично второй сдвигается влево.

Рассмотрим конкретную реализацию. Выполним двойное комбинаторное произведение для пары матриц:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{k(p)}{\times}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\overset{1}{\Rightarrow}\frac{1\ \ 0\ \ 0}{\begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix}}+\frac{0\ \ 1\ \ 0}{\begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix}}+\frac{0\ \ 0\ \ 1}{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{2}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Морфологически произведение запишется так: $i * j = k$.

Рассмотрим двойное комбинаторное произведение матриц в обратном порядке. Получим

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\overset{k(p)}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{1}{\Rightarrow}\frac{0\;\;1\;\;0}{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}+\frac{0\;\;0\;\;1}{\begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix}}+\frac{1\;\;0\;\;0}{\begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix}}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{2}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Морфологически произведение запишется так: $j * i = j$. Произведение некоммутативно.

Таблица двойного комбинаторного произведения получит вид:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & i & j & k \\ \hline i & i & k & j \\ j & j & i & k \\ k & k & j & i \end{array}\right).$$

Она совпадает с таблицей внутренних произведений базовых реперов. Алгебра, основанная на рассматриваемом произведении, неассоциативна. Наличие делителей регулируется дополнительными свойствами системы чисел.

Поскольку мы соотносим рассматриваемым матрицам гравитационные предзаряды, становится очевидным *богатство свойств гравитационных предзарядов*. Заметим, что аналогичные свойства имеют также изделия, изготовленные из них.

При первичном анализе полученного различия мы приходим к ряду следствий:

- изменение операции произведения может представлять собой *локальную перестановку* элементов в некотором другом, хорошо изученном произведении,
- по-видимому, всегда возможна сложная операция, которая выполняет несколько локальных перестановок в таблице произведения базисных реперов,
- **реперы** можно рассматривать как **активные элементы алгебры**, их активность задается **внутренними свойствами изделия**, которому сопоставлен базовый репер,
- реперы тем сложнее по своим свойствам, чем сложнее система операций, которым они подчинены,
- принимая активность реперов, мы вправе согласовывать систему операций, присущую им, с изменением конкретной физической ситуации, допуская трансформацию одной системы операций в другую,
- поскольку, согласно предыдущему анализу, числа могут быть подчинены своей системе операций, в алгебре мы имеем дело, как и в физической практике, по меньшей мере, с двумя системами операций,
- возможно рассмотрение функциональных правил согласования систем операций с физическими экспериментами и свойствами исследуемых объектов.

Рассмотрим двойное комбинаторное произведение указанного вида для произведения матриц в форме идеалов. Так, получим

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\overset{k(p)}{\times}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{2}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{k(p)}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\overset{1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{2}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Двойное комбинаторное произведение способно превратить идеалы в мономиальные матрицы. С физической точки зрения мы интерпретируем это обстоятельство как преобразование электрических предзарядов в гравитационные предзаряды.

Заметим, что однократное комбинаторное произведение способно превратить мономиальные матрицы в идеалы. С физической точки зрения мы интерпретируем это обстоятельство как преобразование гравитационных предзарядов в электрические предзаряды.

Заметим, что операция перестановки может использоваться как *средство самовоздействия* или как *следствие внешнего влияния* в отсутствие других структурных объектов. С физической точки зрения этот вариант соответствует объекту, находящемуся в окружении неструктурированных объектов такого же уровня, что тоже можно рассматривать как «объект», не имеющий матричного выражения. Тогда возможны *изменения, разные для разных условий*, в которые попадает изделие или разные в одних и тех же условиях, но при разном внутреннем состоянии изделия.

Так, например, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ + \\ - \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} + \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ + \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots$$

Заметим, что при геометрическом представлении операция перестановки схожа со структурой изделий, соотносимых электрическим предзарядам. Действительно, в электрическом предзаряде к одному изделию, находящемуся в виде замкнутой струны (аналог нуля), присоединяются одномерные объекты, ориентированные к замкнутой струне или в противоположную стороны (аналог плюса и минуса).

Так проявляет себя в данном случае принцип соответствия структур и активностей, принятый нами как в качестве одного из новых элементов теории, которые можно использовать при анализе конечных физических систем.

Анализ двойного комбинаторного произведения показал наличие шести типов в произведениях реперов. Таблица произведений может быть представлена алгебраически выражением

$$[(a)(b)(c)] = ai + bj + ck,$$
$$(a)(b)(c) \Rightarrow i, j, k.$$

Таблицы произведений согласованы с перестановками.

При первичном комбинаторном произведении строк (столбцов) первой матрицы на соответствующие строки второй базовой матрицы с последующей их перестановкой согласно указанной схеме получим:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ + \\ - \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & i & k & j \\ j & j & i & k \\ k & k & j & i \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} + \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & j & i & k \\ j & k & j & i \\ k & i & k & j \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ + \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & k & j & i \\ j & i & k & j \\ k & j & i & k \end{array}\right).$$

В сокращенной записи они выглядят так: $[ikj], [jik], [kji]$.

При первичном комбинаторном произведении столбцов (строк) первой матрицы на соответствующие столбцы второй базовой матрицы с последующей их перестановкой согласно указанной схеме получим:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ + \\ - \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & i & j & k \\ j & k & i & j \\ k & j & k & i \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} + \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & j & k & i \\ j & i & j & k \\ k & k & i & j \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ + \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & k & i & j \\ j & j & k & i \\ k & i & j & k \end{array}\right).$$

В сокращенной записи они выглядят так: $[ijk], [jki], [kij]$.

В рассмотренном двойном комбинаторном произведении есть шесть вариантов распределения базиса в соответствии с «картиной» исходного базиса. Таблица произведений второго базиса согласована с исходным базисом алгебры.

Комбинаторное произведение порождает алгебры стандартного вида. Из таблицы произведений следует, что

$$ij - ji = j - k, ik - ki = k - j,$$
$$ji - ij = k - j, jk - kj = j - k,$$
$$ki - ik = j - k, k - jk = k - j,$$
$$ii - ii = jj - jj = kk - kk = 0.$$

Структурные постоянные этой алгебры Ли выражаются тремя матрицами:

$$C_1^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to 0(j-k), \quad C_2^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to j-k, \quad C_3^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to -(j-k).$$

В совокупности структурные постоянные формируют матрит: объемную матрицу, состоящую из трех согласованных между собой плоских матриц. Сумма данных матриц равна нулю.

В случае матричного произведения обычно используется одна таблица произведений. Согласно ей, реперы распределены по элементам вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они являются «предбазисом» таблицы произведений для исходных реперов триплета. Их взаимное матричное произведение порождает эти реперы. Поскольку базисные элементы образуют группу, «предбазис» играет роль факторгруппы, состоящей из одной «полочки». Представим данный результат наглядно:

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \end{matrix}$$

«Предбазис» порождает базис, который задает таблицу двойного комбинаторного произведения для этого базиса.

Возможно построение новых таблиц произведения реперов, расположение элементов в которых соответствует элементам указанной факторгруппы.

Они разбиваются на два типа.

Первый тип соответствует двойной операции, состоящей из первичной операции в форме групповой перестановки элементов второй матрицы и второй операции в форме стандартного матричного произведения. Под групповой перестановкой понимается сдвиг элементов в каждой строке на единицу. Эта операция может быть повторена дважды.

Получим таблицы произведений:

$$\begin{pmatrix}+\\+\\+\end{pmatrix}:\xi\otimes(\vec{0})\eta=\left(\begin{array}{c|ccc}\otimes(\vec{0}) & i & j & k\\ \hline i & i & j & k\\ j & j & k & i\\ k & k & i & j\end{array}\right),\xi\otimes(\vec{1})\eta=\left(\begin{array}{c|ccc}\otimes(\vec{1}) & i & j & k\\ \hline i & j & k & i\\ j & k & i & j\\ k & i & j & k\end{array}\right),\xi\otimes(\vec{2})\eta=\left(\begin{array}{c|ccc}\otimes(\vec{2}) & i & j & k\\ \hline i & k & i & j\\ j & i & j & k\\ k & j & k & i\end{array}\right).$$

Второй тип соответствует *тройной функциональной операции*:

- сначала матрицы превращаются в свои квадраты (по операции матричного произведения),
- затем проводится преобразование второй матрицы посредством вертикальной перестановки строк,
- на третьем этапе выполняется матричное произведение квадрата первой матрицы на преобразованный квадрат второй матрицы. В этом случае получим таблицы произведений:

$$\begin{pmatrix}+\\+\\+\end{pmatrix}:\xi\otimes(f0)\eta=\left(\begin{array}{c|ccc}\otimes(f0) & i & j & k\\ \hline i & i & k & j\\ j & k & j & i\\ k & j & i & k\end{array}\right)=\xi^2\times(f0)\eta^2,$$

$$\begin{pmatrix}+\\+\\+\end{pmatrix}:\xi\otimes(f1)\eta=\left(\begin{array}{c|ccc}\otimes(f1) & i & j & k\\ \hline i & k & j & i\\ j & j & i & k\\ k & i & k & j\end{array}\right)=\xi^2\times(f1)\eta^2,$$

$$\begin{pmatrix}+\\+\\+\end{pmatrix}:\xi\otimes(f2)\eta=\left(\begin{array}{c|ccc}\otimes(f2) & i & j & k\\ \hline i & j & i & k\\ j & i & k & j\\ k & k & j & i\end{array}\right)=\xi^2\times(f2)\eta^2.$$

Матричный квадрат базисных элементов выглядит так: $i^2=i, j^2=k, k^2=j$. Вертикальное преобразование строк (совпадающее с горизонтальным преобразованием элементов влево) задает таблицы циклического превращения элементов. Получим для первого и второго преобразования формулы:

$$i\to k\Rightarrow j,\ j\to i\Rightarrow k, k\to j\Rightarrow i.$$

Они показывают превращения элементов исходного базиса триплета после первой и второй перестановок.

В данном случае мы имеем дело с алгеброй, в которой выполняются условия

$$\xi\eta-\eta\xi=0.$$

Из таблицы произведений следует, что структурные постоянные алгебры Ли для всех указанных вариантов будут равны нулю: $C_k^{ij}\equiv 0$.

Проиллюстрируем данное правило примерами:

$$j\otimes(f2)i=j^2\downarrow\downarrow i^2=k\downarrow\downarrow i=k\times j=i,$$
$$j\otimes(f2)j=j^2\downarrow\downarrow j^2=k\downarrow\downarrow k=k\times i=k,$$
$$j\otimes(f2)k=j^2\downarrow\downarrow k^2=k\downarrow\downarrow j=k\times k=j.$$

$$j \otimes (f1) i = j^2 \downarrow i^2 = k \downarrow i = k \times k = j,$$
$$j \otimes (f1) j = j^2 \downarrow j^2 = k \downarrow k = k \times j = i,$$
$$j \otimes (f) k = j^2 \downarrow k^2 = k \downarrow j = k \times i = k.$$

Мы отнесли к классу матричного произведения для реперов правило, по которому реперы в произведении распределяются по элементам факторгруппы исходного базиса триплета. Анализ показал принципиальную разницу в таких произведениях, что позволило выделить два типа произведений: двойная операция с перестановкой элементов и тройная операция с перестановкой элементов.

Общая картина произведения реперов становится сейчас «прозрачной». Есть два класса произведений реперов:

- основанные на матричном произведении с перестановками элементов или без перестановки,
- основанные на комбинаторном произведении с перестановками элементов или без перестановки.

Аспекты операций в пространстве размерности 4

Рассмотрим по аналогии с предыдущим анализом пространство и алгебры, базирующиеся на матрицах размерности 4×4. Выберем подгруппу унимодулярной группы в мономиальном представлении. Например, пусть это будут матрицы

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С аналогичной ситуацией мы имели дело в теории триплетов. Будем рассматривать *указанные матрицы как базисные матрицы для кватернионов*. Заметим, что для этих матриц нам известна факторгруппа, которая представлена тремя одинарными «полочками» B, C, D и одной двойной «полочкой» E, F.

$$B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$E \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае многообразие произведений реперов будет существенно более сложным, чем для триплетов. Соответственно увеличивается количество вариантов для произведения реперов кватерниона.

Спектр комбинаторных произведений

Заметим, что начальное комбинаторное произведение основано на циклическом изменении компонент столбца матрицы. В этом случае элементы расположатся так:

$$a_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & d_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Элементы столбца расположены по алгоритму согласованного использования пары элементов группы A и пары элементов «полочки» факторгруппы B.

Данный вариант индуцирует совокупность операций, базирующихся на элементах группы и факторгруппы. К типу α относятся операции, базирующиеся только на группе или на «полочке» факторгруппы. Их можно назвать чистыми комбинаторными произведениями. К типу β относятся операции, аналогичные указанной выше, когда расположение элементов обеспечивается сочетанием пары самостоятельных элементов. Их можно назвать смешанными комбинаторными операциями. Операций, которые сочетают элементы более двух блоков, нет.

Приведем один пример такого набора:

$$a_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ b_2 & c_2 & d_2 & a_2 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & d_2 & a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Вывод: Возможна система комбинаторных операций, базирующаяся на совокупности мономиальных матриц, заполняющих все элементы матрицы.

Выбирая любую пару с одной и той же полочки факторгруппы, мы получим мономиальное заполнение, добавив к ним пару матриц исходной группы. Поскольку выбор пар даёт 6 вариантов, а таких матриц 3 (сектора E,F объединяются только с собой) то получим 20 моделей смешанного комбинаторного произведения. Кроме этого, есть ещё 6 чистых комбинаторных произведений. Следовательно, получим 26 комбинаторных произведений.

Свойства произведений согласованы со спектром собственных значений характеристических полиномов, соответствующих используемым матрицам.

Получим следствия из проективной мономиальной группы на основе анализа корней соответствующих характеристических полиномов.

Единичной матрице соответствует полином $(1-\lambda)^4 = 0$, все корни одинаковы и равны единице $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Кватернионы a,b порождают полином $Y_1 = (\lambda^2 - 1)^2$, корни делятся по парам и равны плюс или минус единице: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Антикватернионы e, f порождают полином $Y_1 = (\lambda^2 + 1)^2$, корни делятся по парам и равны плюс или минус мнимой единице: $\lambda_1 = \lambda_2 = -i, \lambda_3 = \lambda_4 = i$.

Антикватернион c порождает полином $Y_3 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2$, корни делятся по парам и равны плюс или минус единице: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Вывод: Представим полученные значения корней характеристических полиномов на комплексной плоскости. Учтем, что корни распределяются парами. Получим восьмигранник, соединяющий между собой всю систему корней.

Принимая одни корни как аналоги электрических предзарядов, а другие корни как аналоги гравитационных предзарядов, мы имеем схематичное представление базовой частицы света, названной бароном.

Рассмотрим характеристические полиномы для системы мономиальных матриц, сопоставляя их с элементами факторгруппы B,C,D и самой группе A. Получим соответствия:

$$A \to Y_1 = (\lambda^2 - 1)^2,$$
$$\{b_1, b_3, c_1, c_4, d_1, d_2\} \to Y_2 = (1-\lambda)^2 (\lambda^2 - 1) \to \lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1,$$
$$\{b_2, b_4, c_2, c_3, d_3, d_4\} \to Y_3 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) \to \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -i, \lambda_4 = i.$$

Сектора E,F порождают единую систему характеристических полиномов. Они таковы:

$$\{e_1, e_3, f_2, f_4\} \to Y_4 = (\lambda - 1)(\lambda^3 - 1) \to \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 \neq \lambda_4 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2},$$
$$\{e_2, e_4, f_1, f_3\} \to Y_4 = (\lambda - 1)(\lambda^3 + 1) \to \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 \neq \lambda_4 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}.$$

Примем **постулат соответствия**: *математические объекты с системой всевозможных операций взаимно соответствуют физическим объектам с системой всевозможных взаимодействий.*

Естественно предполагать, что у трансфинитной реальности трансфинитны возможности. Более того, можно ожидать, что реализация всех возможностей является основным законом трансфинитной реальности.

Постулат **полного описания реальности** выглядит так: *реальность трансфинитна по структуре и поведению, обеспечивая реализацию всех возможностей.*

К структуре многократных комбинаторных произведений

Для анализа структуры комбинаторных произведений из соображений удобства введем новые обозначения:

$$i=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ j=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},k=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},l=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$i_a=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ j_a=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},k_a=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},l_a=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$i_b=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ j_b=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},k_b=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},l_b=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Укажем некоторые свойства данной совокупности матриц.
Таблица матричных произведений имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c|cccc}\times&i&j&k&l\\\hline i&i&j&k&l\\j&j&i&l&k\\k&k&l&i&j\\l&l&k&j&i\end{array}\right).$$

Таблица согласована с расположением элементов в реперах, что характерно для матричной операции на мономиальных матрицах. Имеем таблицу четырехкратных комбинаторных произведений:

$$\left(\begin{array}{c|cccc}\xi\overset{k}{\times}\eta(4)&i&j&k&l\\\hline i&i&i&i&i\\j&j&j&j&j\\k&k&k&k&k\\l&l&l&l&l\end{array}\right).$$

Она получается при последовательном четырехкратном комбинаторном произведении первого элемента на второй, затем полученного выражения на второй элемент и т.д. Проиллюстрируем это правило на конкретном примере. Рассмотрим

$$j\overset{k}{\times}k(4)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ldots$$

Выполним комбинаторное произведение базиса с индексом a и базиса без индекса. Получим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|cccc}\overset{k}{\times}&i&j&k&l\\\hline i_a&i_b&j_b&k_b&l_b\\j_a&j&i&l&k\\k_a&k_b&l_b&i_b&j_b\\l_a&l&k&j&i\end{array}\right).$$

Схема расположения элементов в таблице схожа с таблицей матричного произведения реперов без индексов с заменой в первой и третьей строке этих элементов элементами базиса с индексами b.

Перемножим матрично реперы ξ_b. Получим таблицу вида

$$\left(\begin{array}{c|cccc}\times&i_b&j_b&k_b&l_b\\\hline i_b&i&l&k&j\\j_b&j&k&l&i\\k_b&k&j&i&l\\l_b&l&i&j&k\end{array}\right),i\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\ldots$$

Расположение элементов в таблице согласовано с таблицей расположения значимых элементов в репере. На этой стадии ясно, что репером можно считать совокупность матриц, элементы которые заполняют все матрицу. По этой причине возможен также вариант хаотического или закодированного расположения элементов. Неясно, как в этом случае они будут соотноситься между собой как в сумме, так и в произведениях. Кроме этого, возможен вариант замены мест в реперах, соответствующий идее активного репера. С репером мы связываем систему отношений между базовыми объектами, в физических теориях, базирующихся на модели пары гравитационных и пары электрических предзарядов. Поэтому изменение отношений соответствует возможностям нового взаимодействия между предзарядами.

Изменение операций меняет таблицу произведений. Такие изменения могут давать новые отношения между элементами. Так. Рассмотрим операцию, согласно которой первый элемент дважды комбинаторно умножается на второй. Для реперов ξ_b получим таблицу вида

$$\left(\begin{array}{c|cccc}\xi\overset{k}{\times}\eta(2)&i_b&j_b&k_b&l_b\\\hline i_b&i&k&i&k\\j_b&l&j&l&j\\k_b&k&i&k&i\\l_b&j&l&j&l\end{array}\right),i\to\sigma=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ldots\sigma\underset{vv}{\overset{k}{\times}}\sigma=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\ldots$$

Элементы σ дополняют известную картину расположения реперов в таблице произведений. При комбинаторном произведении по соответствующим столбцам этих элементов на себя мы получаем левые идеалы.

К аналогичным идеалам мы приходим при комбинаторном умножении по соответствующим строкам некоторых мономиальных матриц. Например, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{ll}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots$$

Так обнаруживаются, с физической точки зрения, математические средства, иллюстрирующие механизмы порождения электрических предзарядов. Тот факт, что механизмов много, свидетельствует о богатстве возможностей физической реальности. Кроме этого, естественно исследовать, при каких условиях, как и когда обнаруженные математические возможности могут быть реализованы в эксперименте. По сути дела, речь идет о нахождении новых средств контроля над физическими ситуациями в микромире и управления ими.

Проанализируем произведение реперов, относящихся к сектору B элементов факторгруппы канонической мономиальной группы, принимая большее число произведений. Получим таблицу вида

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \xi \overset{k}{\times} \eta(4) & i_b & j_b & k_b & l_b \\ \hline i_b & i_b & i_b & i_b & i_b \\ j_b & j_b & j_b & j_b & j_b \\ k_b & k_b & k_b & k_b & k_b \\ l_b & l_b & l_b & l_b & l_b \end{array} \right).$$

Проанализируем произведение реперов, относящихся к сектору B элементов факторгруппы канонической мономиальной группы, принимая большее число произведений.

Проиллюстрируем произведение примеров в сокращенной записи. Тогда, например, получим

$$j_b \overset{k}{\times} l_b(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{0\ 0\ 0\ 1 \mid 1\ 0\ 0\ 0 \mid 0\ 1\ 0\ 0 \mid 0\ 0\ 1\ 0}{0\ 0\ 0\ 1 \mid 1\ 0\ 0\ 0 \mid 0\ 1\ 0\ 0 \mid 0\ 0\ 1\ 0} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} l_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = j \overset{k}{\times} l_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} l_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ldots$$

Из проведенного анализа следует, что произведение реперов ξ на реперы η_b будет порождать семейство реперов группы B.

Перемножим комбинаторно матрицы сектора F, принадлежащие полочке факторгруппы в группе канонических мономиальных матриц. Матрицы имеют вид

$$i_f=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, j_f=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, k_f=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}, l_f=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Таблица произведений такова:

$$\left(\begin{array}{c|cccc}\xi_f\overset{k}{\times}\eta_f(4) & i_f & j_f & k_f & l_f\\ \hline i_f & i_f & i_f & i_f & i_f\\ j_f & j_f & j_f & j_f & j_f\\ k_f & k_f & k_f & k_f & k_f\\ l_f & l_f & l_f & l_f & l_f\end{array}\right), i_f\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, j_f\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}...$$

Она аналогична таблице приведенной выше таблице, полученной для реперов без индексов.

Таблица матричных произведений ассоциирована с мономиальными матрицами, соответствующие гравитационным предзарядам. Таблица комбинаторных произведений ассоциирована с идеалами, соответствующими электрическим предзарядам.

Аналогичная ситуация имела место в пространстве с меньшей размерностью.

Рассмотрим пару реперов в форме левых и правых идеалов. Пусть

$$i_a=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}, j_a=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, k_a=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, l_a=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$${}_ai=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, {}_aj=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, {}_ak=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}, {}_al=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Таблица первого комбинаторного произведения (строка на столбец) выглядит так:

$$\left(\begin{array}{c|cccc}\overset{k}{\times} & {}_ai & {}_aj & {}_ak & {}_al\\ \hline i_a & i_a & l_a & k_a & j_a\\ j_a & j_a & i_a & l_a & k_a\\ k_a & k_a & j_a & i_a & l_a\\ l_a & l_a & k_a & j_a & i_a\end{array}\right).$$

Получено *качественно новое расположение* элементов в таблице произведений. Оно соответствует смешению схем расположения элементов пары базовых реперов. Два элемента относятся к реперам группы A, два других элемента относятся к реперам факторгруппы B.

При втором комбинаторном произведении (столбец на строку) получим аналогичную таблицу с изменением индексов реперов:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \overset{k}{\times} & i_a & j_a & k_a & l_a \\ \hline {}_a i & {}_a i & {}_a l & {}_a k & {}_a j \\ {}_a j & {}_a j & {}_a i & {}_a l & {}_a k \\ {}_a k & {}_a k & {}_a j & {}_a i & {}_a l \\ {}_a l & {}_a l & {}_a k & {}_a j & {}_a i \end{array}\right).$$

Аспекты самоорганизации реперов, ассоциированные с их структурой

С симметрийной точки зрения было бы желательно найти группу реперов, достаточную для алгебраического конструирования элементов матричной алгебры. Действительно, в этом случае, поскольку физические модели могут быть записаны в матричном виде, мы получаем единую форму моделей в виде группового модуля.

Покажем, что решение этой проблемы в четырехмерном пространстве мы можем выразить посредством применения к единичной матрице операций перестановки, а также действия знаковой группы.

Рассмотрим изменение единичной матрицы под влиянием одной перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \to\\ \leftarrow\\ \to\\ \to \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \to\\ \leftarrow\\ \to\\ \to \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \to\\ \leftarrow\\ \to\\ \to \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Последовательно изменим эти элементы посредством знаковой группы. Получим

$$\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}..$$

Этих матриц достаточно, чтобы посредством сложения и вычитания получить элементы матричной алгебры. Поскольку это так, ***операции перестановки*** *и* ***операции знакового умножения*** *можно рассматривать как* ***пару*** *базовых элементов самоорганизации.*

Перестановки, с физической точки зрения, означают формирование отношений между свободными объектами. Знаковая трансформация соответствует выбору ориентации отношений, что соответствует либо самооценке, либо оценке объекта, с которым строятся отношения. Здесь есть всего четыре варианта знаковых отношений в паре объектов: $(+,+),(+,-),(-,+),(-,-)$. Следовательно, природа реализует все возможности по выбору знаков в канонических отношениях.

Перестановки, с физической точки зрения, означают формирование отношений между свободными объектами. Покажем, что перестановки также подчиняются правилу использования всех возможностей.

Заметим, что вся каноническая мономиальная группа получается из начальных элементов, которые следуют из единичной группы. Зафиксируем первый элемент по диагонали. Выполним перестановки оставшихся трёх элементов. Получим три начальных элемента, дополнительно оставляя на месте один из этих трех элементов и учитывая условие мономиальности:

$$B_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},C_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},D_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Получим два других начальных элемента, переставляя для одной матрицы тройку указанных значимых элементов вправо на одну единицу, а для другой матрицы – на две единицы вправо. Тогда

$$E_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},F_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Оставшиеся канонические мономиальные матрицы получатся из них, если соответственно для пяти указанных матриц провести перестановки по правилам:

$$B_0\leftarrow\begin{pmatrix}\rightarrow\\\leftarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\end{pmatrix},C_0\leftarrow\begin{pmatrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\\\leftarrow\end{pmatrix},D_0\leftarrow\begin{pmatrix}\rightarrow\\\leftarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\end{pmatrix},E_0\leftarrow\begin{pmatrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\\\leftarrow\end{pmatrix},F_0\leftarrow\begin{pmatrix}\rightarrow\\\leftarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\end{pmatrix}.$$

Например, получим:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\leftarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\leftarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\leftarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ldots$$

Условие мономиальности матриц выступает как ***третье правило самоорганизации*** для реперов.

Покажем, что комбинаторное произведение указывает также черты распознавания реперов. Рассмотрим многократное комбинаторное произведение рассматриваемых матриц на себя или другие матрицы.

$$\xi\overset{k}{\times}\eta(4)=\xi\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

$$\xi\overset{k}{\times}\xi(4)=\xi\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Данное рассмотрение проявляет глубинную сущность комбинаторной операции. Она позволяет объекту «сохранить себя» при многократных воздействиях, как со стороны других объектов, так и при воздействии на себя. При этом объект имеет несколько разных форм, которые способны превратиться в исследуемый объект за меньшее число шагов.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}^{4a}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}^{3a}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}^{2a}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}^{1a}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Морфологически ситуацию можно записать так: группа, идеал, предгруппа, предидеал, группа. Чем ближе элемент к последнему слову, тем меньше нужно комбинаторных произведений для получения этого слова.

Посмотрим на ситуацию с другой стороны. Расчет показывает справедливость формулы

$$\xi\overset{k}{\times}\eta^{4(k)}=(-1)^{\varphi(\xi,\eta)}\xi,$$

$$\varphi\left(\xi,\eta=\begin{cases}0,\xi=\eta,\\1,\xi\neq\eta.\end{cases}\right)$$

Скалярная функция $\varphi(\xi,\eta)$ выступает в роли **фактора распознавания** для реперов при их многократном произведении.

Комбинаторная операция обладает еще одной специфической чертой: она допускает **многовариантность преобразования**. Мы вправе производит произведение в четырех формах: строка на строку, строка на столбец, столбец на строку, столбец на столбец. Четыре варианта можно задать таблицей:

$$\left(\begin{array}{c|cc}\overset{k}{\times}&l&c\\\hline l&ll&lc\\c&cl&cc\end{array}\right).$$

Многовариантность проявляет себя, например, при рассмотрении возможностей получения левых идеалов на основе матричного и комбинаторного произведений мономиальных матриц.

Действительно, рассмотрим ситуацию с позиции матричного и комбинаторного произведений.

При матричном произведении получим, в качестве примера, следующие соответствия: идеал (предзаряд q) порождается из квадратов трех предидеалов q^* (предпредзарядов), произведение которых порождает шесть идемпотентов $\left(I\vec{p}, I\overleftarrow{p}\right)$. Так, получим

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=q\Rightarrow\left\{a=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},(a,b,c)\Leftrightarrow q^*\right\},$$

$$I\vec{p}\Rightarrow ab=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},ac=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},bc=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$I\overleftarrow{p}\Rightarrow ba=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},ca=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},cb=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Каждый предпредзаряд комбинаторно порождает пару идемпотентов. Они получаются при неизменном положении значимых элементов предпредзаряда, соответствующих положению значимых элементов предзаряда при одинаковой перестановке на одно или два места других значимых элементов предпредзаряда. Этот алгоритм позволяет найти идемпотенты, не используя произведения матриц. Такой алгоритм кажется предпочтительным с физической точки зрения, он показывает, как один объект можно превратить в другой помимо операции произведения. Перестановка элементов (изменение отношений) выступает в роли физической реализации взаимодействия.

Предпредзаряды получаются из предзаряда посредством сохранения мест паре разных элементов в предзаряде (демократия перестановок) с одинаковым перемещением пары оставшихся значимых элементов. При всей совокупности парных перестановок получим также все идемпотенты.

Преобразования по закону подчинения перестановкам (фактически речь идет о перемене отношений) удобны с физической точки зрения, хотя кажутся очень простыми с математических позиций.

Произведения будут подчинены таблицам:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc}\times & qq^* & q^*q & qI\vec{p} & I\vec{p}q & qI\overleftarrow{p} & I\overleftarrow{p}q\\ \hline q & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc}\times & q & q^* & I\vec{p} & I\overleftarrow{p}\\ \hline q^*q^* & 3 & 0 & 3 & 3\\ q^*I\vec{p} & 3 & 3 & 2 & 1\\ q^*I\overleftarrow{p} & 4 & 2 & 1 & 2\end{array}\right),\left(\begin{array}{c|cccc}\times & q & q^* & I\vec{p} & I\overleftarrow{p}\\ \hline I\vec{p}q^* & 3 & 3 & 2 & 1\\ I\vec{p}I\vec{p} & 1 & 1 & 7 & 0\\ I\vec{p}I\overleftarrow{p} & 4 & 2 & 2 & 1\end{array}\right),\left(\begin{array}{c|cccc}\times & q & q^* & I\vec{p} & I\overleftarrow{p}\\ \hline I\overleftarrow{p}q^* & 3 & 3 & 1 & 2\\ I\overleftarrow{p}I\vec{p} & 6 & 1 & 2 & 0\\ I\overleftarrow{p}I\overleftarrow{p} & 1 & 1 & 0 & 7\end{array}\right).$$

Указанная система матриц образует **полугруппу с идемпотентами**. С физической точки зрения предпредзаряды порождают предзаряд, а также систему идемпотентов, в соединении с которыми они порождают новые предзаряды. Физика базируется на системе, состоящей из элементов трех типов. Количество предпредзарядов тоже равно трем, количество идемпотентов кратно трем. Общее количество элементов равно десяти. Эти числа могут быть не случайно связанными с теми закономерностями, которые присущи физическим объектам в форме кварков, кодонов и т.п.

Рассмотрим другие идеалы.

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$ab=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, ac=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, bc=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$ba=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}, ca=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, cb=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

К идемпотентам первого ряда добавились четыре идемпотента второго ряда.

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$ab=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, ac=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, bc=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$ba=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, ca=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, cb=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

К известным идемпотентам добавился один новый элемент.

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow a=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$ab=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}, ac=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}, bc=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$ba=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, ca=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, cb=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

В этих произведениях новых идемпотентов нет. Характеристический полином для всех идемпотентов идентичен:

$$Y=\lambda^2(1-\lambda)^2, \lambda_{1,2}=0, \lambda_{3,4}=1.$$

Возможны предидемпотенты. Например, получим

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ldots$$

Характеристический полином для предидемпотента таков:

$$Y=\lambda^2(\lambda^2-1), \lambda_{1,2}=0, \lambda_3=-1, \lambda_4=1.$$

Характеристический полином для идеала такой:

$$Y=\lambda^3(\lambda-1), \lambda_{1,2,3}=0, \lambda_4=1.$$

Предпредидемпотент имеет, в частности, выражение через предпредзаряд и элемент, квадрат которого равен нулю, который можно назвать преднулем. Так, получим

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Характеристический полином преднуля есть

$$Y=\lambda^3(\lambda-1), \lambda_{1,2,3}=0, \lambda_4=1.$$

Произведение разных идемпотентов может породить новый идемпотент (пара объектов, имеющих энергию связи, превращается в совокупность свободных объектов):

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Характеристический полином для первого идемпотента есть

$$Y=\lambda^2(\lambda^2-1), \lambda_{1,2}=0, \lambda_3=-1, \lambda_4=1.$$

Для диагонального идемпотента с одним ненулевым элементом получим характеристический полином

$$Y=\lambda^3(\lambda-1), \lambda_{1,2,3}=0, \lambda_4=1.$$

Для полного диагонального идемпотента получим характеристический полином вида

$$Y=(\lambda-1)^4, \lambda_{1,2,3,4}=1.$$

Общее количество идемпотентов для левых идеалов равно 11, предпредзарядов – 12, предзарядов – 4.

Правые идеалы устроены аналогично левым идеалам. Предпредзаряды, равно как и идемпотенты, получаются транспонированием матриц, полученных из анализа левых идеалов. Так, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \ldots$$

Идемпотенты второго рода для правого идеала совпадут с транспонированными идемпотентами второго рода для левых идеалов.

Общее количество идемпотентов для правых идеалов равно 11, предпредзарядов – 12, предзарядов – 4.

Следовательно, существует возможность соединения идемпотента с транспонированным его двойником, при котором разрушаются связи у каждого идемпотента.

Фактически речь идет о математическом выражении **одного из способов получения энергии:** ***через взаимодействие идемпотентов с транспонированным его двойником.***

Единичная матрица не меняется при транспонировании. Другие матрицы с таким свойством получаются из нее применением операций перестановки элементов.

Матрицы-реперы в графическом представлении дают физическую картину изменений, которые происходят, когда четыре объекта в форме микроизделия взаимодействуют с другим микроизделием, составленным из четырех объектов.

Для этого достаточно последовательно рассмотреть изменения отношений в «первой» матрице при предположении, что вторая матрица, передавая свою картину связей, освобождает объекты от связей, превращается в единичную матрицу (с математической точки зрения).

Рассмотрим с этих позиций превращение предпредзарядов в предзаряд. Например, получим в матричном виде выражения вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Представив эти матрицы графически, мы получаем морфологическое описание этой ситуации. Первый объект (согласно первой матрице) влияет на третий, третий во второй матрице влиял на четвёртый. Общая суперпозиция влияний состоит в том, что третий объект стал влиять на четвертый, а объект из второй матрицы влияет только на себя. Аналогично рассматриваются другие строки. Четвертый объект влиял на себя согласно записи в первой матрице, закон во второй матрице это отношение не изменил. Оба объекта после «взаимодействия» влияют только на себя.

Такое морфологическое описание легко выполнить в простом случае. Однако его сложно реализовать для произвольных матриц.

Принять новый алгоритм взаимодействия для физических объектов можно лишь с принятием ряда фундаментальных предположений:

- объект «осознает» свои отношения,
- объект может менять отношения,
- объект способен в точности выполнять «чужие» команды,
- объект способен сохранять полученные отношения.

Такое поведение присуще, с обычной точки зрения, только «разумным» объектам. Мы пытаемся разобраться с взаимодействием конечных систем любого уровня материи. Принимая указанные фундаментальные предположения, мы принимаем «разумность» объектов каждого уровня материи.

Понятно, что реальное воплощение такого поведения может быть выражено разными конструкторскими разработками. Они будут разными для разных уровней материи, но у них может быть, в частности, указанная общность свойств. Конечно, это только предположение, достоверность которого подлежит проверке. Однако проще принять систему предположений о разумности объектов, чем принять точку зрения, что они проводят компьютерные вычисления при взаимодействии. Хотя и эту возможность исключать нельзя. Люди проводят такие расчеты. Почему же физическая реальность не может делать это аналогичными или более совершенными способами.

Ситуация становится еще более интересной при принятии предположения, что объекты могут «учиться» взаимодействию. Тогда комбинаторные операции, во всей их совокупности, могут быть ассоциированы с выбором операций объектами. Объекты, представляемые матрицами, способны подчинить себя той или другой совокупности операций. Эти операции будут проявлять себя в соответствии с некоторым алгоритмом внешней команды или внутреннего выбора.

В представляемом случае ситуация становится живой и интересной. Сложность её не должна нас пугать потому, что с разумным миром можно договориться, если вести себя гармонично с ним.

В решении глубинных проблем практики агрессия и напор могут быть не просто неэффективны, а очень опасны. Если мы до сих пор живы в форме Человечества, значит, Реальность считает, что мы ещё не так глупы и не так агрессивны. В противном случае у Реальности есть много средств подкорректировать наше неразумное или опасное поведение.

При комбинаторном произведении указанных матриц можно получить правые идеалы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{cl}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ситуация меняется при использовании комбинаторной операции. Идеалы получаются по простому алгоритму из мономиальных матриц.

Матрицы со значимым первым столбцом получаются на основе комбинаторного произведения матрицы на транспонированную матрицу. По этой причине роль предпредзарядов будут выполнять элементы группы A, а также элементы групп B, C, D, не меняющиеся при транспонировании. Получим семь матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы со вторым значимым столбцом получаются при комбинаторном произведении мономиальной матрицы на матрицы, значимые элементы которой сдвинуты на единицу назад. Так, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{cc}{\times}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первое комбинаторное произведение выполнено умножением строки на столбец, а второе комбинаторное произведение задано умножением столбца на столбец. В обоих случаях электрические предзаряды «рождаются» из гравитационных.

Следствие 1. Гравитационные предзаряды при взаимодействии, базирующемся на комбинаторном произведении, порождают электрические предзаряды.

Матрицы с третьим значимым столбцом получаются при умножении мономиальной матрицы на матрицу, полученную из нее после сдвига значимых элементов вправо на две единицы или влево на две единицы.

Матрицы с четвертым значимым столбцом получаются при комбинаторном произведении мономиальной матрицы на матрицы, значимые элементы которой сдвинуты на единицу вперед.

Анализ, проведенный ранее, показал, что при матричном произведении мономиальных матриц мы получаем мономиальные матрицы. Нами принята физическая интерпретация таких матриц как математических объектов, выражающих свойства гравитационных предзарядов.

Следствие 2. Гравитационные предзаряды при взаимодействии, базирующемся на матричном произведении (ассоциативном произведении первого рода), порождают гравитационные предзаряды.

В силу предполагаемого единства электрических и гравитационных предзарядов мы вправе искать математические операции, посредством которых электрические предзаряды превращаются в гравитационные или же в другие электрические предзаряды.

На эту роль естественно претендуют перестановки, согласованные со структурой электрических предзарядов. Их можно рассматривать как самостоятельные операции, располагая элементы значимой строки или столбца в соответствии с дополнительными условиями, ассоциированными с парой используемых матриц.

А-операцию определим условием формирования значимого столбца или строки *по сумме мест* (по модулю размерности матриц) в использованных матрицах: 1+1=2,1+2=3, 1+3=4, 2+1=3, 2+2=4...

Например, получим для произведения столбцов выражения вида

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\underset{A}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\underset{A}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ldots$$

Аналогично будут заданы А-произведения строк;

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{A}{\times}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{A}{\times}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ldots$$

Произведения строк на столбцы и столбцов на строки можно задать аналогично, порождая в качестве итога новый объект с формой, дублирующей первую матрицу:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{A}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\underset{A}{\times}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ldots$$

Согласно принятым правилам, произведение будет для одних матриц коммутативно, а для других матриц оно будет некоммутативно. Однако это произведение ассоциативно. В силу указанных обстоятельств рассматриваемую А-операцию можно назвать *матричной операцией второго рода.* Она порождает электрические предзаряды из электрических предзарядов.

Следствие 3. Электрические предзаряды при взаимодействии, базирующемся на ассоциативном произведении второго рода, порождают электрические предзаряды.

В-операцию (комбинаторную операцию второго рода) определим условием формирования элементов новой матрицы по таблице перестановок значимых элементов, используя пару номеров перестановки (a,b), равных местам в используемых строках или столбцах. Если электрические предзаряды имеют разные типы, действия проводятся аналогично, основываясь на комбинаторном изменении первой матрицы. Зададим таблицу перестановок. Пусть перестановки первой матрицы произведения выполняются **по первичному закону**, согласованному с положением значимых элементов в ней. Примем первичный закон соответствия:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Он преобразует матрицу, представляющую электрический предзаряд, в матрицу, представляющую гравитационный предзаряд. Если заполнены два или более столбцов, перестановки элементов выполняются последовательно в согласии с положением значимых элементов. При заполнении всех столбцов таких перестановок будет четыре.

Однако до сих пор не учтено влияние второй матрицы в произведении. Примем **вторичный закон** соответствия:

$$1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \to \\ \leftarrow \\ \to \\ \leftarrow \end{pmatrix}, 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \leftarrow \\ \to \\ \leftarrow \\ \to \end{pmatrix}, 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} \to \\ \to \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}, 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} \to \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \to \end{pmatrix}.$$

Он задает правила перестановки элементов в матрице, полученной после системы первичных операций в первой матрице. Они ассоциированы со свойствами второй матрицы. Наличие значимых элементов в одном столбце дает одну операцию, соответствующую номеру столбца. Наличие нескольких столбцов со значимыми числами дает несколько последовательных операций.

Назовем совокупность первичного и вторичного законов комбинаторики **комбинаторной операцией второго рода**.

Анализ матриц с заполненными строками проводится аналогично.

Рассмотрим конкретный пример. Так, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{B}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \to \\ \to \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{B}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \to \\ \leftarrow \\ \to \\ \leftarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ldots$$

Первый пример показывает матрицу, подчиненную по матричному произведению условию

$$(a \times a) \times a = a \times (a \times a) = a, a \times a \neq E.$$

Эта матрица при комбинаторном произведении строки на строку порождают матрицу электрического предзаряда.

Второй пример показывает матрицу, подчиненную при матричном произведении свойству

$$(a \times a) \times a = a \times (a \times a) = a, a \times a = E.$$

Эта матрица при комбинаторном произведении строки на строку порождают матрицу электрического предзаряда.

Рассмотрим тройные произведения. Получим, например, выражения вида

$$\left(a \underset{B}{\times} b\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{B}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \to \\ \to \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c\underset{B}{\times}\left(a\underset{B}{\times}b\right)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\underset{B}{\times}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\leftarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\\\rightarrow\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\\\leftarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\left(c\underset{B}{\times}a\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\underset{B}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\leftarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\left(c\underset{B}{\times}a\right)\underset{B}{\times}b=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\underset{B}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\rightarrow3\\1\rightarrow2\\4\rightarrow3\\3\rightarrow2\end{pmatrix}_f=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\\\leftarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, рассматриваемая комбинаторная операция второго рода неассоциативна:

$$c\underset{B}{\times}\left(a\underset{B}{\times}b\right)\neq\left(c\underset{B}{\times}a\right)\underset{B}{\times}b.$$

Рассмотрим свойства мономиальных матриц, используя другие многократные произведения.

Группа мономиальных матриц, образующая базис для матричной группы, подчинена свойствам:

$$\overset{k}{\times}\Rightarrow\xi^2\eta^2-\eta^2\xi^2=0,$$

$$\overset{k}{\times}\Rightarrow\xi^3\eta^3-\eta^3\xi^3=0.$$

Аналогичный вариант для квадратов получается для матричного произведения:

$$\times\Rightarrow\xi^2\eta^2-\eta^2\xi^2=0.$$

Рассмотрим свойства группы и «полочек факторгруппы», используя многократное комбинаторное произведение. Получим таблицу свойств:

$$a^{2k}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},a^{3k}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$d^{2k}(1)=d^{2k}(2)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},d^{4k}(3)=d^{4k}(4)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},d^{5k}(\xi)=d(\xi),$$

$$b^{2k}(1)=b^{2k}(3)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},b^{2k}(2)=b^{2k}(4)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},b^{5k}(\xi)=b(\xi),$$

$$c^{2k}(1)=c^{2k}(4)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},c^{4k}(2)=c^{4k}(3)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},c^{5k}(\xi)=c(\xi),$$

$$e^{5k}=e, f^{5k}=f.$$

Мы получаем разную совокупность идеалов. Это обстоятельство можно использовать как инструмент для классификации элементов факторгруппы. Среди них есть «полочки», которые идеалов не порождают. Разные «полочки» *по своим свойствам самоорганизации* дополняют друг друга.

Известно, что любая физическая модель может быть записана в матричном виде. Для этого потребуются элементы матричной алгебры, представляющие собой значимый элемент в виде единицы, расположенные на пересечении каждого столбца и каждой строки. Математические возможности для построения таких элементов нам известны.

С одной стороны, мы можем матрично умножить канонические левый и правый идеалы друг на друга. Например, получим

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ldots$$

С физической точки зрения этот *мультипликативный вариант* соответствует *«электрическому» рождению* матричных элементов. Электрические предзаряды выступают в роли носителей физической информации.

С другой стороны, мы можем аддитивно выразить элементы матричной алгебры через элементы проективной унимодулярной группы. Так, получим, например

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\right\},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left\{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

С физической точки зрения этот *аддитивный вариант* соответствует *«гравитационному» рождению* матричных элементов. Гравитационные предзаряды выступают в роли носителей физической информации.

В силу указанных обстоятельств *наличие гравитационных и электрических предзарядов можно рассматривать как условий, достаточных для математического и физического моделирования структурных объектов.*

Мономиальные объекты для математиков, равно как и физические объекты, ассоциированные с ними, выступают в роли базовых элементов для физической теории и для физической практики.

Вывод: Самоорганизация реперов по свойствам их комбинаторных произведений имеет систему свойств:

- подчиненность комбинаторике (комбинаторность),
- подчиненность знаковой группе (знаковость),
- мономиальность базовых элементов (мономиальность),
- наличие факторов распознавания (распознаваемость),
- многовариантность преобразований (многовариантность),
- дополнительность свойств (полнота через дополнительность),
- достаточность электрических и гравитационных реперов (достаточность).

Дополнительность матричной и комбинаторной операций

Стандартное матричное произведение можно рассматривать как вариант комбинаторного произведения. Действительно, запишем его иначе:

$$A\times B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{matrix}\underline{a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13}}\\b_{11}\quad b_{21}\quad b_{31}\\b_{12}\quad b_{22}\quad b_{32}\\b_{13}\quad b_{23}\quad b_{33}\end{matrix}+\begin{matrix}\underline{a_{21}\quad a_{22}\quad a_{23}}\\b_{11}\quad b_{21}\quad b_{31}\\b_{12}\quad b_{22}\quad b_{32}\\b_{13}\quad b_{23}\quad b_{33}\end{matrix}+\begin{matrix}\underline{a_{31}\quad a_{32}\quad a_{33}}\\b_{11}\quad b_{21}\quad b_{31}\\b_{12}\quad b_{22}\quad b_{32}\\b_{13}\quad b_{23}\quad b_{33}\end{matrix}.$$

При построении матрицы заполнения вместо циклического изменения компонент одного столбца используются построчно все остальные столбцы второй матрицы. На этом этапе ясно, что возможна «смесь» произведений. Например, матрицу заполнения можно построить по паре столбцов второй матрицы, а третью строку заполнить на основе циклической перестановки элементов любого из использованных столбцов. Трансфинитность операций произведения получает так дополнительные аргументы.

Комбинаторную операцию можно выразить на основе матричной операции. Действительно, рассмотрим

$$A\underset{lc}{\overset{k}{\times}}B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{matrix}\underline{a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13}}\\b_{11}\quad b_{21}\quad b_{31}\\b_{31}\quad b_{11}\quad b_{21}\\b_{21}\quad b_{31}\quad b_{11}\end{matrix}+\begin{matrix}\underline{a_{21}\quad a_{22}\quad a_{23}}\\b_{12}\quad b_{22}\quad b_{32}\\b_{32}\quad b_{12}\quad b_{22}\\b_{22}\quad b_{32}\quad b_{12}\end{matrix}+\begin{matrix}\underline{a_{31}\quad a_{32}\quad a_{33}}\\b_{13}\quad b_{23}\quad b_{33}\\b_{33}\quad b_{13}\quad b_{23}\\b_{23}\quad b_{33}\quad b_{13}\end{matrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_{11}&b_{31}&b_{21}\\b_{21}&b_{11}&b_{31}\\b_{31}&b_{21}&b_{11}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_{12}&b_{32}&b_{22}\\b_{22}&b_{12}&b_{32}\\b_{32}&b_{22}&b_{12}\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_{13}&b_{33}&b_{23}\\b_{23}&b_{13}&b_{33}\\b_{33}&b_{23}&b_{13}\end{pmatrix}=\sum A(i)\times\beta(i).$$

Естественно сравнить действие разных операций между собой. Это позволит получить некоторые математические ориентиры для классификации операций. С другой стороны, могут наметиться контуры физического применения разных операций при моделировании изделий и их взаимодействий.

Задача. Показать, что матричная операция сохраняет тип предзарядов.

Решение А. Рассмотрим произведение матриц, сопоставляемых гравитационным предзарядам. Пусть, например

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричное умножение «сохраняет» гравитационные предзаряды.

Решение Б. Рассмотрим произведение матриц, сопоставляемых гравитационным и электрическим предзарядам. Пусть, например

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричное умножение «сохраняет» не только гравитационные, но и электрические предзаряды.

Задача. Показать, что электрический предзаряд можно получить посредством комбинаторного произведения матриц, соответствующих гравитационному предзаряду.

Решение. Получим матрицы, задающие графическое представление для электрических предзарядов, посредством комбинаторного произведения матриц, используемых для гравитационного предзаряда. Например, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c:c:c:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} + \begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим другой случай циклического комбинаторного произведения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c:c:c:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}, \begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}, \begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Циклическое комбинаторное умножение коммутативно порождает левый идеал.

Покажем, что влияние электрического предзаряда на гравитационный предзаряд меняет отношения между элементами, оставляя тип предзаряда. Так

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача. Показать, что гравитационный предзаряд можно получить посредством комбинаторного произведения матриц, соответствующих электрическому предзаряду.

Решение. Циклическая комбинаторная операция порождает гравитационный предзаряд из электрического. Так, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возникает предположение, что физика допускает систему операций, посредством которых описывается взаимодействие. То, что невозможно в рамках матричной операции, может быть естественным для операции комбинаторной.

Поскольку принято предположение, что электрические и гравитационные предзаряды образуют фундаментальную основу для всей физики, кажется очевидным, что матричная и циклическая комбинаторная операции образуют фундаментальную операционную основу для всей физики.

Заметим, что комбинаторное произведение матриц, соответствующих гравитационным предзарядам, способно задать **электрический предпредзаряд.** Так, например, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим другие варианты. Введем **двойную комбинаторную операцию**. Пусть вторая матрица на первом шаге изменится комбинаторно, а на втором шаге комбинаторно умножится. Получим, например

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{sk}{\times}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Мы рассмотрели произведение идеала на корень квадратный из другого идеала. В итоге получился корень квадратный из исходного идеала.

Рассмотрим взаимное комбинаторное произведение гравитационного предзаряда на электрический предзаряд:

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Задача 1. Выяснить, как влияет на электрические предзаряды матричное и комбинаторное воздействие и самовоздействие.

Решение. Рассмотрим произведения канонических идеалов. Матричное и комбинаторное умножение дают разные результаты, которые находятся в некоторой корреляции.

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

И матричное, и комбинаторное умножение дают элементы матричной алгебры. Комбинаторное произведение гравитационного и электрического предзарядов порождает другой идеал (правый), соответствующий другому знаку электрического предзаряда.

Рассмотрим произведения канонических идеалов. Матричное и комбинаторное умножение дают разные результаты, которые находятся в некоторой корреляции.

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

С одной стороны, элементы матричной алгебры получаются на основе произведения матричных идеалов. С физической точки зрения в её графическом выражении мы получаем произведение электрических предзарядов. С другой стороны, элементы матричной алгебры получаются на основе суммирования элементов проективной мономиальной группы.

Трансфинитность находит выражение уже на уровне элементов матричной алгебры.

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&01\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ldots$$

И матричное, и комбинаторное умножение не гарантируют сохранения электрических предзарядов. Самовоздействие для электрических предзарядов является операцией, сохраняющей тип заряда.

Ранее было введено графическое представление для матриц, посредством которого реализуется система отношений между базовыми объектами. Для представления гравитационного предзаряда удобно использовать матрицы вида

Задача. Выяснить, как влияет на гравитационные предзаряды матричное и комбинаторное самовоздействие.

Решение. Рассмотрим такую ситуацию на конкретном примере:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричное воздействие гравитационного предзаряда на себя приводит к освобождению структурных элементов, из которых состоит предзаряд. Комбинаторное воздействие гравитационного предзаряда на себя создаёт электрический предзаряд.

Они задают не только отношения между четырьмя объектами, но и правило их преобразования при воздействии на себя. В случае матричного произведения указанный результат свидетельствует об освобождении отношений между объектами, что выражается единичной матрицей.

Представим полученные результаты в виде таблиц:

$$\left(\begin{array}{c|cc} \times & g & q \\ \hline g & q & q \\ q & q & g \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} \overset{k}{\times} & g & q \\ \hline g & g & q \\ q & q & q \end{array}\right).$$

Неассоциативность операции перестановок

Будем теперь использовать перестановку элементов матрицы как самостоятельную операцию. Она может использоваться сама по себе, допуская коммутативность и ассоциативность. Она может использоваться как элемент многократной операции.

Рассмотрим простые примеры.

Пусть нам задана матрица размерности 4×4. Введем группу операций:

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Единица на строке означает перемещение элементов матрицы на одно место вправо, а минус единица задает их перемещение на одно место влево.

Будем рассматривать данную возможность как одну из реализаций самовоздействия, обусловленного наличием либо «своего плана», либо «внешних влияний».

Задача. Выяснить, как влияет операция перестановки на гравитационные предзаряды и предпредзаряды.

Решение. Применим перестановки к мономиальной матрице с единичными элементами на второстепенной диагонали:

$$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\beta(\alpha A)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\beta A=\beta\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\alpha(\beta A)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Решение 1а. Операции перестановки способны **коммутативно превратить гравитационный предзаряд в систему идемпотентов:**

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Решение 1б. В монографии «Новая физика света» показано, что перестановки способны превратить гравитационные предзаряды друг в друга (сектор А мономиальной группы), а также они действуют на гравитационные предзаряды (другие сектора мономиальной группы).

Задача. Выяснить, как влияет операция перестановки на электрические предзаряды.

Решение. Операция перестановки способна **коммутативно превратить электрический предзаряд в систему идемпотентов:**

$$\alpha Q=\alpha\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\beta(\alpha Q)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\beta Q=\beta\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\alpha(\beta Q)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Решение. Операция перестановки способна превратить идемпотент в электрический предзаряд, один электрический предзаряд в другой:

$$\beta^{-1}Id = \beta^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},,,$$

Идемпотенты, в отличие от гравитационных предзарядов, сохраняются как при матричном воздействии на себя, так и при взаимном матричном произведении. Следовательно, операции перестановки являются средством для превращения «ненадежных» (разобщенных, способных к разрушению) объектов в «надежные» (объединенные, способные к сохранению). Это сохранение условно.

Операция перестановки элементов матрицы коммутативна. Ею можно пользоваться как аддитивной группой, проводя вместо двух операций одну операцию сложения. В силу указанного обстоятельства выполняется также ассоциативность.

Рассмотрим комбинаторное и матричное произведение идемпотентов. Так, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матричное произведение идемпотентов сохраняет их, а комбинаторное произведение идемпотентов их разрушает.

Рассмотрим ассоциативность в данном случае, если полученные матрицы перемножаются матрично. В данном случае есть ассоциативность.

Если матрицы перемножаются комбинаторно, ассоциативность нарушается.

Ситуация становится более сложной, если комбинаторика реализуется не только по строкам, но и по столбцам.

Рассмотрим негрупповые перестановки элементов в канонических матрицах, образующих идеалы. Согласно указанным числам переставим элементы вправо. Получим, например, соответствия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{3} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{3} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{3} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{3} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{2} \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{2} \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{2} \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{2} \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{1}\\0\\3\\2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{1}\\0\\3\\2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{1}\\0\\3\\2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{1}\\0\\3\\2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{0}\\3\\2\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{0}\\3\\2\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{0}\\3\\2\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{0}\\3\\2\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Вывод: Негрупповая операция перестановок значимых элементов в канонической матрице, ассоциированной с электрическими предзарядами, порождает матрицы, ассоциированные с гравитационными предзарядами. Это соответствие взаимно. Кроме этого, порождается система электрических предпредзарядов.

Рассматривая проблему соотношения предзарядов с физической точки зрения, мы можем выделить несколько самостоятельных обстоятельств:

- ***неоднородность условий****, в которых находятся предзаряды*, стимулирующая изменение отношений в базовых элементах, формирующих предзаряд, выступает в роли фундаментального фактора преобразования предзарядов,
- *нет принципиального конструктивного различия у электрических и гравитационных предзарядов, как и в* ***возможном перестановочном взаимодействии как фундаментальном свойстве предзарядов,***
- уравнения для зарядов в принципе могут переходить в уравнения для предзарядов, если матрицы, используемые для зарядов корректно заменить на матрицы, используемые для предзарядов.

Неассоциативность перемен на операции перестановок

Заметим, что анализируемая операция «близка» к физической постановке задач о *самовоздействии физических объектов*. Если сопоставить плоскому физическому объекту матрицу, а самовоздействие на него проводить «с разных сторон», то результат самовоздействия будет разным. Допускается также **неассоциативность перемен** в том смысле, что различным будет результат при разной последовательности операций.

Покажем, что операция перестановки строк и столбцов, рассматриваемых как один элемент, также неассоциативна. Пусть есть три операции:

$$\alpha \Rightarrow (1 \leftrightarrow 3)_c, \beta \Rightarrow (2 \leftrightarrow 3)_l, \gamma \Rightarrow (2 \leftrightarrow 3)_c .$$

Пусть операции α, γ переставляют столбцы, а операция β пусть переставляет строки. Рассмотрим матрицу размерности 3×3. Рассмотрим вариант $(\alpha\beta)\gamma$:

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_3&a_2&a_1\\b_3&b_2&b_1\\c_3&c_2&c_1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_3&a_2&a_1\\c_3&c_2&c_1\\b_3&b_2&b_1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_3&a_1&a_2\\c_3&c_1&c_2\\b_3&b_1&b_2\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вариант $\alpha(\beta\gamma)$:

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\c_1&c_2&c_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_1&a_3&a_2\\c_1&c_3&c_2\\b_1&b_3&b_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_2&a_3&a_1\\c_2&c_3&c_1\\b_2&b_3&b_1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, как и в более сложном случае, рассмотренном ранее, получим, что

$$(\alpha\beta)\gamma \neq \alpha(\beta\gamma).$$

Рассмотрим вариант изменения матриц при нескольких перестановочных изменениях. Пусть заданы многосторонние перестановки матрицы: *слева, сверху, справа, снизу.*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underset{*}{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Покажем неассоциативность в системе операций двухсторонних операций:

$$\left(\alpha\left(\underset{*}{\beta}\right)\right)\gamma \neq \alpha\left(\left(\underset{*}{\beta}\right)\gamma\right)$$

Зададим

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\underset{*}{\beta} B = \begin{pmatrix} b_1 & d_2 & d_3 & b_4 \\ c_1 & a_2 & a_3 & c_4 \\ d_1 & b_2 & b_3 & d_4 \\ a_1 & c_2 & c_3 & a_4 \end{pmatrix}, \left(\alpha\left(\underset{*}{\beta B}\right)\right) = \begin{pmatrix} b_4 & b_1 & d_2 & d_3 \\ c_4 & c_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & d_4 & d_1 \\ c_2 & c_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}, \left(\alpha\left(\underset{*}{\beta B}\right)\right)\gamma = \begin{pmatrix} d_3 & b_4 & b_1 & d_2 \\ c_1 & a_2 & a_3 & c_4 \\ d_1 & b_2 & b_3 & d_4 \\ c_3 & a_4 & a_1 & c_2 \end{pmatrix} = \left(\alpha\left(\underset{*}{\beta}\right)\right)\gamma,$$

$$\gamma B = \begin{pmatrix} a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_1 \\ c_4 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 & d_4 & d_1 \end{pmatrix}, \left(\underset{*}{\beta}\right)(\gamma B) = \begin{pmatrix} b_2 & d_3 & d_4 & b_1 \\ c_4 & a_1 & a_2 & c_3 \\ d_2 & b_3 & b_4 & d_1 \\ a_4 & c_1 & c_2 & a_3 \end{pmatrix} = \alpha\left(\left(\underset{*}{\beta}\right)(\gamma B)\right) = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & d_3 & d_4 \\ c_3 & c_4 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_4 & d_1 & d_2 \\ c_1 & c_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \alpha\left(\left(\underset{*}{\beta}\right)\gamma\right).$$

Заметим, что неассоциативность в общем случае не исключает частной ассоциативности. Рассмотрим пример. Пусть роль матрицы B выполняет матрица с единицами, стоящими на второстепенной диагонали. Получим $\left(\alpha\left(\underset{*}{\beta}\right)\right)\gamma = \alpha\left(\left(\underset{*}{\beta}\right)\gamma\right)$. Действительно,

$$\underset{*}{\beta} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha\left(\underset{*}{\beta} B\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \left(\alpha\left(\underset{*}{\beta} B\right)\right)\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \underset{*}{\beta}(\gamma B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha\left(\underset{*}{\beta}(\gamma B)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неассоциативность операций в общем случае допускает ассоциативность в частном случае. Операция перестановки обладает богатыми свойствами.

Локальная самодеформация матриц

Определим её условием, когда независимо, в том числе в некоторой последовательности, меняются несколько элементов матрицы.

Покажем неассоциативность в системе операций: $\left(\alpha \underset{*}{\beta}\right)\gamma \neq \alpha\left(\underset{*}{\beta\gamma}\right)$. Зададим

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\underset{*}{\beta} B=\begin{pmatrix} b_1 & d_2 & d_3 & b_4 \\ c_1 & a_2 & a_3 & c_4 \\ d_1 & b_2 & b_3 & d_4 \\ a_1 & c_2 & c_3 & a_4 \end{pmatrix},\left(\alpha\left(\underset{*}{\beta B}\right)\right)=\begin{pmatrix} b_4 & b_1 & d_2 & d_3 \\ c_4 & c_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & d_4 & d_1 \\ c_2 & c_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix},\left(\alpha\left(\underset{*}{\beta B}\right)\right)\gamma=\begin{pmatrix} d_3 & b_4 & b_1 & d_2 \\ c_1 & a_2 & a_3 & c_4 \\ d_1 & b_2 & b_3 & d_4 \\ c_3 & a_4 & a_1 & c_2 \end{pmatrix}\Rightarrow\left(\alpha \underset{*}{\beta}\right)\gamma,$$

$$\gamma B=\begin{pmatrix} a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_1 \\ c_4 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 & d_4 & d_1 \end{pmatrix},\left(\underset{*}{\beta}\right)(\gamma B)=\begin{pmatrix} b_2 & d_3 & d_4 & b_1 \\ c_4 & a_1 & a_2 & c_3 \\ d_2 & b_3 & b_4 & d_1 \\ a_4 & c_1 & c_2 & a_3 \end{pmatrix}=\alpha\left(\left(\underset{*}{\beta}\right)(\gamma B)\right)=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & d_3 & d_4 \\ c_3 & c_4 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_4 & d_1 & d_2 \\ c_1 & c_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}\Rightarrow\alpha\left(\left(\underset{*}{\beta}\right)\gamma\right).$$

Заметим, что общая неассоциативность не исключает частную ассоциативность.

Пусть роль матрицы B выполняет матрица с единицами, стоящими на второстепенной диагонали. Получим $\left(\alpha \underset{*}{\beta}\right)\gamma \neq \alpha\left(\underset{*}{\beta\gamma}\right)$. Действительно,

$$\underset{*}{\beta} B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\alpha\left(\underset{*}{\beta} B\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\left(\alpha\left(\underset{*}{\beta} B\right)\right)\gamma=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\underset{*}{\beta}(\gamma B)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\alpha\left(\underset{*}{\beta}(\gamma B)\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неассоциативность операций в общем случае допускает ассоциативность в частном случае. Операция перестановки обладает богатыми свойствами.

Заметим, что анализируемая операция «близка» к физической постановке задач о взаимодействии физических объектов. Если матрице сопоставить плоский физический объект, а воздействие на него проводить «с разных сторон», то результат взаимодействия будет содержать много вариантов, допуская также и **неассоциативность перемен**.

Данные рассуждения пригодны для матриц меньшей размерности. Так, для матриц размерности 3×3, можно использовать группу перестановок вида

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Для матриц размерности 2×2, можно использовать группу перестановок вида

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$$

К операции перестановки элементов можно применить технику локальной деформации: изменить один или несколько элементов. Например, это может быть замена одной из единиц на двойку. Тогда к неассоциативности, обусловленной стандартной системой операций, образующих группу, добавится *система неассоциативностей*, ***индуцированных локальными деформациями***.

При произведениях матриц их *взаимная локальная деформация* способна быть как некоммутативной, так и неассоциативной.

Матричное или комбинаторное произведения, согласно практике физиков, применяются в моделях явлений и потому соответствуют неассоциативности поведения (активности). Самовоздействие соответствует неассоциативности структур.

Из начального анализа следует вывод, что **неассоциативность структур и активностей различны по своей сути и по форме**.

Неассоциативность делится на классы:

- *неассоциативность самовоздействия,*
- *неассоциативность взаимных влияний*.

Мы приходим к пониманию нового обстоятельства, что в математике, а, в силу принципа софистатности, и в реальности, есть *семейство неассоциативностей*.

Заметим, что изменение одного элемента в матрице может быть проявлением совокупности факторов в условиях вырождения параметров.

Рассмотрим с этой точки зрения метрику Лагранжа. Так, например, получим

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+(w-1)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=E+(w-1)\sigma.$$

Величина σ есть, в свою очередь, частное значение выражения

$$\tilde{\sigma}=\frac{1}{4}(\alpha E+\beta c+\gamma c_2+\delta c_3)\to(\alpha=w-1,\beta=1-w,\gamma=1-w,\delta=w-1)\to\sigma.$$

Локальная деформация, если она сочетается с нетривиальными перестановками элементов, может представлять собой сложный объект, хотя может выглядеть очень просто. Неассоциативность с локальной деформацией элементов можно рассматривать как ключевую задачу взаимодействия. В ней содержится шифр к решению сложных расчетных и конструкторских задач.

Вырождение объектов мономиального типа в идеал скорелировано с кратностью корней соответствующих характеристических полиномов. Действительно, рассмотрим характеристический полином для идеала со значимыми единицами в первом столбце. Получим соответствия вида

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0&0\\1&-\lambda&0&0\\1&0&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow Y=(\lambda-1)\lambda^3=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0.$$

Локальная деформация изменит характеристический полином. Так, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \beta & \gamma & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\lambda-1)\lambda(\alpha-\lambda)(\gamma-\lambda) \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=0, \lambda_3=\alpha, \lambda_4=\gamma.$$

Вырождение по параметрам может быть частично снято через изменение отношений, ассоциированных с самими объектами (через самовоздействие). Влияние других факторов, в данном случае выраженных через величины β,δ, в алгоритме может быть упущено. Другими словами, важно понимать учитывать все грани локальных деформаций, а также тех алгоритмов, посредством которых они проявляют себя. Если матрицы, указанные выше, используются в форме метрики, то все обстоятельства будут учтены в полной мере. Однако совсем не просто их подтвердить экспериментально.

Эти аспекты проблемы локальной деформации проявляют себя как в расчете, так и в проводимых экспериментах. В частности, мы должны понимать специфику измерения и измерительных устройств.

Складывается впечатление, что **ассоциативны лишь простейшие ситуации и структуры**. Сложные структуры и активности, скорее всего, подчинены неассоциативными законам. То обстоятельство, что неассоциативность слабо используется в моделях, может быть подтверждением факта, что на практике изучаются лишь простейшие структуры и активности.

Неассоциативность имеет аспект, обусловленный различием результатов применения системы комбинаторных операций.

Заметим, что разные операции задают величины, относящиеся к разным уровням иерархии в системе базовых объектов.

Рассмотрим разные произведения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{ll}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{cl}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{cc}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили соответственно идемпотент, предидемпотент, предпредидемпотент, идеал.

Применяя к тройке матриц разные комбинаторные операции, мы получим систему неассоциативностей. Понятно, что различие обусловлено, с физической точки зрения, тем обстоятельством, что комбинаторные операции формируют разные системы физических объектов, отличающиеся своим взаимодействием, а потому и вариантами неассоциативности.

Аспекты практического применения комбинаторных операций

Произведение матриц, равно как и другие аналогичные действия, в частности, многократное произведение, обычно не применяются при нахождении решений. По этой причине неассоциативность кажется свойством, незначительным для практики, удалённым от него.

В то же время трансфинитность комбинаторной операции кажется привлекательным средством для анализа трансфинитной реальности. Поэтому желательно найти приложения неассоциативности.

Вариант 1. Известно, что физические уравнения могут быть записаны в форме $G-$модуля. Их матричная форма меняется при умножении слева на матрицы. При этом может сохраняться векторный вид уравнений. При другом выборе деформирующих матриц он может меняться. Указанные действия производятся при неизменности операций, используемых для матричных произведений.

Ситуация меняется, если при произведении матриц с целью деформации уравнений модели используются комбинаторные операции. Из одной физической модели мы получаем совокупность моделей. Естественно, что комбинаторные операции, как ассоциативные, так и неассоциативные, способны изменить уравнения. Это изменение позволит получать *новые решения*, присущие деформированной исходной модели.

Кажется естественным, что новые решения могут быть комбинаторно связаны с известными решениями, которые получены в модели, свободной от операторной деформации.

Заметим, что при нелинейной деформации величин посредством показателя отношения в электродинамике мы получаем новые решения на основе известных, деформируя как скорость света в вакууме, так и вектор скорости, зависящий от скорости как первичного, так и вторичного источников.

Этот пример подсказывает нам, что комбинаторная деформация решений может быть многогранной, многоуровневой, реализуя принцип трансфинитности решений.

Другими словами, **комбинаторный алгоритм расширения физических моделей индуцирует трансфинитное комбинаторное расширение решений ряда физических задач.**

Заметим, что теоретическое решение, следующее из операторно деформированной модели, может не соответствовать показаниям приборов, используемых в эксперименте. Получается так потому, что экспериментальные средства ассоциированы с установившейся известной моделью. Они могут оказаться недостаточными для подтверждения предсказаний операторно деформированной модели.

Для операторно деформированной модели могут понадобиться сущностно деформированные измерительные устройства.

Вариант 2. Комбинаторная операция кажется принципиально отличной от матричной операции. Реальная ситуация сложнее. Комбинаторная операция имеет систему свойств:

- *Иерархичность*. При матричном умножении используется умножение каждой строки на каждый столбец при задании правила расположения элементов произведения. Матричное произведение «демократично». При комбинаторном произведении «демократизм» исчезает. Появляется «индексированная классовость»: строка умножается на соответствующий ей столбец. Фактически речь может идти о матричном умножении, модифицированном тензором Кронекера, в котором индексы задаются номерами строк и столбцов. Другими словами, однократная операция становится двукратной уже на начальном уровне.

- *Выделенность*. При этом столбцу придаются дополнительные свойства. Столбец рассматривается как-бы «с разных сторон». Есть некоторое дополнительное свойство, которое приписывается столбцу, превращая его в матрицу. Происходит расширение свойств отдельного объекта. Этот прием фактически означает функциональное изменение объекта, построенное по определенному правилу. Комбинаторная перестановка элементов является формой конкретного функционального изменения. Двукратная операция явно превращается в трёхкратную. Ситуация будет тем сложнее, чем сложнее данное функциональное правило.
- *Конструктивность.* Строка как отдельный объект «взаимодействует» со столбцом как с классом объектов, порожденных эти столбцом. Это «взаимодействие» задается новым правилом, порождая из строки и модифицированного столбца новую строку. По этой причине комбинаторное произведение следует отнести к классу четырёхкратных произведений (произведений ранга 4). Ситуация усложняется, если кроме однократных произведений элементов друг на друга будут использоваться неоднократные произведения.
- *Гибкость*. Ситуация может быть усложнена при изменении операции произведения для компонент и их последующего сложения, особенно в том случае, когда операции многократны или функциональны (задаются функциями).
- *Объемность*. Ситуация становится очень сложной, когда роль матриц в анализе занимают матриты -- объемные матрицы, плоские составляющие которых располагаются как по строкам, так и по столбцам.

Применение комбинаторных операций в физике

Новые операции, предложенные для числовых систем, задают спектр новых возможностей в математике. Естественно ожидать, что они найдут применение в физике. В этом случае будут обнаружены новые свойства физической реальности. Возможным станет построение новых алгоритмов моделирования физических явлений и изделий. Выполним начальный анализ приложений комбинаторных операций в физике.

Комбинаторные операции в структуре уравнений электродинамики

При записи уравнений электродинамики в спинорной форме матрицы расположены перед производными по координатам от спинорной функции. Вместо обычного матричного умножения используем **тривиальное комбинаторное умножение справа**. Реализуем его посредством последовательного умножения столбцов матриц на столбцы с производными от спинорных компонент.

Спинорная форма уравнений Фарадея-Ампера имеет вид:

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}E_x-iB_x\\E_y-iB_y\\E_z-iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+$$

$$+\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=0\,.$$

Комбинаторная форма уравнений Фарадея-Ампера получит вид:

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}$$

$$\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+$$

$$+\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\right\}\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}$$

$$\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}\begin{pmatrix}E_x-iB_x\\E_y-iB_y\\E_z-iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=0\,.$$

Вывод: Мы получаем ***одни и те же уравнения электродинамики***, *как при стандартном матричном умножении, так и при тривиальном комбинаторном умножении справа, если при таком умножении мы заменим волновые функции на сопряженные*. Тривиальная комбинаторная операция естественна в электродинамике. Этот факт интересен, во-первых, потому, что он длительное время оставался незамеченным, во-вторых, потому, что он показывает «близость» новой операции к стандартной матричной операции.

Ситуация кажется иной, если в матричных уравнениях *используется нетривиальная комбинаторная операция*.

Уравнения усложнятся настолько, насколько сложнее матричной будет комбинаторная операция. Мы получаем теперь в качестве нового теоретического инструмента начальный **алгоритм операционного расширения физических моделей.**

Он позволяет остаться в рамках стандартного метода решений полученных уравнений. Но допускается и более сложная ситуация, если искомые решения подчинены *«своей» комбинаторной операции*.

Гипотеза: Матричная операция с ее стандартными числовыми и функциональными средствами может быть дополнена комбинаторными операциям с системой новых возможностей.

Знаковая структура и деформация уравнений электродинамики

Покажем, что базовые математические величины, используемые в спинорных уравнениях электродинамики, согласованы с исследуемыми реперами числовых систем.

Рассмотрим совокупность перестановки знаков в мономиальных матрицах размерности 4×4.

Они образуют знаковую группу из четырёх элементов A, а также факторгруппу $\tilde{A}$ из четырёх элементов. Запишем их явно:

$$A \to \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \\ + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \\ + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix}.$$

Матрицы, представляющие кватернион для спинорной волновой функции вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следуют *из базового, группового репера* четырехмерного пространства при последовательном умножении их на знаковые матрицы, взятые по паре из знаковой группы и факторгруппы. Алгоритм выбора элементов такой: $A, \tilde{A}, A, \tilde{A}$.

Матрицы, представляющие кватернион для сопряженной спинорной волновой функции вида

$$+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следуют *из базового, группового репера* четырехмерного пространства при последовательном умножении их на знаковые матрицы, взятые дополнительно первому кватерниону по паре из знаковой группы и факторгруппы. Алгоритм выбора элементов другой: $A, \tilde{A}, \tilde{A}, A.$

Исходный четырехмерный репер преобразовался в пару кватернионов. При этом были «поделены» элементы знаковой группы и факторгруппы. Кроме этого, последовательность выбора элементов была разной.

Следовательно, при конструировании базовых математических элементов для физической модели числовые системы полезны и эффективны. Их моделирование неотделимо от «демократизма» по составу используемых элементов, а также полноты использования возможных вариантов.

Формально возможен другой выбор элементов знаковой матрицы. Тогда из стандартных уравнений электродинамики мы получаем уравнения электродинамики, деформированные знаковой группой и группой перестановок. Если физическая реальность следует **принципу реализации всех возможностей**, то новые модели имеют право на жизнь. Нужно только разобраться, в каких условиях это происходит, а также как это можно подтвердить на эксперименте. Поскольку деформация уравнений знаковой группой и факторгруппой может быть частичной (меняется только часть матриц), мы имеем алгоритм порождения совокупности систем уравнений, исходя из базовой системы.

Аспекты комбинаторного произведения в уравнениях электродинамики

Применим комбинаторную операцию к уравнениям электродинамики. Комбинаторно *умножим слева* матричные уравнения, представленные через мономиальные матрицы, на мономиальные матрицы, соответствующие мономиальной группе. Мы знаем, что в этом случае, если используется стандартная матричная операция, уравнения не меняются, меняется только последовательность их расположения.

Покажем, что комбинаторная операция задает новые свойства явлений или некоторых обстоятельств, ассоциированных с ними.

Комбинаторно умножим уравнения Фарадея-Ампера на матрицы, принадлежащие «полочке» канонической мономиальной группы. Выберем матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При комбинаторном произведении этих матриц на кватернионные матрицы уравнений Максвелла в порядке, согласованном с производными, получим левые идеалы. Обозначим их в соответствии со столбцом, в котором расположены значимые числа. Получим таблицу комбинаторных произведений указанной совокупности матриц с кватернионными матрицами.

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & \partial_x & \partial_y & \partial_z & \partial_t \\ \hline \alpha & 2 & 3 & 4 & 1 \\ \beta & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \gamma & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \delta & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right),$$

Проиллюстрируем изменения в уравнениях Фарадея-Ампера на примере матрицы α. Получим выражения вида

$$\left\{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}E_x-iB_x\\E_y-iB_y\\E_z-iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+$$

$$\left\{\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=0\,.$$

Компоненты, соответствующие идеалу с четвертой строкой, обращаются в ноль. Остальные слагаемые образуют систему уравнений:

$$-i\partial_x B_y+\partial_y E_z-\frac{1}{c}\partial_t B_x=0,\ \ -i\partial_x B_y-i\partial_y B_z-\frac{1}{c}\partial_t B_x=0,$$

$$\partial_x E_y-\partial_y E_z-\frac{1}{c}\partial_t B_x=0,\qquad i\partial_x B_y+i\partial_y B_z-\frac{1}{c}\partial_t B_x=0.$$

Из системы следует необычное поведение некоторого **скрытого поля**, ассоциированного с электромагнитным полем:

- компонента B_x не зависит от времени,
- другие компоненты выражаются зависимостями вида

$$E_z=E_y=E_0\exp\{i(k_z z-\omega t)\}B_z=B_y=B_0\exp\{i(k_z z-\omega t)\},$$

- компонента E_x может меняться независимо, она отсутствует в уравнениях.

В этом варианте допускается статическое состояние по координате x для «электрического» и «магнитного» полей, а также синхронное изменение - компонент полей $\vec{E},\vec{B}$. В частности, эти вектора могут быть расположены под любыми углами друг к другу.

Не исключено, что так может вести себя электромагнитное поле в каких-то физических условиях.

Не исключено, что так описывается некоторое «внутреннее» состояние электромагнитного поля, свойственное внутренней динамике световых частиц.

Не исключено, что речь идет о некоторой другой сущности, присоединенной к электромагнитному полю и «маскирующегося» под него в виде своеобразного «следа» или «тени».

Более точно ответить на эти вопросы позволит более полный анализ теоретических возможностей комбинаторного расширения физических моделей, а также эксперименты, индуцируемые проводимым расчетом.

Рассмотрим структуру уравнений электродинамики при изменении матриц по типу β. Получим уравнения вида

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Получим

$$-i\partial_x B_z - \partial_z E_x - \frac{1}{c}\partial_t B_y = 0,\;\; \partial_x E_z - i\partial_z B_x - \frac{1}{c}\partial_t B_y = 0,$$

$$-\partial_x E_z - i\partial_z B_x - \frac{1}{c}\partial_t B_y = 0,\;\; i\partial_x B_z + i\partial_z B_x - \frac{1}{c}\partial_t B_y = 0.$$

Они принципиально отличаются от предыдущей системы уравнений.

Рассмотрим структуру уравнений электродинамики при изменении матриц по типу γ. Получим уравнения вида $(4,1,2,3)$:

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+$$

$$+\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Получим систему уравнений вида

$$-i\partial_y B_x + \partial_z E_y - \frac{1}{c}\partial_t B_z = 0,\ \ -i\partial_z B_y - \partial_y E_x - \frac{1}{c}\partial_t B_z = 0,$$

$$\partial_y E_x - \partial_z E_y - \frac{1}{c}\partial_t B_z = 0, \qquad i\partial_y B_x + i\partial_z B_y - \frac{1}{c}\partial_t B_z = 0.$$

Она допускает, в частности, решение в виде характеристик объекта, имеющего зависимые от координат компоненты вектора $\vec{E},\vec{B}$. Они могут быть также зависимы от времени.

Рассмотрим структуру уравнений электродинамики при изменении матриц по типу δ. Получим уравнения вида $(1,2,3,4)$:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+$$

$$+\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_x+iB_x \\ E_y+iB_y \\ E_z+iB_z \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=0\,.$$

Получим систему уравнений вида

$$-i\partial_x B_x+\partial_y E_y-\partial_z E_z=0,\qquad \partial_x E_x-\partial_y E_y-i\partial_z B_z=0,$$

$$\partial_z E_z-\partial_x E_x-i\partial_y B_y=0,\qquad i\partial_x B_x+i\partial_y B_y+i\partial_z B_z=0.$$

Рассмотрим вариант комбинаторного умножения кватернионных матриц на матрицу, принадлежащую $E-$полочке канонической комбинаторной группы. Получим

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}\overset{k}{\times}\left\{\begin{pmatrix} 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&-1&0\\ 0&0&0&-1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&-1\\ -1&0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что новые матрицы получены из кватернионных в соответствии с циклическими свойствами используемой матрицы. Один элемент выделен дважды, а пара других берется по диагонали четырехугольника, в углах которого расположены числа от единицы до четырех.

Новые матрицы подчинены свойству: $a(i)a^T(i)=E$. Так, получим

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0&-1&0&0\\ 1&0&0&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Физическая интерпретация *данного соответствия* отличается от математической. Тот факт, что при произведении пары матриц получается только одна, понятен для математиков, так как при условии сохранения количества исходных объектов мы обязаны дополнительно ввести матричное умножение на единичную матрицу. Это обстоятельство физически интерпретируется как превращение пары матриц (пары объектов) в один объект и «фон», создаваемый системой независимых объектов.

Ситуация выглядит иначе при использовании комбинаторного произведения. Так, получим

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix} 0&-1&0&0\\ 1&0&0&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Физическая интерпретация *данного соответствия* иная*:* при комбинаторном взаимодействии указанных объектов получается объект, сопоставляемый электрическому предзаряду. Однако он определен *с точностью до электрического предзаряда* **второго типа.** Этот второй объект скрыт от анализа.

Вывод: **Разные операции обладают разными свойствами скрытности**.

Это свойство напоминает поведение людей. Психологические типы различны как раз по тому, что они склонны скрывать либо от себя, либо от посторонних людей.

Запишем уравнения Фарадея—Ампера через указанные матрицы. Получим

$$\left\{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}E_x-iB_x\\E_y-iB_y\\E_z-iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+$$

$$\left\{\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\right\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=0\,.$$

Векторный вид новой системы уравнений таков:

$$-i\partial_x B_y+\partial_y E_z-\frac{1}{c}\partial_t B_x=0,\qquad -\partial_x E_x+\partial_z E_z-\frac{1}{c}\partial_t B_x=0,$$

$$\partial_x E_z-i\partial_z B_x-\frac{1}{c}\partial_t B_x=0,\qquad -\partial_x E_y+i\partial_y B_x-\frac{1}{c}\partial_t B_x=0.$$

Рассмотрим частное решение данных уравнений. Пусть $\frac{1}{c}\partial_t B_x$=0. Тогда возможен вариант

$$B_x=B_z=B_0\exp(-ky),B_y=ikxaB_0\exp(-ky),$$

$$E_x=E_z=bE_0\exp(-ky),E_y=-ikxpE_0\exp(-ky).$$

При подстановке их в уравнения получаем условия вида

$$B_0=\frac{b}{a}E_0,\ p=\frac{b}{a}.$$

Электродинамика проявляет себя статическими действительными и комплексными величинами.

Вывод: Комбинаторная деформация уравнений электродинамики позволяет получить новые динамические уравнения. Их решения качественно отличаются от известных решений в электродинамике.

Гипотеза: Поскольку любая физическая модель может быть представлена в матричном виде, замена в ней матричного произведения на комбинаторное произведение позволяет получить новые свойства явлений и исследуемых изделий.

Комбинаторная структура величин в электродинамике

Применение комбинаторных операций при физическом моделировании неотделимо от формирования величин, используемых для вложения данных эксперимента. Покажем, что тензоры, используемые в теории электромагнитного поля, имеют комбинаторную форму. Они представляют собой распределение компонент исследуемых величин по реперам двух типов: ассоциированных как с гравитационными, так и с электрическими предзарядами.

Проанализируем с комбинаторной точки зрения тензор

$$F_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Представим тензор как объединение пар. Тогда получим соответствия вида

$$B_x\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_y\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_z\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$iE_x\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, iE_y\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, iE_z\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Величины представлены в виде суммы компонент, представляющих генераторы вращений в трехмерном пространстве и генераторов псевдовращений в четырехмерном пространстве.

Рассмотрим *второй вариант*. С комбинаторной точки зрения тензор состоит из четырех слагаемых:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} B_z \\ B_x \\ B_y \\ B_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & B_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_x & 0 \\ B_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_0 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} -B_y \\ -B_z \\ -B_x \\ -B_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -B_y & 0 \\ -B_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline iE_x & iE_y & iE_z & iE_0 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ iE_x & iE_y & iE_z & iE_0 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} -iE_x \\ -iE_y \\ -iE_z \\ -iE_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -iE_x \\ 0 & 0 & 0 & -iE_y \\ 0 & 0 & 0 & -iE_z \\ 0 & 0 & 0 & -iE_0 \end{pmatrix}.$$

Первая пара слагаемых принадлежит к типу мономиального расширения канонического трехмерного репера на четырехмерие. Их математическая структура соответствует типу гравитационных предзарядов. Вторая пара слагаемых принадлежит типу идеалов. Их математическая структура соответствует типу электрических предзарядов. Произведения матриц на столбцы и строку выполнены по Адамару.

Величины распределены своими компонентами по местам, указанным реперами. Их четвертые компоненты скомпенсированы и не проявляют себя в теории и в эксперименте.

Третий вариант представления тензора электромагнитного поля базируется на введенной паре кватернионов. Действительно, получим

$$F_{mn}=\frac{i}{2}\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\left(E_x-iB_x\right)+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\left(E_y-iB_y\right)+\right.$$

$$+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\left(E_z-iB_z\right)-\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\left(E_x+iB_x\right)-$$

$$\left.-\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\left(E_y+iB_y\right)-\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\left(E_z+iB_z\right)\right\}.$$

Вывод: Величины, используемые в электродинамике, согласованы со структурой реперов, используемых в моделях числовых систем.

Гипотеза: Каждая физическая модель базируется на величинах, которые согласованы с числовыми системами, используемыми в многообразии, в которое вкладываются экспериментальные данные.

Комбинаторное произведение для теории турбулентности и гравитации

В теории неоднородной турбулентности и в теории гравитации мы применяем моделирование симметричных тензоров. Для них используются самостоятельные уравнения. Их структура сложна и достаточно необычна с физической точки зрения. Для симметричного тензора

$$\varphi_{ij}=\begin{pmatrix}L_{11}&L_z&L_y&K_x\\L_z&L_{22}&L_x&K_y\\L_y&L_x&L_{33}&K_z\\K_x&K_y&K_z&L_{00}\end{pmatrix}.$$

предложены уравнения

$$\partial_0\left(\partial_z L_z-\partial_y L_y\right)-\partial_x\left(\partial_z K_y-\partial_y K_z\right)=0,$$
$$\partial_0\left(\partial_z L_{22}-\partial_y L_x\right)-\partial_y\left(\partial_z K_y-\partial_y K_z\right)=0,$$
$$\partial_0\left(\partial_z L_x-\partial_y L_{33}\right)-\partial_z\left(\partial_z K_y-\partial_y K_z\right)=0$$

$$\partial_0\left(\partial_z L_{11}-\partial_x L_y\right)-\partial_x\left(\partial_z K_x-\partial_x K_z\right)=0,$$
$$\partial_0\left(\partial_z L_z-\partial_x L_x\right)-\partial_y\left(\partial_z K_x-\partial_x K_z\right)=0,$$
$$\partial_0\left(\partial_z L_y-\partial_x L_{33}\right)-\partial_z\left(\partial_z K_x-\partial_x K_z\right)=0$$

$$\partial_0\left(\partial_y L_{11} - \partial_x L_z\right) - \partial_x\left(\partial_y K_x - \partial_x K_y\right) = 0,$$
$$\partial_0\left(\partial_y L_z - \partial_x L_{22}\right) - \partial_y\left(\partial_y K_x - \partial_x K_y\right) = 0,$$
$$\partial_0\left(\partial_y L_y - \partial_x L_x\right) - \partial_z\left(\partial_y K_x - \partial_x K_y\right) = 0$$

$$\partial_x \partial_y \partial_z L_{00} = \frac{1}{3}\Phi,$$
$$\Phi = \partial_0(\partial_x(\partial_y K_z + \partial_z K_y) + \partial_y(\partial_z K_x + \partial_x K_z) + \partial_z(\partial_y K_x + \partial_x K_y)) - \partial_0 \partial_0 div\vec{L}.$$

Они содержат в себе как вращения, так и пару нетривиальных псевдовращений.

Рассмотрим комбинаторное произведение 4-векторов, основанное на кватернионе. Пусть

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{b}{\times}} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c:c:c:c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \hline d_2 & c_2 & -b_2 & a_2 \\ -c_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 & d_2 & c_2 \\ -a_2 & -b_2 & -c_2 & d_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} \left(a_1 d_2 + d_1 a_2\right) + \left(b_1 c_2 - c_1 b_2\right) \\ \left(b_1 d_2 + d_1 b_2\right) + \left(-a_1 c_2 + c_1 a_2\right) \\ \left(c_1 d_2 + d_1 c_2\right) + \left(a_1 b_2 - b_1 a_2\right) \\ -\left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right) + \left(-c_1 c_2 + d_1 d_2\right) \end{pmatrix}.$$

Перепишем эти выражения в более удобном виде. Пусть

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ a_t \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{b}{\times}} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{array}{c:c:c:c} a_x & a_y & a_z & a_t \\ \hline b_t & b_z & -b_y & b_x \\ -b_z & b_t & b_x & b_y \\ b_y & -b_x & b_t & b_z \\ -b_x & -b_y & -b_z & b_t \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} \left(a_x b_t + a_t b_x\right) + \left(a_y b_z - a_z b_y\right) \\ \left(a_z b_x - a_x b_z\right) + \left(a_y b_t + a_t b_y\right) \\ \left(a_x b_y - a_y b_x\right) + \left(a_z b_t + a_t b_z\right) \\ -\left(a_x b_x + a_y b_y\right) + \left(a_t b_t - a_z b_z\right) \end{pmatrix}.$$

Группа размещения в данном случае задается кватернионом:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предлагаемое произведение некоммутативно, но ассоциативно.

Полученные выражения похожи на выражения для вихрей и псевдовихрей в теории неоднородной турбулентности и теории гравитации.

Вывод: Алгоритм комбинаторного умножения для 4-векторов, основанный на использовании кватернионов, показывает, что кроме трехмерного вектора вращений есть ещё трехмерный вектор псевдовращений, а также двумерный вектор сдвига. Эти обстоятельства следует использовать при анализе неоднородной турбулентности и явлений гравитации.

Гипотеза: Поскольку в качестве элементов заполнения, необходимых для построения комбинаторной операции, могут использоваться разные объекты, так можно учесть свойства разных изделий и их свойств. Комбинаторные операции позволяют изучить всю совокупность свойств, что позволит улучшить практическую деятельность.

Элементы трансфинитной механики материальной точки

Примем *алгоритм комбинаторного обобщения физических моделей*:

- заменим обычные величины на их реперный аналог, ассоциированный с количеством учитываемых уровней трансфинитной материи,
- заменим операторы на их реперный аналог, ассоциированный с количеством учитываемых уровней трансфинитной материи,
- зададим правила произведения для реперов величин и для операторов,
- получим математические и физические следствия из новых уравнений,
- сопоставим новую информацию с известной.

Проиллюстрируем предлагаемый подход на примере уравнения Ньютона для материальной точки. Пусть

$$\frac{d}{dt}m\vec{u} = \vec{F}.$$

Введем реперные аналоги величин, соответствующие модели трехуровневой материи:

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow a\frac{d}{dt_1} + b\frac{d}{dt_2} + c\frac{d}{dt_3},$$
$$m \Rightarrow m_1 i + m_2 j + m_3 k,$$
$$\vec{u} \Rightarrow \vec{u}_1\alpha + \vec{u}_2\beta + \vec{u}_3\gamma,$$
$$\vec{F} \Rightarrow a\vec{F}_1 + b\vec{F}_2 + c\vec{F}_3.$$

Введем функционально-комбинаторные произведения реперов $\xi \overset{\varphi,k}{\times} \eta = \varphi(\xi,\eta)(\xi \overset{k}{\times} \eta)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \overset{\varphi,k}{\times} & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline i & p_1 a & q_1 b & r_1 c \\ j & r_2 c & p_2 a & q_2 b \\ k & q_3 b & r_3 c & p_3 a \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} \overset{\varphi,k}{\times} & a & b & c \\ \hline a & l_1 c & n_1 b & s_1 a \\ b & n_2 b & s_2 a & l_2 c \\ c & s_3 a & l_3 c & n_3 b \end{array}\right).$$

Функционально-комбинаторное произведение строится следующим образом:

- задается функция φ от учитываемых реперов,
- рассматривается её произведение на результат комбинаторного произведения реперов, которое может быть многократным.

Получим, например, выражения

$$\left(a\frac{d}{dt_1} + b\frac{d}{dt_2} + c\frac{d}{dt_3}\right)\left((m_1 i + m_2 j + m_3 k)(\vec{u}_1\alpha + \vec{u}_2\beta + \vec{u}_3\gamma)\right) = a\vec{F}_1 + b\vec{F}_2 + c\vec{F}_3,$$

$$(m_1 i + m_2 j + m_3 k)(\vec{u}_1\alpha + \vec{u}_2\beta + \vec{u}_3\gamma) =$$
$$= (m_1 p_1\vec{u}_1 + m_2 p_2\vec{u}_2 + m_3 p_3\vec{u}_3)a + (m_1 q_1\vec{u}_2 + m_2 q_2\vec{u}_3 + m_3 q_3\vec{u}_1)b + (m_2 r_2\vec{u}_1 + m_3 r_3\vec{u}_2 + m_1 r_1\vec{u}_3)c =$$
$$= \vec{M}_1 a + \vec{M}_2 b + \vec{M}_3 c.$$

Тогда

$$\left(a\frac{d}{dt_1} + b\frac{d}{dt_2} + c\frac{d}{dt_3}\right)\left(\vec{M}_1 a + \vec{M}_2 b + \vec{M}_3 c\right) = a\vec{F}_1 + b\vec{F}_2 + c\vec{F},$$

$$\frac{d}{dt_1}\vec{M}_3 s_1 + \frac{d}{dt_2}\vec{M}_2 s_2 + \frac{d}{dt_3}\vec{M}_1 s_3 = \vec{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt_1}\vec{M}_2 n_1 + \frac{d}{dt_2}\vec{M}_1 n_2 + \frac{d}{dt_3}\vec{M}_3 n_3 = \vec{F}_2,$$

$$\frac{d}{dt_1}\vec{M}_1 l_1 + \frac{d}{dt_2}\vec{M}_3 l_2 + \frac{d}{dt_3}\vec{M}_2 l_3 = \vec{F}_3.$$

Учтем соотношения:

$$\left(m_1 p_1 \vec{u}_1 + m_2 p_2 \vec{u}_2 + m_3 p_3 \vec{u}_3\right) = \vec{M}_1,$$

$$\left(m_1 q_1 \vec{u}_2 + m_2 q_2 \vec{u}_3 + m_3 q_3 \vec{u}_1\right) = \vec{M}_2,$$

$$\left(m_2 r_2 \vec{u}_1 + m_3 r_3 \vec{u}_2 + m_1 r_1 \vec{u}_3\right) = \vec{M}_3.$$

Рассматриваемый вариант даёт уравнения для материальной точки в рамках модели согласованной трехуровневой реальности:

$$\frac{d}{dt_1}\left(m_2 r_2 \vec{u}_1 + m_3 r_3 \vec{u}_2 + m_1 r_1 \vec{u}_3\right)s_1 + \frac{d}{dt_2}\left(m_1 q_1 \vec{u}_2 + m_2 q_2 \vec{u}_3 + m_3 q_3 \vec{u}_1\right)s_2 +$$

$$+ \frac{d}{dt_3}\left(m_1 p_1 \vec{u}_1 + m_2 p_2 \vec{u}_2 + m_3 p_3 \vec{u}_3\right)s_3 = \vec{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt_1}\left(m_1 q_1 \vec{u}_2 + m_2 q_2 \vec{u}_3 + m_3 q_3 \vec{u}_1\right)n_1 + \frac{d}{dt_2}\left(m_1 p_1 \vec{u}_1 + m_2 p_2 \vec{u}_2 + m_3 p_3 \vec{u}_3\right)n_2 +$$

$$+ \frac{d}{dt_3}\left(m_2 r_2 \vec{u}_1 + m_3 r_3 \vec{u}_2 + m_1 r_1 \vec{u}_3\right)n_3 = \vec{F}_2,$$

$$\frac{d}{dt_1}\left(m_1 p_1 \vec{u}_1 + m_2 p_2 \vec{u}_2 + m_3 p_3 \vec{u}_3\right)l_1 + \frac{d}{dt_2}\left(m_2 r_2 \vec{u}_1 + m_3 r_3 \vec{u}_2 + m_1 r_1 \vec{u}_3\right)l_2 +$$

$$+ \frac{d}{dt_3}\left(m_1 q_1 \vec{u}_2 + m_2 q_2 \vec{u}_3 + m_3 q_3 \vec{u}_1\right)l_3 = \vec{F}_3.$$

На каждом из трех уровней материи есть свои массы, скорости, силы, времена. Они согласованы между собой через систему реперов и их функционально-комбинаторных произведений. Для трех скоростей получена система из трех уравнений. Её решение неотделимо от проблемы согласования времен. Кроме этого, требуется получить информацию о системе «весовых» коэффициентов, входящих в уравнения.

Проиллюстрируем некоторую специфику полученной системы уравнений. Введем простое соотношение для времен. Пусть

$$\frac{d}{dt_1} = \sigma\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt_2} = \frac{d}{dt}, \frac{d}{dt_3} = \kappa\frac{d}{dt}.$$

Упростим задачу, обратив в ноль скорости на первом и третьем уровнях материи:

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_3 = 0.$$

Получим систему из трех уравнений для разных масс и сил, но для скорости одного уровня:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 q_1 s_2 + \sigma m_3 r_3 s_1 + \kappa m_2 p_2 s_3\right)\vec{u}_2 = \vec{F} = \vec{F}(1),$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2 p_2 n_2 + \sigma m_1 q_1 n_1 + \kappa m_3 r_3 n_3\right)\vec{u}_2 = \vec{F} = \vec{F}(2),$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_3 r_3 l_2 + \sigma m_2 p_2 l_1 + \kappa m_1 q_1 l_3\right)\vec{u}_2 = \vec{F} = \vec{F}(3).$$

Из этой системы уравнений следует, что разные наблюдатели по-разному оценят поведение материальной точки даже при условии равенства сил на каждом из трех уровней материи, когда

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = \vec{F}.$$

Поведение материальной точки будет разным по оценкам разных наблюдателей, потому что по-разному представлены массы.

Мы вправе говорить о **трансфинитном релятивизме**: **динамика одного объекта различна на разных уровнях материи.**

То, что происходит на одном уровне материи, может иначе проявлять себя на других уровнях материи.

Ситуации становится ещё более сложной, если углубляется концепция зарядов, их соотношений между собой, а также концепция скорости.

Если первый и третий уровень не проявляют себя, что соответствует выбору параметров $s_i = l_i, i = 1,2,3$, уравнение динамики имеет «следы» корреляции массового заряда, обусловленные влиянием низшего и высшего уровней материи:

$$\frac{d}{dt}\left(m_2 p_2 n_2 + \sigma m_1 q_1 n_1 + \kappa m_3 r_3 n_3\right)\vec{u}_2 = \vec{F} = \vec{F}(2).$$

Если $n_1 = n_3 = 0, p_2 n_2 = 1, m_2 = m$, получим стандартное одноуровневое описание реальности согласно модели материальной точки:

$$\frac{d}{dt} m\vec{u} = \vec{F}_u.$$

Заметим, что физике структурного мира чужда идеология одноуровневой материальной точки. На любом уровне материи, следуя концепции трансфинитности, мы имеем дело с объектами, имеющими структуру. По этой причине мы всегда обязаны рассматривать не точки, а конечные тела. В этом случае требуется изначально учитывать не только изменение скорости, но, также и изменение частоты. Частоту естественно задавать вектором $\vec{\omega} = \omega\vec{s}$.

Учитывая знания, накопленные при анализе моментов количества движения, мы обязаны рассматривать уравнение

$$\frac{d}{dt} ml\omega\vec{s} = 2\pi\vec{F}_\omega.$$

Количество движения $m\vec{u}$, а также количество вращения $ml\omega\vec{s}$ независимо остаются неизменными, если равны нулю силы $\vec{F}_u, \vec{F}_\omega$.

Ситуация упрощается, если вектор частоты направлен по скорости. Тогда согласованное поведение скорости и частоты может быть учтено при введении четырехскорости. Для этого требуется ввести четырехмерный интервал и четыре координаты.

Если быть последовательными, то вводить нужно шестимерный интервал и шесть координат. Три из них соответствуют скорости, три другие выражают вращение.

Получим уравнение вида

$$\alpha^2 \frac{d^2 x^i}{d\sigma^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\sigma}\frac{dx^k}{d\sigma} - F^i = 0, i = 1,2...6.$$

В обычных уравнениях динамики упущен ряд моментов, обусловленных не только внешними проявлениями, но и внутренними движениями структурных объектов. В силу указанных обстоятельств следует модифицировать также к пространствам размерности шесть все уравнения физики.

В электродинамике на роль пятой и шестой координаты в шестимерном интервале претендуют показатель преломления и показатель отношения. Координаты 5,6 для дифференциальных уравнений, как и соответствующие величины, нужно строить, исходя из дополнительных соображений.

Более того, ниоткуда не следует, что анализ динамики следует ограничивать дифференциальными уравнениями второго порядка.

Анализ релятивистской динамики убеждает в том, что самостоятельным уравнениям подчинены также физические параметры, которые входят в уравнения.

Кроме этого, как мы понимаем, в уравнениях могут и должны учитываться «следы» других уровней материи.

При рассмотрении динамики материальной точки мы исходим из выражения вида

$$\frac{d}{dt}(mu) = F.$$

Проанализируем возможности обобщения данного выражения, приняв идею учета всех факторов и обстоятельств рассматриваемой задачи.

Заметим, что мы имеем дело с конечными телами. Поэтому нужно единым образом описывать их размеры, форму и т.п., но также всю систему ранговых движений: скорости, ускорения...

Для этого принято использовать модель пространства и времени для телесных уровневых движений. Ранговые движения есть функционалы от дифференциалов координат, зависимые от самих координат (инвариантно к выбору системы координат). Получим, например, ряд:

$$L = \overset{(0)}{f}\left(x^k, t\right), u = \overset{(1)}{f}\left(\frac{dx^k}{dt}, x^k, t\right), \dot{u} = \overset{(2)}{f}\left(\frac{d^2x^k}{dt^2}, \frac{dx^k}{dt}, x^k, t\right), \ddot{u} = \overset{(3)}{f}\left(\frac{d^3x^k}{dt^3}, \frac{d^2x^k}{dt^2}, \frac{dx^k}{dt}, x^k, t\right)...$$

Принимая софистатность движений и зарядов, введём зарядовое пространство и зарядовое время с координатами ς^k, τ. Введём систему зарядов, софистатную системе пространственных движений. Получим, например, ряд:

$$\overset{(0)}{m} = \overset{(0)}{F}\left(\varsigma^k, \tau\right), \overset{(1)}{m} = \overset{(1)}{F}\left(\frac{d\varsigma^k}{d\tau}, \varsigma^k, \tau\right), \overset{(2)}{m} = \overset{(2)}{F}\left(\frac{d^2\varsigma^k}{d\tau^2}, \frac{d\varsigma^k}{d\tau}, \varsigma^k, \tau\right), \overset{(3)}{m} = \overset{(3)}{F}\left(\frac{d^3\varsigma^k}{d\tau^3}, \frac{d^2\varsigma^k}{d\tau^2}, \frac{d\varsigma^k}{d\tau}\varsigma^k, \tau\right)...$$

С учетом указанного предположения мы обязаны изменить структуру динамических уравнений.

С одной стороны, нужно добавить весовой вклад в динамику телесной и зарядовой составляющих. Например, это может быть вариант вида

$$a\frac{d}{dt}(mu) + b\frac{d}{d\tau}(mu) = aF_1 + bF_2.$$

С другой стороны, в динамике могут участвовать другие слагаемые зарядового и телесного пространств. Например, это может быть вариант вида

$$\hat{L}_1(m(\xi)u(\xi)) = a\frac{d}{dt}\left(\overset{(1)}{f}\left(\frac{dx^k}{dt}, x^k, t\right)\overset{(1)}{F}\left(\frac{d\varsigma^k}{d\tau}, \varsigma^k, \tau\right)\right) + b\frac{d}{d\tau}\left(\overset{(1)}{f}\left(\frac{dx^k}{dt}, x^k, t\right)\overset{(1)}{F}\left(\frac{d\varsigma^k}{d\tau}, \varsigma^k, \tau\right)\right),$$

$$\hat{L}_1(m(\xi)u(\xi)) = aF_1 + bF_2 = \hat{\Phi}_1.$$

$$\hat{L}_2(m(\xi)u(\xi)) = a\frac{d^2}{dt^2}\left(\overset{(2)}{f}\left(\frac{d^2x^k}{dt^2}, x^k, t\right)\overset{(2)}{F}\left(\frac{d^2\varsigma^k}{d\tau^2}, \varsigma^k, \tau\right)\right) + b\frac{d}{d\tau}\left(\overset{(2)}{f}\left(\frac{d^2x^k}{dt^2}, x^k, t\right)\overset{(2)}{F}\left(\frac{d^2\varsigma^k}{d\tau^2}, \varsigma^k, \tau\right)\right),$$

$$\hat{L}_2(m(\xi)u(\xi)) = aF_3 + bF_4 = \hat{\Phi}_2.$$

Аналогично по указанному «вертикальному» алгоритму собираются другие слагаемые.

Общий закон динамики будет выглядеть так:

$$\alpha^i \hat{L}_i = \beta^i \hat{\Phi}_i.$$

В зависимости от того, с какими множителя и как представлены слагаемые, мы получим более или менее сложную систему **одноуровневой, однозарядовой динамики.**

Общий случай **одноуровневой, однозарядовой динамики** включает в себя также динамику электрических зарядов, для которой характерны *нечетные производные* по координатам и времени (первого, третьего, пятого ... порядков).

С формальной точки зрения при учете одноуровневой динамики масс мы анализируем возможности согласованного учета выражений вида

$$\frac{\partial^\pi}{\partial x^\pi}\left(m\overset{(\pi)}{\underset{(\pi)}{u}} \otimes m\overset{(\pi)}{\underset{(\pi)}{u}}\right) = F^\pi ...$$

Так учитываются «квадраты» скоростей, «квадраты» ускорений и т.д., а также все четные производные теории... Непонятна роль и возможности произведений скоростей на ускорения и других бинарных комбинаций из компонент ранговых движений. Она может быть важна для учета анализа взаимных изменений в ранговых движениях.

С формальной точки зрения при учете одноуровневой динамики электрических составляющих мы анализируем возможности согласованного учета выражений вида

$$\frac{\partial^\pi}{\partial x^\pi}\left(m\overset{(\pi)}{\underset{(\pi)}{u}} \otimes \partial_{(p)} m\overset{(\pi)}{\underset{(\pi)}{u}}\right) = F_{(p)}{}^\pi ...$$

Так учитываются бинарные комбинации параметров движений и производных от них. Так будут учтены производные первого, третьего и других нечетных порядков...

В общем случае одноуровневой модели будет реализовываться сочетание «массовых» и «электрических» слагаемых в системе телесных и зарядовых ранговых движений.

Многоуровневые модели *будут содержать в себе черты одноуровневой ПОЛНОЙ динамики, а их проявления в разной пропорции обнаружит теория и подтвердит эксперимент.*

Динамика материальной точки может быть записана на основе дифференциально-геометрических уравнений, которые выражают свойства совокупности **разных ранговых пространств:**

$$\left(\frac{d^2\eta^i}{d\theta_1^{\ 2}}+\Gamma^i_{jk}(\eta)\frac{d\eta^j}{d\theta_1}\cdot\frac{d\eta^k}{d\theta_1}\right)\left(\frac{d^2x^i}{d\theta_2^{\ 2}}+\Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{d\theta_2}\cdot\frac{dx^k}{d\theta_2}\right)=$$
$$=\int\left(\frac{d^2P}{dN_1^{\ 2}}+\alpha\frac{dP}{dN_1}-\beta\frac{P}{N_1}\right)\int\left(\frac{d^2Q}{dN_2^{\ 2}}+\alpha\frac{dQ}{dN_2}-\beta\frac{Q}{N_2}\right)$$

Примем точку зрения, что произведение внешних и внутренних ускорений пропорционально произведению факторов взаимодействия. Тогда получим

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}=P\cdot Q.$$

Здесь η, r есть внутренние и внешние переменные, относящиеся к задаче. Обобщим этот вариант. Выполним замену:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}\Rightarrow\frac{d^2\eta^i}{d\theta^2}+\Gamma^i_{jk}(\eta)\frac{d\eta^j}{d\theta}\cdot\frac{d\eta^k}{d\theta}.$$

Получим выражение вида

$$\left(\frac{d^2\eta^i}{d\theta_1^{\ 2}}+\Gamma^i_{jk}(\eta)\frac{d\eta^j}{d\theta_1}\cdot\frac{d\eta^k}{d\theta_1}\right)\left(\frac{d^2x^i}{d\theta_2^{\ 2}}+\Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{d\theta_2}\cdot\frac{dx^k}{d\theta_2}\right)=P\cdot Q.$$

Выразим указанные величины посредством формальных интегралов:

$$\int\left(\frac{d^2P}{dN_1^{\ 2}}+\alpha\frac{dP}{dN_1}-\beta\frac{P}{N_1}\right)\to P,$$
$$\int\left(\frac{d^2Q}{dN_2^{\ 2}}+\alpha\frac{dQ}{dN_2}-\beta\frac{Q}{N_2}\right)\to Q.$$

Задача конструирования динамик сведена к решению согласованной системы уравнений дифференциальной геометрии.

Динамика как объект теории становится теперь ещё сложнее и интереснее. В ней есть множество возможностей, которые не могли быть поняты и использованы ранее.

Аспекты трансфинитной электродинамики

Применим *алгоритм комбинаторного обобщения физических моделей в электродинамике.*

Известна запись уравнений Фарадея–Ампера в спинорной форме через базовые кватернионы:

$$a^i\partial_i\Psi+b^i\partial_i\overline{\Psi}=0.$$

Проведем расширение дифференциальных операторов и волновых функций, предполагая наличие четырёх уровней материи и используя для расширения модели систему, состоящую из четырёх реперов. Тогда получим, что

$$\partial_i\Rightarrow\partial_i(1)a+\partial_i(2)b+\partial_i(3)c+\partial_i(4)d,$$
$$\Psi\Rightarrow\Psi(1)a+\Psi(2)b+\Psi(3)c+\Psi(4)d,$$
$$\overline{\Psi}\Rightarrow\overline{\Psi}(1)a+\overline{\Psi}(2)b+\overline{\Psi}(3)c+\overline{\Psi}(4)d.$$

Введем функционально-комбинаторные (многократные) произведения реперов $\xi\overset{\varphi,k}{\times}\eta(4)=\varphi(\xi,\eta)(\xi\overset{k}{\times}\eta(4))$:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \overset{\varphi,k}{\times} & a & b & c & d \\ \hline a & p_1 a & q_1 a & r_1 a & l_1 a \\ b & p_2 b & q_2 b & r_2 b & l_2 b \\ c & p_3 c & q_3 c & r_3 c & l_3 c \\ d & p_4 d & q_4 d & r_4 d & l_4 d \end{array}\right).$$

Подставим введенные величины с учетом правил произведения реперов в исходные уравнения. Получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} & a^i\partial_i\left(p_k\Psi(1)+q_k\Psi(2)+r_k\Psi(3)+l_k\Psi(4)\right)+ \\ & +b^i\partial_i\left(p_k\overline{\Psi}(1)+q_k\overline{\Psi}(2)+r_k\overline{\Psi}(3)+l_k\overline{\Psi}4\right)=0, \\ & k=1,2,3,4. \end{aligned}$$

Заметим, что элементы на главной диагонали в таблице произведений реперов могут быть основными слагаемыми, которые дают самый большой вклад в структуру модели. Тогда мы получаем для всех учитываемых уровней материи уравнения электродинамики, аналогичные одноуровневой модели. По этой причине в модели расширения электродинамики на четырёхуровневый вариант мы получаем «цветок» в форме четырех согласованных между собой «лепестков». Начальные и граничные значения для величин на каждом уровне материи могут быть разными.

В общем случае ситуация сложна, так как следует корректно учесть все слагаемые, а также специфику их вклада в динамику каждого уровня. Модели, соответствующие концепции двухуровневой или трехуровневой модели материи, будут проще. Их можно использовать как тестовые для задач с многократным расширением моделей.

Идея скрытых решений

Приблизим формальную комбинаторную операцию к реальным расчетам. Исследуем, например, возможности нахождения скрытых решений по заданной системе линейных уравнений. Используем матричный алгоритм как средство построения явного решения. Заменив матричный расчет комбинаторным, мы получим семейство скрытых решений. Они выступают в роли некоторых «теней» от одного и того же объекта. Естественная «гибкость» комбинаторных операций соответствует практике моделирования трансфинитной физической реальности. Решения, следующие из системы уравнений, подчиненной комбинаторным операциям, софистатны решениям, получаемым на основе стандартной процедуры матричного произведения.

У системы явных и скрытых решений могут быть разные свойства и предназначение. Например, матричное решение описывает механическое поведение объекта. Это может быть *механическое движение* из одного пункта в другой. Одни комбинаторные операции, используемые для этой же системы уравнений, способны описывать *изменение «ментальных свойств»* объекта. Другие комбинаторные операции, используемые для этой же системы уравнений, способны описывать *изменение «чувств»* объекта.

Решения, полученные на основе комбинаторной операции, соответствуют некоторой системе линейных уравнений с решениями, которые получаются посредством матричной операции. Их бесконечно много. Конкретный выбор отдельного варианта требует дополнительных условий.

Если сохранить систему уравнений, изменится только их правая часть. Если соотношение коэффициентов подчинено дополнительным условиям, то система линейных уравнений будет изменена.

Поскольку физическое, ментальное, чувственное состояние могут быть согласованы между собой функционально, а требуемые решения можно получить из одной и той же системы уравнений, имеющей разную правую часть, мы можем взять за основу одну и ту же модель для описания разных свойств объекта.
На примере линейных уравнений отмеченное обстоятельство выглядит так:

$$\begin{aligned}
&ax + by = \left(p_1,\, f_1(\hat{x}, \hat{y}),\, f_2(\hat{x}, \hat{y})\right),\\
&cx + dy = \left(p_2, \varphi_1(\hat{x}, \hat{y}), \varphi_2(\hat{x}, \hat{y})\right),\\
&x(1) = f_1(\hat{x}, \hat{y})x,\; y(1) = \varphi_1(\hat{x}, \hat{y})y,\\
&x(2) = f_2(\hat{x}, \hat{y})x,\; y(2) = \varphi_2(\hat{x}, \hat{y})y.
\end{aligned}$$

Здесь $\hat{x}, \bar{y}$ есть решения системы уравнений вида

$$\begin{aligned}
&ax + by = p_1,\\
&cx + dy = p_2.
\end{aligned}$$

Уравнения для ментальных и чувственных реакций, функционально ассоциированные с исходной системой линейных уравнений, получат вид:

$$\begin{aligned}
&af_1(\hat{x}, \hat{y})x + b\varphi_1(\hat{x}, \hat{y})y = Q(p_1, p_2),\\
&cf_1(\hat{x}, \hat{y})x + d\varphi_1(\hat{x}, \hat{y})y = Q(p_1, p_2),\\
&af_2(\hat{x}, \hat{y})x + b\varphi_2(\hat{x}, \hat{y})y = R(p_1, p_2),\\
&cf_2(\hat{x}, \hat{y})x + d\varphi_2(\hat{x}, \hat{y})y = R(p_1, p_2).
\end{aligned}$$

Матричные уравнения, ассоциированные с комбинаторными операциями, соотнесёнными с ментальным и чувственным состоянием объекта, получат вид:

$$\begin{aligned}
&ax + by = ax(1) + by(1) = P(1) = \alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2,\\
&cx + dy = cx(1) + dy(1) = P(2) = \gamma_1 p_1 + \delta_1 p_2,\\
&ax + by = ax(2) + by(2) = Q(1) = \alpha_2 p_1 + \beta_2 p_2,\\
&cx + dy = cx(2) + dy(2) = Q(2) = \gamma_2 p_1 + \delta_2 p_2.
\end{aligned}$$

Принимая идеологию трансфинитной структуры и активности объектов физической реальности, мы обязаны принять также трансфинитность теоретических моделей и трансфинитность их решений. Комбинаторные операции позволяют реализовать трансфинитность решений одной и той же системы уравнений, допуская принадлежность этих решений разным свойствам исследуемого объекта.

Наличие **гибкой и активной системы математических операций** допускает принципиально новые возможности моделирования трансфинитной материи. С одной стороны, формально допустима активность операций. Её можно реализовать, обеспечивая изменение по некоторому алгоритму базовых элементов, на которых основана комбинаторная операция. С другой стороны, формально допустимо **смешение комбинаторных операций,** их весовое или последовательное действие. В этом случае обеспечивается операционная гибкость физических моделей. Расширяется спектр возможностей моделирования, а вместе с ним расширяется спектр экспериментальных алгоритмов и измерительных устройств. Безусловно, на этом пути понадобятся качественно новые **возможности создания новой техники**. Заметим, что комбинаторный подход допускает разные возможности моделирования самих изделий, ассоциированных с известными или ожидаемыми свойствами практики.

Простейший способ получения скрытых решений для системы линейных уравнений может быть основан на *изменении способа нахождения определителей матриц*, ассоциированных с данной системой уравнений.

Введем **комбинаторный алгоритм расчета определителей** матриц. Он может быть построен на некотором формальном комбинаторном правиле, но может иметь и функциональное наполнение.

Изменим правила нахождения миноров.

С точки зрения комбинаторной операции мы рассматриваем случай, когда реализуется «самовоздействие»: строка матрицы влияет на остальную часть матрицы, анализируется итог, задаваемый суммированием всех полученных компонент.

Рассмотрим несколько вариантов.

Пример 1. Элементы строки умножаются на соответствующие элементы других строк, результаты всех произведений складываются. Тогда, например,

$$Det_1^*\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3.$$

Пример 2. Элементы строки умножаются на сумму соответствующих элементов других строк, результаты всех произведений складываются. Тогда, например,

$$Det_2^*\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3).$$

Пример 3. Элементы строки умножаются на функциональную сумму соответствующих элементов других строк, результаты всех произведений складываются. Тогда, например,

$$Det_2^*\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 + b_3c_2) + a_2(b_1c_3 + b_3c_1) + a_3(b_1c_2 + b_2c_1).$$

Указанную выборку можно соединить с правилом построения канонических мономиальных матриц, принадлежащих группе. В данном случае это будут матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По ним реализовано произведение элементов для построения миноров. Если мы делаем нечто аналогичное для миноров третьего порядка, получим матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сравним предложенный алгоритм со стандартным матричным алгоритмом. В случае матриц второго порядка следует последовательно использовать структурные выражения

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Пример 4. Комбинаторная операция может соединить в себе пару других комбинаторных операций. Например, получим

$$Det_3^*\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3 + a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3).$$

Пример 5. Операция может быть ещё более сложной, допуская не только комбинаторику, но и функциональность. Например, введем операцию

$$Det_4^*\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1(b_1c_1)^2 + a_2(b_2c_2)^3 + a_3(b_3c_3)^4 + a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3).$$

Пример 6. Функциональность может быть полиномиальной. Например

$$Det_4^*\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1(b_1+c_1)^2 + a_2(b_2+c_2)^2 + a_3(b_3+c_3)^2.$$

Вывод: Возможна система комбинаторных операций. Её использование позволяет найти систему решений, ассоциированную с конкретными условиями согласно конкретной системе уравнений.

К калибровочной теории процессов

Принцип софистатности изделий и их активностей, принятый в физике в качестве базового философского принципа, предполагает выяснений всех граней такого соответствия.

Поскольку **структуру** физических изделий, в частности, частиц света, мы связываем с проективной унимодулярной группой в мономиальном представлении $PSL(4,R)$, было бы желательно связать с ней **активность** частиц света.

В рамках динамического подхода к описанию изменения параметров электромагнитного поля, активность частиц света управляется сигруппой ГАЛО. Она описывает начальную стадию динамического процесса группой Галилея, а конечную стадию процесса группой Лорентца (отталкиваясь от одних и тех же исходных данных). В силу этого факта, желательно описать группу Галилея, группу Лорентца, а также сигруппу ГАЛО в терминах проективной унимодулярной группы в мономиальном представлении $PSL(4,R)$.

Это легко сделать, сопоставив математическую структуру указанных объектов.

Зададим формально явный вид трех рассматриваемых объектов в форме матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma 1 & 0 & 0 & \gamma a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma b & 0 & 0 & \gamma 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} 1 & 0 & 0 & \tilde{\gamma} a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \tilde{\gamma}\tilde{b} & 0 & 0 & \tilde{\gamma} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} 1 & 0 & 0 & \tilde{\gamma} a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \tilde{\gamma}\tilde{b} & 0 & 0 & \tilde{\gamma} 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \ldots$$

Известно, что в группе $PSL(4,R)$ элементы матричной алгебры выражаются через элементы группы. Так

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(c_1 + c_2 + c_3 + E), \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(-c_1 + c_2 - c_3 + E),$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}(c_1-c_2-c_3+E),\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}(-c_1-c_2+c_3+E),$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}(a_1+b_1+e_1-f_1),\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}(-a_1-b_1+e_1-f_1).$$

Элементы группы $PSL(4,R)$таковы:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},c_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$a_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},e_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},f_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, группа Галилея, группа Лорентца, сигруппа Гало выражаются через одни и те же элементы группы $PSL(4,R)$. Поэтому можно считать, что три указанных объекта структурно эквивалентны. Они имеют «разные одежды», отличаясь множителями перед генераторами группы заполнения $PSL(4,R)$.

Более того, элементы

$$E,c_1,c_2,c_3,a_1,b_1,e_1,f_1,-c_1,-c_2,-c_3,-a_1,-b_1,-e_1,-f_1,-E$$

образуют подгруппу группы $PSL(4,R)$.

На основе выполненного сравнения мы приходим к выводам:

- группа Галилея, группа Лорентца, сигруппа ГАЛО выражаются через одни и те же элементы группы $PSL(4,R)$, они *структурно эквивалентны,*
- неизоморфность групп не препятствует тому, что они могут быть структурно эквивалентны,
- **структура электромагнитных полей и их активность описываются одной и той же группой**, что свидетельствует, с симметрийной точки зрения, не только о взаимосвязи структур и активностей, но о софистатности их друг другу,
- поскольку унимодулярная проективная группа шире группы активности, включающей в себя группу Галилея, группу Лорентца и сигруппу Гало, мы вправе рассматривать другие подгруппы, посредством которых описываются другие активности,
- поскольку структуры задаются через отношения базовых объектов, активности тоже выражаются через данную систему отношений, что дополнительно подтверждает единство структур и активностей.

Представленный вариант соответствует вложению группы Галилея, группы Лорентца, сигруппы Гало в *8–параметрическую подгруппу унимодулярной группы*.

Это обстоятельство доказывается ещё одним способом. Запишем аддитивно элемент сигруппы Гало:

$$\gamma_1\begin{pmatrix}1 & v\\ \frac{v}{c^2}w & 1\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1 & v+\sigma\alpha\\ \frac{v+\sigma\alpha}{c^2} & 1\end{pmatrix}\frac{\gamma_1}{\gamma}+\gamma_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{v}{c^2}(w-1)-\frac{\sigma\alpha}{c^2} & 1\end{pmatrix}-\gamma_1\begin{pmatrix}1 & \sigma\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда очевидно, что к шести параметрической группе Лорентца добавлены две однопараметрические группы. Общее число параметров будет равно восьми.

Поскольку именно сигруппа Гало описывает процессы в электродинамике, важно построить калибровочную теорию для неё.

Следуя общему алгоритму модели калибровочных полей, в качестве базы анализа следует использовать подгруппу проективной унимодулярной группы в мономиальном представлении. Её генераторы задаются матрицами

$$E, c_1, c_2, c_3, a_1, b_1, e_1, f_1.$$

Поскольку именно сигруппа Гало описывает процессы в электродинамике, важно построить калибровочную теорию для неё. Понятно, как это делать. Понятно и другое, что структурные параметры, как и параметры групп, в данном случае будут отличаться от калибровочной теории, построенной на группе Лорентца.

С общих позиций следует такой вывод: возможно построение *калибровочных теорий для процессов*, если найдена группа процессов, в которую может быть вложена группа состояний. Поскольку группа процессов выступает в электродинамике как деформация группы конечных состояний, либо как параметрическое объединение группы начального и конечного состояний, мы имеем *два алгоритма ее формирования*.

Поскольку кроме сигруппы Гало проективная группа задает другие возможности, полный набор калибровочных полей выйдет за пределы калибровочного поля, порождаемого одной группой.

Поскольку сама физика изменений – **физика процессов** базируется на идеях **расширения группы и деформации параметров**, в реальных случаях требуется изучить все возможности этих реализаций и все их сочетания. Тогда может быть достигнута полнота анализа, а вместе с ней понимание исследуемых изделий и их свойств.

Покажем, что сигруппа Гало, выступающая в роли симметрии релаксационного процесса, во-первых, подсказывает алгоритм построения сигрупп для других процессов, во-вторых, индуцирует обобщение теории калибровочных полей.

Выразим двумерную сигруппу Гало в форме произведения группы Лорентца на пару других групп:

$$Sg=g\begin{pmatrix}1 & 0\\ \sigma & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-1} & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}.$$

Группа Лорентца, в свою очередь, выражается так:

$$g=a\begin{pmatrix}1 & b_1\\ b_2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{-1} & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b_1a^2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ b_2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \tau\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta & 1\end{pmatrix}, a=\frac{1}{\sqrt{1-b_1b_2}}.$$

Она представлена в виде матричного произведения трех однопараметрических групп. Их генераторы соответствуют генераторам группы $SL(2,R)$:

$$a_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Заметим, что аналогичные генераторы имеют группы, посредством которых группа Лорентца превращается в сигруппу Гало. Так простыми алгебраическими средствами найден **алгоритм** систематического превращения группы симметрии состояний в группы симметрии процессов: **симметрия процессов есть симметрия состояния, матрично умноженная на подгруппы этой симметрии**. Поскольку таких произведений достаточно много, симметрий процессов тоже достаточно много. Однако физические условия их реализации могут быть сложными или недоступными для эксперимента. Заметим, что принцип реализации всех возможностей допускает произведение (и суммы) группы состояний с группами, не являющиеся подгруппами данной группы. Тогда объект анализа становится ещё более сложным.

Перейдем теперь к начальному анализу модели калибровочных полей, ассоциированных с сигруппой.

Запишем сигруппу в окрестности единицы. Тогда

$$Sg_I \approx \left(I + a_1 t(1) + a_2 t(2) + a_3 t(3)\right)\left(I + a_3 \tau\right)\left(I + a_1 p\right) \approx I + a_r t^r + \hat{a}_p t^p + \ldots$$

Обозначение генераторов с крышкой использовано для того, чтобы показать, что используется не вся система генераторов, а также тот факт, что во второй сумме параметры отличаются от параметров первой суммы. Заметим также, что параметры первой и второй суммы в случае сигруппы Гало функционально связаны и зависимость эта нелинейна. По этой причине конкретное выражение для параметров сигруппы зависит от ряда дополнительных условий конкретной задачи. Их нужно анализировать и учитывать по самостоятельному алгоритму.

Калибровочные потенциалы, ассоциированные с сигруппой, будут представлены в виде суммы

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + \hat{A}_\mu = \tau_a A_\mu^a + \tau_a \hat{A}_\mu^a.$$

По этой причине стандартные калибровочные тензоры существенно изменятся:

$$F_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) + \left[A_\mu, A_\nu\right] \Rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu\right) + \left[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu\right]$$

Величины получат не только дифференциальные «добавки». Существенно усложнятся коммутаторы, выступающие в теории в форме «конвективных» слагаемых. Они дополнят нелинейности, присущие калибровочным моделям.

Изменятся также частные производные физической модели. Они получат вид

$$\partial_\mu \Rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + p\left(A_\mu + \hat{A}_\mu\right).$$

Заметим, что при анализе механики вязкой жидкости учитываются также симметричные слагаемые. Их вид, ассоциированный с сигруппой, аналогичен виду антисимметричных калибровочных полей. Однако такие поля *не являются калибровочными*. Их можно назвать симметрийными. Потребность в их использовании вытекает из структуры группы заполнения физических моделей. В её роли, как известно, выступает $PSL(4,R)$. Она содержит два кватерниона, которые несут на себе структуру антисимметричных электромагнитных полей. Также она содержит три антикватерниона, которые несут на себе структуру симметричных гравитационных полей. В форме симметричного тензора, построенного на четырехпотенциалах, может быть построена физическая теория гравитации, которая включает в себя модель гравитации Эйнштейна в представлении Логунова. По этой причине и механика жидкости, и физическая теория гравитации может быть обобщена на сигруппу. Тогда в указанных теориях используются величины

$$F_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu\right) + \left\{A_\mu, A_\nu\right\} \Rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu \tilde{A}_\nu + \partial_\nu \tilde{A}_\mu\right) + \left\{\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu\right\},$$

$$\partial_\mu \Rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + p\left(A_\mu + \hat{A}_\mu\right).$$

Вместо коммутатора в такой модели используется антикоммутатор, что дополнительно усложняет структуру «конвективных слагаемых» физической модели гравитации.

Сумма нескольких групп

Группу Лорентца можно алгебраически выразить как сумму деформированных групп Галилея и пары групп Барыкина:

$$\gamma\begin{pmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\b&0&0&1\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\b&0&0&1\end{pmatrix}-\gamma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Это обстоятельство очевидно с физической точки зрения. Действительно, если в кинематике мы учитываем только скорость, то достаточно использовать группу Галилея. Если дополнительно у объектов **меняется частота**, требуется математически учитывать и это обстоятельство. Первая группа Барыкина, меняя течение времени, задает этот фактор аддитивно к фактору изменения скорости. Поскольку изменение частоты может быть связано с изменением **характерных размеров** исследуемых объектов, требуется учесть этого обстоятельства. Вторая группа Барыкина обладает требуемыми свойствами.

Аналоги сигруппы Гало

Известно, что группа $PSL(4,R)$ «охватывает» не только электромагнетизм, но и гравитацию. Естественно ожидать, что активность изделий, имеющих как электрические, так и гравитационные заряды и предзаряды, будет описываться на основе полной совокупности свойств группы $PSL(4,R)$, а также её подгрупп. Задача первого этапа состоит в рассмотрении всех подгрупп, а также всех вариантов активности, обусловленных ими.

Принимая требование сохранения пространственных свойств объектов, мы обязаны использовать для этого группу деформации размеров. В простейшем случае она представлена единичной матрицей и такими же матрицами с множителем. Элементы матричной алгебры, ассоциированные с группой заполнения, соответствующие элементам главной диагонали, выражаются через матрицы (E,c_1,c_2,c_3), которые образую подгруппу группы заполнения.

Другие элементы группы заполнения, в силу указанной причины, должны дополнять указанную подгруппу. Вариант

$$E,c_1,c_2,c_3,a_1,b_1,e_1,f_1,-c_1,-c_2,-c_3,-a_1,-b_1,-e_1,-f_1,-E$$

рассмотрен нами. Есть другие возможности:

$$E,c_1,c_2,c_3,a_2,b_2,e_2,f_2,-c_1,-c_2,-c_3,-a_2,-b_2,-e_2,-f_2,-E\,,$$

$$E,c_1,c_2,c_3,a_3,b_3,e_3,f_3,-c_1,-c_2,-c_3,-a_3,-b_3,-e_3,-f_3,-E\,.$$

Матрицы E,c_1,c_2,c_3 образуют **нормальную подгруппу проективной унимодулярной группы**. Остальные матрицы формируют *«полочки» факторгруппы*:

$$a_1,b_1,e_1,f_1,-a_1,-b_1,-e_1,-f_1,$$

$$a_2,b_2,e_2,f_2,-a_2,-b_2,-e_2,-f_2,$$

$$a_3,b_3,e_3,f_3,-a_3,-b_3,-e_3,-f_3.$$

Покажем, что в рамках принятого подхода возможно построение сигрупп деформации состояний.

Действительно, рассмотрим преобразования

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} & \tilde{\gamma}u & 0 & 0 \\ \tilde{\gamma}\frac{u}{c^2}w & \tilde{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \Rightarrow x' = \tilde{\gamma}(x+uy), y' = \tilde{\gamma}\left(y + \frac{u}{c^2}wx\right), z' = z, t' = t.$$

Они образуют объект, который является **аналогом сигруппы Гало**. В нем отсутствует время, поэтому речь идет о взаимном изменении координат (x,y). Определитель преобразований можно выбрать равным единице. Это обстоятельство обеспечит сохранение объема исследуемого объекта. Мы получаем деформацию координат (x,y), зависящую от скорости и отношения, координаты (z,t) остаются неизменными. Следовательно, с физической точки зрения, речь идёт о «скручивании» изделия, описываемого данной симметрией. В силу данного обстоятельства новый объект можно назвать сигруппой физического кручения.

Семейство сигрупп кручения содержит три объекта, что соответствует тройке независимых пар координат: $(x,y),(x,z),(y,z)$.

Проанализирует симметрийную структуру сигруппы Гало. Получим, что

$$\begin{pmatrix} \tilde{\gamma} & 0 & 0 & \tilde{\gamma}\frac{u}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \tilde{\gamma}\frac{u}{c}w & 0 & 0 & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\tilde{\gamma}\left[2(c_3+E) + (a_1+b_1+e_1-f_1)\frac{u}{c} + (-a_1-b_1+e_1-f_1)\frac{u}{c}w\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\tilde{\gamma}\left[2(c_3+E) + \frac{u}{c}(a_1+b_1)(1-w) + \frac{u}{c}(e_1-f_1)(1+w)\right].$$

Эти выражения по-новому трактуют структурную сущность начальной и конечной симметрий. При $w=0$ получим зависимость от шести генераторов:

$$\frac{1}{4}\left[2(c_3+E) + \frac{u}{c}(a_1+b_1+e_1-f_1)\right].$$

При $w=1$ получим зависимость от четырёх генераторов:

$$\frac{1}{4}\tilde{\gamma}\left[2(c_3+E) + \frac{u}{c}(e_1-f_1)(1+1)\right].$$

Тонкость: *На начальной стадии релаксационного процесса в электродинамике, с симметрийной точки зрения, основанной на концепции группы заполнения, генераторов симметрии больше, чем на конечной стадии процесса*.

Рассмотрим преобразования вида

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\gamma}1 & \tilde{\gamma}\frac{u}{c} \\ 0 & 0 & \tilde{\gamma}\frac{u}{c^2}w & \tilde{\gamma}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \Rightarrow x' = x, y' = y, z' = \tilde{\gamma}\left(z + \frac{u}{c}ct\right), ct' = \tilde{\gamma}\left(ct + \frac{u}{c}w\right), \gamma^{-1} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}w\right)^{1/2}.$$

Это будут преобразования сигруппы Гало для плоскости (z,ct).

Поскольку группы Галилея и Лорентца охватывают лишь часть возможностей, есть другие варианты симметрий, которые следуют из указанной структуры подгрупп проективной унимодулярной группы.

Обратим внимание на математическую структуру сигруппы Гало. Она представлена, например, канонической группой Лорентца, отнесенной к фиксированному значению показателя отношения, а также парой других групп, которые согласованы с ней по выбору параметров.

Пара других групп задана выражениями

$$g(2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \sigma & 1\end{pmatrix}, g(3)=\begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{pmatrix}.$$

Так задаются однопараметрические подгруппы группы $SL(2,R)$. Группа Лорентца построена на аналогичных генераторах.

Вывод: *Сигруппа процесса может быть получена из группы состояний* (группа Лорентца или Галилея) *посредством умножения ее элементов на одну или несколько однопараметрических подгрупп этой же группы.*

Найдены истоки **алгоритма конструирования симметрии процесса** по симметрии состояния:

- нужно элементы группы состояний перемножить на элементы подгруппы данной группы,
- нужно согласовать параметры перемножаемых групп.

Теперь становится понятным изменение в теории калибровочных полей, индуцируемое применением сигруппы. Поскольку генераторы у системы групп одни и те же, изменится структура параметров группы. Параметры сигруппы будут выражаться в форме ***суммы параметров разных групп****.*

Скрытая неассоциативность

Анализ активностей электродинамики на примере групп Галилея, Лорентца, сигруппы Гало выполнен нами в рамках использования модели гравитационных предзарядов и матричных операций, которые к ним применены. В частности, так получены элементы матричной алгебры, которая стала основой анализа.

Рассмотрим теперь спектр проблем активности в электродинамике, используя матрицы, соответствующие электрическим предзарядам и неассоциативным операциям.

Элементы матричной алгебры получаются, как известно, при матричном произведении правых и левых идеалов.

Матрицы

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\delta=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

образуют некоммутативную А-полугруппу. Действительно,

$$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma), \alpha\beta=\alpha, \beta\alpha=\beta.$$

Матрицы

$$a=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

образуют некоммутативную В-полугруппу. Действительно,

$$(ab)c=a(bc), ab=b, ba=a.$$

Для получения первого элемента матричной алгебры нужно умножить первую ненулевую строку на первый ненулевой столбец. Остальные получаются комбинаторикой перестановок. По этой причине **базис симметрии активностей**, с точки зрения математической модели электрических предзарядов, **состоит из восьми матриц** (снова появляется число 8 -- восьмеричный путь). В мультипликативном подходе элементы матричной алгебры получаются на основе произведения двух полугрупп.

Докажем скрытую неассоциативность активностей в электродинамике. Рассмотрим комбинаторное произведение столбцов на строки:

$$\left(a\overset{k}{\underset{cl}{\times}}b\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\left(a\overset{k}{\underset{cl}{\times}}b\right)\overset{k}{\underset{cl}{\times}}c=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

$$\left(b\overset{k}{\underset{cl}{\times}}c\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$a\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\left(b\overset{k}{\underset{cl}{\times}}c\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\left(a\overset{k}{\underset{cl}{\times}}b\right)\overset{k}{\underset{cl}{\times}}c\neq a\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\left(b\overset{k}{\underset{cl}{\times}}c\right).$$

О кодировании подгрупп

Мы имеем совокупности матриц:

$$a_1,b_1,e_1,f_1,-a_1,-b_1,-e_1,-f_1,$$
$$a_2,b_2,e_2,f_2,-a_2,-b_2,-e_2,-f_2,$$
$$a_3,b_3,e_3,f_3,-a_3,-b_3,-e_3,-f_3.$$

Каждая полочка факторгруппы по диагональным матрицам Картана формирует свои матричные элементы. Получим соответствия:

$$a_1,b_1,e_1,f_1\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$a_2,b_2,e_2,f_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix},$$

$$a_3,b_3,e_3,f_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Если построить их графические изображения, получим квадрат в центре портрета группы заполнения, а также два прямоугольника, расположенные вверх от квадрата и в сторону от него:

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & b_3 & c_1 \\ \hline e_2 & e_1 & a_1 & f_2 \\ a_2 & b_1 & f_1 & b_2 \\ \hline c_2 & f_3 & a_3 & c_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|cc|c} E & & & c_1 \\ \hline & & & \\ & & & \\ \hline c_2 & & & c_3 \end{array}\right),\left(\begin{array}{c|cc|c} & & & \\ \hline & e_1 & a_1 & \\ & b_1 & f_1 & \\ \hline & & & \end{array}\right),\left(\begin{array}{c|cc|c} & & & \\ \hline e_2 & & & f_2 \\ a_2 & & & b_2 \\ \hline & & & \end{array}\right),\left(\begin{array}{c|cc|c} & e_3 & b_3 & \\ \hline & & & \\ & & & \\ \hline & f_3 & a_3 & \end{array}\right).$$

Анализ дает подгруппы проективной группы:

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & b_3 & c_1 \\ \hline e_2 & e_1 & a_1 & f_2 \\ a_2 & b_1 & f_1 & b_2 \\ \hline c_2 & f_3 & a_3 & c_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & b_3 & c_1 \\ e_2 & e_1 & a_1 & f_2 \\ & & & \\ \hline & & & \end{array}\right),\left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & & \\ \hline e_2 & e_1 & & \\ a_2 & b_1 & & \\ \hline c_2 & f_3 & & \end{array}\right),\left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & & \\ \hline & & a_1 & f_2 \\ & & f_1 & b_2 \\ \hline c_2 & f_3 & & \end{array}\right),\left(\begin{array}{c|cc|c} E & & & c_1 \\ \hline e_2 & & & f_2 \\ & b_1 & f_1 & \\ \hline & f_3 & a_3 & \end{array}\right).$$

В них к четверке симметричных матриц, образующих самостоятельную подгруппу, присоединены пара симметричных матриц и пара антисимметричных матриц.

С физической точки зрения они могут описывать гравитационные предзаряды с электрическими свойствами.

Их наглядное представление, которое следует из структуры группы заполнения, и которое нужно принимать в рамках принципа реализации всех возможностей, формирует пару «колонн» и пару «чаш».

Если предположить, что физические изделия способны быть закодированы структурой группы заполнения (эта версия достаточно необычна), то совершенно по-другому можно воспринимать отношения между объектами. И механизмы распознавания, и оценки по принципу «замок-ключ», и сами реакции будут разными, зависимыми от **модели кодирования** их той системой, в которую они встроены.

Реперы с алгоритмом кодирования выступают, с физической точки зрения, в роли качественно новых физических устройств (базовых объектов). *Реперы с алгоритмом кодирования* выступают, с математической точки зрения, в роли качественно новых математических объектов.

«Колонны» и «чаши» в группе заполнения могут выступать в роли «генетического кода» для структуры физических объектов, а также их свойств.

Присоединение пары элементов, принадлежащих полочке факторгруппы, наделяет объект свойствами всей группы. Так, получим, например, объекты, произведение которых порождает все элементы группы:

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & b_3 & c_1 \\ \hline e_2 & e_1 & a_1 & f_2 \\ a_2 & b_1 & f_1 & b_2 \\ \hline c_2 & f_3 & a_3 & c_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & b_3 & c_1 \\ \hline e_2 & & & f_2 \\ e_1 & b_1 & f_1 & a_1 \\ \hline & & & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & e_1 & \\ \hline e_2 & & a_1 & \\ a_2 & & f_1 & \\ \hline c_2 & f_3 & b_1 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & & \\ \hline e_2 & & a_1 & f_2 \\ a_2 & & f_1 & b_2 \\ \hline c_2 & f_3 & & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & b_3 & c_1 \\ \hline e_2 & & & f_2 \\ & b_1 & f_1 & \\ \hline & f_3 & a_3 & \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & b_3 & c_1 \\ \hline e_2 & e_1 & a_1 & f_2 \\ a_2 & b_1 & f_1 & b_2 \\ \hline c_2 & f_3 & a_3 & c_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|cc|c} E & e_3 & & \\ \hline e_2 & e_1 & & f_2 \\ & & f_1 & \\ \hline & f & & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc|c} E & & b_3 & \\ \hline & & a_1 & \\ a_2 & b_1 & & b_2 \\ \hline & & a_3 & \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc|c} E & & & c_1 \\ \hline & & a_1 & \\ a_2 & & & \\ \hline c_2 & & a_3 & c_3 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc|c} E & & b_3 & \\ \hline & & & f_2 \\ & b_1 & f_1 & b_2 \\ \hline & f_3 & & \end{array}\right) \ldots$$

Из этих матриц следуют варианты формирования новых физических объектов. При учете возможности повторных произведений количество таких элементов меньше.

Есть шесть наборов по пять матриц, при повторных произведениях которых получается вся группа. Эти наборы содержат обязательно хотя бы одну матрицу c_i, пару симметричных матриц (e_j, f_k), пару антисимметричных матриц (a_l, b_n). Наборы содержат по представителю от каждой подгруппы с симметричными матрицами (используем 3 матрицы), а также пару из подгрупп с антисимметричными матрицами (используем 2 матрицы). Полная совокупность указанных матриц задаёт всю группу заполнения.

Заметим, что свойства чисел и операций отображают опыт, накопленный ранее и начатый при анализе простейших изделий и процессов. Современный этап развития науки нацелен на исследование и практическое овладение сложными и особо сложными изделиями и процессами. Для них понадобятся как новые числа, так и новые операции.

Более того, требуются новые алгоритмы и новая логика мышления и поведения. С ними могут быть ассоциированы новые чувства и ощущения.

Матриты

Матрицы в форме плоских математических объектов выражают, с точки зрения физической интерпретации, тот факт (в силу принципа софистатности математических и физических изделий), что базовые физические изделия плоские.

Именно тот факт, что плоскими могут быть базовые элементы частиц света, является основой для конструирования структурированных силовых трубок, соединяющих элементарные частицы. Такая точка зрения присутствовала в идеях теоретиков начала 20 века. В частности, её придерживался Томсон Д.Д. Он полагал, что электрон и протон в атоме водорода связаны реальной физической силовой трубкой. При её разрыве она превращается в тор, который двигается поперек своей плоскости. Так была заложена идея о частицах света как составных элементах для физических силовых трубок. При этом можно было говорить о покоящемся свете. Если силовая трубка имеет поперечные плоские структуры, она напоминает собой аналог «книги». Но ещё более она похожа на реальный физический осциллятор.

Из практики следует, что физические имеют объекты сложную структуру и объем. Опираясь на принцип софистатности физических и математических объектов, мы вправе искать вариант объединения плоских матриц, а также некоторых других объектов, в объемный математический объект. Назовем такой объект матритом: объединение плоских матриц.

Физическое тело в форме кристаллической решетки представляет собой пример реального устройства, которое желательно моделировать матритами.

Любые кристаллы могут рассматриваться как совокупность объединенных матриц. А это и есть матрит. Атомы и молекулы могут быть представлены в виде «блоков» со своим математическим выражением. Их соединение даст функциональный матрит.

Матриты естественны в модели калибровочного описания реальности. Так, например, задан тензор калибровочных полей в виде

$$F_{\mu\nu}^{a} = \frac{\partial A_{\mu}^{\ a}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial A_{\nu}^{\ a}}{\partial x^{\mu}} + f_{bc}^{a}\left(A_{\mu}^{b} A_{\nu}^{c} - A_{\nu}^{b} A_{\mu}^{c}\right), a = 1,2...$$

Несколько однотипных выражений объединены в одно изделие. Мы знаем, что так «демократично» учитываются внутренние симметрии в теории однотензорных, безмассовых полей. Реальные изделия сложнее. Они не укладываются в рамки данного простого варианта. В силу указанных обстоятельств следует развивать теорию матритов и практику их приложений.

Коэффициенты связности можно считать системой величин, которая соответствует концепции матрита.

Уравнения динамики конечной совокупности материальных точек тоже представляет собой вариант описания, который принадлежит к категории матритных моделей.

Учтем тот факт, что в реальном физическом изделии есть связи между частями этого изделия. Кроме этого, изделие функционально как по частям, так, возможно, и в целом. Оно для чего-то предназначено и по определенному алгоритму выполняет возложенные на его функции.

Матриты, если мы обеспечиваем их софистатность с физическими изделиями, тоже обязаны иметь некие аналогии со свойствами физических объектов. Если мы рассматриваем матрит как совокупность плоских матриц, мы вправе каждой плоской матрице придавать свои свойства. Кроме этого, должен быть указан алгоритм соединения плоских матриц в изделие, равно как и алгоритм их функций и практического назначения. Неассоциативность может быть свойством как отдельного блока матрита, так и всего изделия. Матриты должны быть классифицированы по семействам с учетом той совокупности свойств, которая им придана.

Мы знаем два пути моделирования структур и их активностей: элементы матричной алгебры получаются аддитивно из матриц, ассоциированных с гравитационными предзарядами, а также они следуют мультипликативно из матриц, ассоциированных с электрическими предзарядами.

Задача состоит в том, чтобы *для каждой матрицы указать систему возможностей их образования, а также систему свойств, ассоциированных с такими образованиями.*

Физика за пределами концепции поля.

Неассоциативность, по сути предлагаемого анализа, есть реализация трансфинитности изделий, их структур и активностей.

Неассоциативность может сыграть существенную роль в развитии концепции поля до уровня модели, допускающей разнообразные физические изделия со структурой и активностями.

Однако для этого требуется выйти за пределы концепции поля.

Формально так можно поступить по-разному. В частности, используя различные алгоритмы квантования, от модели поля мы переходим к модели системы квазичастиц.

В формализме объективации, предложенном для электромагнитного поля, главную роль играют базовые физические изделия. Они структурны с физической точки зрения в следующем смысле: в их состав входят пары гравитационных и пары электрических предзарядов, а также другие изделия, которые содержат указанные свойства частично. Кроме этого, следует учесть физические объекты, соединяющие между собой указанные предзаряды. На их роль претендуют ориентированные одномерные «струны», способные к изменениям и к продольным и поперечным соединениям.

В рамках принятой идеологии нужны *сведения о количестве и качестве указанных элементов, задающих структуру объектов.* Задание их свойств определит активность объектов.

И структура, и активность подчинены системе операций. В частности, это могут быть однократные и многократные комбинаторные операции. Дополнительно важную роль играют операции перестановки и изменения знаков.

Физика жизни каждого изделия будет задана через систему отношений между структурными составляющими изделия, их свойствами, возможностями взаимных превращений. Ранговые движения изделий и их частей в уровневом и трансфинитном пространствах, равно как и факторы, управляющие ими, будут играть в анализе важную роль.

Безусловно, следует учесть, что будут обнаружены качественно новые свойства объектов и их поведения. Они могут иметь прямую или косвенную аналогию с теми свойствами, которые известны нам из анализа поведения «грубой» материи.

Отметим возможные ростковые точки моделей трансфинитной материи:

- свойства уровневых пространств только софистатны известным уровневым пространствам, но могут иметь свои, принципиально новые черты,
- симметрии решений, найденные для одного уровня материи, могут быть неприменимы для других уровней материи,
- концепция свойств материи, привычная для сложившейся практики, может потребовать коррекции в новой практике,
- алгоритмы измерения, разработанные для материи одного уровня, недостаточны для измерения свойств трансфинитного изделия,
- полнота картины описания для одного уровня материи недостаточна для полноты описания трансфинитных объектов с трансфинитными свойствами,
- совпадение расчета и эксперимента как основной фактор верификации практики будет дополняться другими приемами верификации как в угоду чистому расчету, так и чистому эксперименту, не описываемому расчетом,
- то, что не раскрыто и недостижимо на данном уровне практики выступает в роли ростковых точек для новой практики,
- логика, используемая ранее, может быть недостаточна для охвата логики трансфинитной реальности,
- по-новому потребуется подойти к анализу сознания и чувств физических объектов, принимая в качестве начала аналогии софистатность со свойствами и поведением человека и сообществ людей,
- новое может быть радикально отличным от известного, не просто продолжая практику, а выводя её на многообразия с другой размерностью и другими свойствами,
- возможны и такие изделия и поведение, которые недоступны сознанию и чувствам человека, а также практике любого сообщества людей, поскольку мы принадлежим определенному уровню материи...

Покажем, что возможен новый вариант преодоления «пропасти» между структурной и бесструктурной теорией. Он основан на записи уравнений механики вязкой жидкости в форме обобщенной калибровочной модели. Эксперименты доказали её структурность. Она физически основана на атомах и молекулах. Если калибровочные поля, которые по сложившейся физической идеологии, не имеют структуры, аналогичны с уравнениями жидкости, мы получаем дополнительные аргументы для поисков структурного описания полей.

Рассмотрим алгоритм вывода уравнений динамики вязкой жидкости, основанный на построении закона сохранения для пары тензоров.

Пусть один тензор зависит от произведений компонент скорости, а другой тензор зависит от произведений компонент скорости на производные от компонент скорости по координатам.

Тогда

$$N^{ij}=\begin{pmatrix} u^1u^2 & u^1u^2 & u^1u^3 & u^1u^0 \\ u^2u^1 & u^2u^2 & u^2u^3 & u^2u^0 \\ u^3u^1 & u^3u^2 & u^3u^3 & u^3u^0 \\ u^0u^1 & u^0u^2 & u^0u^3 & u^0u^0 \end{pmatrix}, \Phi^{ij}=\begin{pmatrix} \partial_1u^1 & \partial_1u^2 & \partial_1u^3 & \partial_1u^0 \\ \partial_2u^1 & \partial_2u^2 & \partial_2u^3 & \partial_2u^0 \\ \partial_3u^1 & \partial_3u^2 & \partial_3u^3 & \partial_3u^0 \\ \partial_0u^1 & \partial_0u^2 & \partial_0u^3 & \partial_0u^0 \end{pmatrix}.$$

Применим к ним требование закона сохранения энергии и импульса, в форме

$$\partial_i\left(\alpha N^{ij}+\beta\Phi^{ij}\right)=f^j.$$

Легко показать, что в этом случае мы приходим к уравнениям движения вязкой жидкости. Модифицируем их. Запишем тензоры второго ранга через симметричные и антисимметричные слагаемые:

$$N^{ij}=0{,}5\left(N^{ij}-N^{ji}\right)+0{,}5\left(N^{ij}+N^{ji}\right)=N^{ij}(1)+N^{ij}(2),$$

$$\Phi^{ij}=0{,}5\left(\Phi^{ij}-\Phi^{ji}\right)+0{,}5\left(\Phi^{ij}+\Phi^{ji}\right)=\Phi^{ij}(1)+\Phi^{ij}(2).$$

Получим

$$N^{ij}(1)=0{,}5\begin{pmatrix} 0 & u^1u^2 & u^1u^3 & u^1u^0 \\ u^2u^1 & 0 & u^2u^3 & u^2u^0 \\ u^3u^1 & u^3u^2 & 0 & u^3u^0 \\ u^0u^1 & u^0u^2 & u^0u^3 & 0 \end{pmatrix}_{[\,]}, \Phi^{ij}(1)=\begin{pmatrix} 0 & \partial_1u^2 & \partial_1u^3 & \partial_1u^0 \\ \partial_2u^1 & 0 & \partial_2u^3 & \partial_2u^0 \\ \partial_3u^1 & \partial_3u^2 & 0 & \partial_3u^0 \\ \partial_0u^1 & \partial_0u^2 & \partial_0u^3 & 0 \end{pmatrix}_{[\,]},$$

$$N^{ij}(2)=0{,}5\begin{pmatrix} u^1u^2 & u^1u^2 & u^1u^3 & u^1u^0 \\ u^2u^1 & u^2u^2 & u^2u^3 & u^2u^0 \\ u^3u^1 & u^3u^2 & u^3u^3 & u^3u^0 \\ u^0u^1 & u^0u^2 & u^0u^3 & u^0u^0 \end{pmatrix}_{\{\,\}}, \Phi^{ij}(2)=0{,}5\begin{pmatrix} \partial_1u^1 & \partial_1u^2 & \partial_1u^3 & \partial_1u^0 \\ \partial_2u^1 & \partial_2u^2 & \partial_2u^3 & \partial_2u^0 \\ \partial_3u^1 & \partial_3u^2 & \partial_3u^3 & \partial_3u^0 \\ \partial_0u^1 & \partial_0u^2 & \partial_0u^3 & \partial_0u^0 \end{pmatrix}_{\{\,\}}.$$

Знаки коммутаторов и антикоммутаторов в качестве нижних индексов под обозначениями тензоров с числами означают, что мы имеем дело с коммутаторами и антикоммутаторами, обозначенными в выражениях.

Так, например, получим

$$\left[\partial_1u^2\right]=\partial_1u^2-\partial_2u^1, \left\{u^1u^2\right\}=u^1u^2+u^2u^1\ldots.$$

Уравнения механики вязкой жидкости запишутся в виде, учитывающем коммутаторы и антикоммутаторы:

$$\partial_i\left(\alpha\left(N^{ij}(1)+N^{ij}(2)\right)+\beta\left(\Phi^{ij}(1)+\Phi^{ij}(2)\right)\right)=f^j.$$

Они задают «электромагнитную» -- антисимметричную и «гравитационную» -- симметричную части динамики. Действительно,

$$\partial_i\left(\alpha N^{ij}(1)+\beta\Phi^{ij}(1)\right)+\partial_i\left(\alpha N^{ij}(2)+\beta\Phi^{ij}(2)\right)=f^j.$$

В иной форме они выглядят так:

$$\partial_i\widetilde{F}^{ij}+\partial_i\widetilde{G}^{ij}=f^j.$$

Здесь выполнена модификация тензорной структуры уравнений с учетом четырехметрики. Тогда

$$\widetilde{F}^{ij}=\alpha N^{ij}(1)+\beta\Phi^{ij}(1), \widetilde{G}^{ij}=\alpha N^{ij}(2)+\beta\Phi^{ij}(2).$$

Дифференциальные выражения содержат модель калибровочных полей вида

$$F_{kl}=\left(\partial_ku_l-\partial_lu_k\right)+\left(u_ku_l-u_lu_k\right)=\left(\partial_ku_l-\partial_lu_k\right)+\lfloor u_k,u_l\rfloor.$$

Она композиционно деформирована скалярами α,β. Они содержат также модифицированную часть гравитационных полей в представлении потенциала вида

$$G_{kl} = (\partial_k u_l + \partial_l u_k) + (u_k u_l + u_l u_k) = (\partial_k u_l + \partial_l u_k) + \{u_k, u_l\}.$$

Она деформирована теми же скалярами α, β. Если величины u^k есть компоненты четырехвектора, то коммутатор равен нулю. Мы получаем тогда абелево калибровочное поле. Антикоммутатор в этом случае не равен нулю. С физической точки зрения это обстоятельство означает, что симметричное «гравитационное» слагаемое подчинено более сложным законам, чем несимметричное «электромагнитное».

Принимая идеологию и алгоритмы построения неабелевых калибровочных полей, разработанные в теории классического и квантового поля, мы можем предложить обобщение модели вязкой жидкости. Выразим компоненты скорости в матричном виде, полагая

$$u_k = a \tau_\alpha u_k^\alpha .$$

Здесь, следуя модели калибровочных полей, τ_α задают генераторы группы симметрии. Модель жидкости, состоящей из нескольких компонент u_k^α, можно назвать «неабелевой» моделью.

Ситуацию можно формально обобщить, исходя из концепции неассоциативного множества, порождаемого из матричной группы на основе комбинаторной операции. Генераторы группы симметрии τ_α можно дополнить генераторами σ_α группы, подчиненной поэлементному произведению Адамара, состоящей из элементов множества, неассоциативного по комбинаторному произведению.

Коррекция модели элементами неассоциативного множества соответствует, с физической точки зрения, тому, что мы вводим в жидкость «примеси», поведение которых может отличаться от поведения жидкости.

С математической точки зрения применяется обобщение величин в форме

$$u_k = a \tau_\alpha u_k^\alpha + b \sigma_\beta u_k^\beta .$$

Этот вариант можно обобщить таким образом, чтобы модель допускала самостоятельное рассмотрение электромагнитного и гравитационного «поля». Обобщенные уравнения механики жидкости в форме обобщенных законов сохранения энергии и импульса выглядят так:

$$u_k = a \tau_\alpha u_k^\alpha + b \sigma_\beta u_k^\beta ,$$

$$\partial_i \left[\Omega^{ik} \Omega^{jl} \left(\alpha_1 (\partial_k u_l - \partial_l u_k) + \beta_1 (u_k u_l - u_l u_k) \right) \right] + \partial_i \left[\tilde{\Omega}^{ik} \tilde{\Omega}^{jl} \left(\alpha_2 (\partial_k u_l + \partial_l u_k) + \beta_2 (u_k u_l + u_l u_k) \right) \right] = F^j .$$

Здесь величины Ω^{ik} обозначают компоненты тензора, ассоциированного со свойствами среды. Они сложны и их нужно находить из дополнительных соображений. Формальная система уравнений содержит слагаемые, которые дополняют коммутаторы и антикоммутаторы алгебры дифференциальными выражениями. Кроме этого, вводятся элементы, соединяющие полученные звенья математической модели между собой. Физическая модель построена в форме дифференциального закона сохранения для полученного «комплекса» величин. *Достаточно сложны «конвективные слагаемые» физических моделей, особенно если матричное произведение заменено на комбинаторное.*

Если $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \beta_2 = 0$, вместо силы ввести плотность электрического тока, мы получаем стандартную теорию электромагнитных явлений:

$$\Omega^{ik} \Omega^{jl} \nabla_i \left((\nabla_k A_l(e) - \nabla_l A_k(e)) \right) = S^j .$$

Если $\alpha_1 = \alpha = 0{,}5\alpha, \beta_1 = \beta_2 = 0{,}5\beta, F^i$ (плотность силы), мы имеем дело с формой уравнений механики вязкой жидкости.

Если $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = \beta_2 = 1$ и вместо силы ввести плотность массового тока, мы получаем теорию гравитационных явлений, выраженную через четырехпотенциал и симметричный тензор второго ранга:

$$\tilde{\Omega}^{ik}\tilde{\Omega}^{jl}\nabla_i\left(\left(\nabla_k A_l(m)+\nabla_l A_k(m)\right)+\left(A_k(m)A_l(m)+A_l(m)A_k(m)\right)\right)=Q.$$

При использовании римановой связности получим обобщенную, формальную систему уравнений для движения жидкости в ковариантном виде:

$$\Omega^{ik}\Omega^{jl}\nabla_i\left(\alpha_1\left(\nabla_k u_l-\nabla_l u_k\right)+\beta_1\left(u_k u_l-u_l u_k\right)\right)+$$
$$+\tilde{\Omega}^{ik}\tilde{\Omega}^{jl}\nabla_i\left(\alpha_2\left(\nabla_k u_l+\nabla_l u_k\right)+\beta_2\left(u_k u_l+u_l u_k\right)\right)=F^i.$$

Вывод. *Уравнения движения вязкой жидкости, уравнения неабелевых и абелевых электромагнитных полей, уравнения неабелевой и абелевой гравитации, заданные через четырехпотенциалы, можно представить в едином виде.*

Обобщение формализмов Лагранжа и Гамильтона

Теперь три разных явления представлены как частные случаи единой системы модифицированных уравнений вязкой жидкости. С этих позиций электромагнетизм и гравитация соответствуют движению некоторой «тонкой» жидкости. Состояния и динамика электромагнитных и гравитационных полей выражают разные стороны поведения этой жидкости, а также объектов, движущихся в ней. Они согласованы с макроскопическими условиями, в которых находится «тонкая» жидкость.

Вывод уравнений основан не на формализме Лагранжа или Гамильтона. Модель строится на «законе сохранения» в форме

$$\nabla_i\Pi^{ij}=R^j.$$

Здесь Π^{ij} соответствует сумме *слагаемых механического типа*:

- параметров ранговых движений в форме скоростей, ускорений и т.д.,
- произведений компонент на производные от них, допуская высшие порядки производных.

Величина ∇_i соответствует ковариантной производной по метрике, связывающей величины, указанные выше, в единый комплекс.

У данного подхода на первом плане стоит создание изделия, выступающего как объект дифференцирования. От рассмотрения скалярного Лагранжиана, который в теории поля «далек» от механики, мы перешли к тензору второго ранга. Его выбор основан на механических представлениях о поведении исследуемых субстанций.

Четырехпотенциалы электромагнитного и гравитационного полей, стандартно используемые в теории лагранжева поля, заменяются на механические составляющие. В простейшем случае их выражения через четырехскорости получим

$$A_p=\sigma_{ps}\pi^{sr}u_r.$$

Упрощенный вариант неэффективен как для теории, так и для эксперимента. Без выяснения механической сущности «полей» трудно эффективно влиять на них.

Электродинамика Максвелла на полугруппе идеалов

Среди разнообразных форм уравнений Максвелла одной из самых значимых для продвижения к физической структуре электромагнитного поля стало мономиальное представление. Пара кватернионов оказалась *достаточной для формирования идеи* о наличии четырёх предзарядов, из которых образуются частицы света.

В силу принципа реализации всех возможностей, уравнения Максвелла могут иметь представление на полугруппе идеалов. Рассмотрим такую возможность.

Проекционные матрицы выражаются через идеалы:

$$\Pi^1 = x(1)y(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots \Pi^4 = x(4)y(4).$$

Уравнения Фарадея-Ампера запишутся в форме

$$\left(\partial_1 \Pi^1 \Psi + \partial_2 \Pi^2 \Psi + \partial_3 \Pi^3 \Psi + \partial_4 \Pi^4 \Psi\right) P = 0, P = col(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1).$$

Здесь

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & E_z & -E_y & -iB_x \\ -E_z & 0 & E_x & -iB_y \\ E_y & -E_x & 0 & -iB_z \\ iB_x & iB_y & iB_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Величины, входящие в волновую функцию, могут быть выражены через четырехпотенциал:

$$\begin{pmatrix} -\partial_\tau & -i\partial_z & i\partial_y & -i\partial_x \\ i\partial_z & -\partial_\tau & -i\partial_x & -i\partial_y \\ -i\partial_y & i\partial_x & -\partial_\tau & -i\partial_z \\ i\partial_x & i\partial_y & i\partial_z & -\partial_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ -i\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_x + iB_x \\ E_x + iB_x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\partial_\tau & i\partial_z & -i\partial_y & -i\partial_x \\ -i\partial_z & -\partial_\tau & i\partial_x & -i\partial_y \\ i\partial_y & -i\partial_x & -\partial_\tau & -i\partial_z \\ i\partial_x & i\partial_y & i\partial_z & -\partial_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ -i\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_x - iB_x \\ E_x - iB_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Их можно записать сокращенно

$$\pi^i \partial_i A = \vec{E} + i\vec{B}, \kappa^i \partial_i A = \vec{E} - i\vec{B}.$$

Указанные матрицы получаются при **многократном превращении идеалов**. Так, например, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применение к этим матрицам знаковой группы дает матрицы π^i, κ^i.

Вывод 1: Возможно выражение уравнений Максвелла через идеалы при применении многократных их превращений.

Вывод 2: Путь выражения уравнений Максвелла через полугруппу идеалов более сложен, чем через группу мономиальных матриц.

Неассоциативные множества, порождаемые матричными группами

Рассмотрим мономиальные матрицы, которые образуют группу по матричному произведению:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Применим к этим матрицам комбинаторное произведение $\overset{k}{\underset{lc}{\times}}$, а также к тем новым матрицам, которые получаются вследствие этого произведения.

Так, при комбинаторном умножении матриц на единичную матрицу получим циклические условия вида

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ldots$$

Умножая их комбинаторно, получим расширенную совокупность, в которой к указанным матрицам добавлены три набора по четыре матрицы:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

Они образованы из первой четверки посредством комбинаторного произведения. Можно говорить, что они образуют *второй уровень* неассоциативного семейства. При комбинаторных произведениях матриц второго уровня получаются матрицы *третьего уровня.*

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},$$

Так, получим, например

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

К ним присоединена нулевая матрица:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Неассоциативное множество является многоуровневым по алгоритму образования. Таких алгоритмов несколько. Анализ показывает, что эффективными для порождения неассоциативного множества могут подгруппы, основанные на матричном произведении. Однако элементы факторгруппы по нормальной подгруппе могут быть ещё более эффективными.

Четыре матрицы, образующие группу по матричному произведению, превращаются в совокупность, состоящую из 29 матриц. Это обстоятельство кажется естественным, потому что свойства комбинаторного произведения «богаче» свойств матричного произведения. Новое множество неассоциативно по стандартному комбинаторному произведению: $\left(a\overset{k}{\underset{lc}{\times}}b\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}c\neq a\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(b\overset{k}{\underset{lc}{\times}}c\right)$. В силу этого обстоятельства оно не образует группу.

Ситуация меняется, если элементы неассоциативного множества рассматривать как генераторы групп с поэлементным произведением по Адамару. Так, например, получим однопараметрические подгруппы вида

$$g(A)=\begin{pmatrix}a&0&0&0\\a&1&0&0\\a&0&1&0\\a&0&0&1\end{pmatrix}\underset{A}{\times}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\a&1&0&0\\a&0&1&0\\a&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0&0&0\\a^2&1&0&0\\a^2&0&1&0\\a^2&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\lim_{a\to0}\frac{dg(A)}{da}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\ldots$$

Анализируемое множество неассоциативно по комбинаторной операции. Однако оно ассоциативно по матричной операции и по произведению Адамара. Следовательно, мы имеем дело с качественно ***новым объектом****: многоуровневым множеством элементов, подчиненных множеству математических операций*.

Можно говорить о **пространстве операций**, если каждой самостоятельной операции сопоставить измерение операторного пространства.

В силу такого сочетания обстоятельств возникает **предположение,** что *физические теории, основанные на группах с матричным произведением, представляют собой только фрагменты возможной более глубокой теории, ассоциированной со структурой неассоциативного множества матриц с комбинаторной операцией. В этом множестве могут дополнительно действовать другие операции.*

Заметим, что многоуровневость структуры множеств, как и система операций естественны для концепции матритов: **объемных «матриц»** с системой свойств, присоединенных к его граням и ребрам.

Из анализа структуры группы Галилея, Лорентца, сигруппы Гало следует, что они получаются из 8 мономиальных матриц. Эти 8 матриц образуются из пары матриц

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow E,c_1,c_2,c_3,\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow e_1,a_1,b_1,\,f_1$$

после применения знаковой группы. Применим к данной паре матриц стандартную комбинаторную операцию. Получим таблицу произведений:

$$\left(\begin{array}{c||cccc}
\underset{lc}{\overset{k}{\times}} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}
\end{array}\right),$$

В этой таблице представлены результаты произведений исходной пары матриц и тех матриц, которые получаются из них при комбинаторном произведении.

При последующих произведениях получаются новые матрицы:

$$
\left(\begin{array}{c|cccc}
\overset{k}{\underset{lc}{\times}} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}
\end{array}\right),
$$

$$
\left(\begin{array}{c|cccc}
\overset{k}{\underset{lc}{\times}} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}
\end{array}\right),\ldots
$$

Анализ показал, что все комбинаторные произведения порождают множество, состоящее из 29 матриц, которые указаны выше. Это стало ясно после получения пары матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которые дополнили пару исходных матриц до четырёх матриц, порождающих 29 матриц.

Вывод: *Неассоциативные множество, описывающие структуру объектов, могут совпадать с неассоциативными множествами, описывающими процессы, в которых эти объекты участвуют.*

Превращение пары матриц в пару

По идеологии физического преобразования объектов пара матриц обязана превращаться в другую пару матриц. В случае матричного произведения роль второй матрицы выполняет единичная матрица, в случае комбинаторного произведения роль второй матрицы выполняет идеал. Например, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Три исходных составляющих физики

Мы приходим к пониманию новой возможности начальной стадии формирования физических объектов: их происхождения из пары слагаемых и управляющего свойства в форме комбинаторной операции.

ГИПОТЕЗА. *Базовые (начальные) физические изделия и их свойства происходят от соединения трех составляющих:*

- *свободных объектов, способных к самовоздействию,*
- *наличию парных отношений для свободных объектов,*
- *управления, основанного на комбинаторной операции.*

В соответствии с принятыми допущениями, рассмотрим множество из двух элементов: единичной матрицы и матрицы с элементами, равными единице по второй диагонали. Оно подчинено таблице матричных произведений вида

$$\left(\begin{array}{c|cc} \times & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right).$$

Выполним комбинаторное произведение этих элементов, а также новых элементов, которые оно порождает. Получим расширенную таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc}
\overset{k}{\underset{lc}{\times}} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

Элементы данной таблицы образованы из пары исходных элементов. Среди них представлены свободные составные объекты в форме единичной матрицы. Матрица с заполненной второй диагональю сопоставляется нами с гравитационным предзарядом. Кроме этого, комбинаторная операция порождает четыре матрицы, которые мы сопоставляем с электрическими предзарядами. Этих элементов достаточно для того, чтобы сопоставлять им новые составные объекты. Мы можем получать их, используя закон композиции элементов согласно полученной таблице. Детально этот аспект конструирования рассмотрен ниже.

С физической точки зрения матрицы математически представляют реальные базовые изделия. Произведению матриц соответствует взаимодействие физических объектов.

Мы получаем алгоритм конструирования изделий для любого уровня материи. Нужно взять несколько базовых объектов и операцию, способную порождать другие объекты. Для базовых объектов, имеющих две составляющие, таких объектов только два. Порождающей операцией является комбинаторная операция.

Проблема состоит в том, как присоединить к матрицам операции. С практической точки зрения наиболее эффективным кажется использование **новых математических объектов**:

- *системы матриц, ассоциированной с физическими объектами,*
- *системы операций, присоединенных к этим матрицам в соответствии с известными или ожидаемыми свойствами взаимодействий физических объектов,*
- *согласованных правил использования матриц и операций,*
- *дополнительных величин, требуемых по условиям реализуемой или ожидаемой практики.*

Поясним ситуацию. В соответствии с принципом софистатности мы рассматриваем физические объекты как сложные изделия, наделенные совокупностью физических свойств. Совокупности физических свойств соответствует совокупность математических свойств, задаваемых, в частности, системой операций для матриц.

Интуитивно такая возможность была понятна давно. В рамках использования комбинаторной операции она получила дополнительные аргументы и частичное математическое выражение.

Величины, используемые в физической теории, дифференциальные или интегральные операторы выражают математически (прямо или косвенно) другие свойства физических объектов. Согласно идеологии моделирования трансфинитной реальности, мы всегда будем иметь дело с конечным числом свойств реальности, охватывая несколько уровней материи. По этой причине модели обязаны строиться так, чтобы они допускали возможности их углубления и расширения. Не может быть абсолютных моделей.

Соотношение неассоциативного множества и групп

Рассматриваемое неассоциативное множество получит систему дополнительных свойств, если к указанным 29 матрицам (среди которых есть нулевая матрица) применить знаковую группу

$$\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}.$$

Матрицы заданы с точностью до произведения на (-1). Поэтому общее число матриц в неассоциативном множестве равно $N = 28\cdot 8 + 1 = 225$.

Среди них есть матрицы, принадлежащие проективной унимодулярной группе в мономиальном представлении, которая достаточна для записи в матричном виде произвольной физической теории. В частности, она содержит пару кватернионов и тройку антикватернионов. На этой основе удобно записывать в матричном виде уравнения электродинамики и физической теории гравитации, используя матричное произведение.

Аналогичный вид имеет теория электромагнетизма при использовании комбинаторного произведения (раздел «Комбинаторные операции в структуре уравнений электродинамики»).

Поскольку структура уравнений физической теории гравитации аналогична структуре уравнений электромагнетизма, их также можно записать на основе использования комбинаторной операции.

Комбинаторная операция не чужда структуре физических теорий.

Специфика комбинаторных свойств мономиальной группы

Алгоритм, рассмотренный выше, можно применить к канонической мономиальной группе. Она состоит из 24 матриц.

Их комбинаторные произведения порождают систему немономиальных матриц:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\ldots$$

Вся совокупность матриц, у которых задано распределение 4 значимых элементов по 16 местам, определяется формулой

$$N = C_4^{16} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 140\cdot 13 = 1820.$$

Для канонической мономиальной группы комбинаторная операция является средством вычисления возможных распределений значимых элементов по совокупности возможных пустых мест. Поскольку учитываются все варианты в их групповом выражении, они задают совокупность из $24\times 24 = 576$ элементов, которая не исчерпывает всех возможностей комбинаторики. Комбинаторная операция дает всю совокупность матриц размерности четыре, содержащих четыре занятых места.

Идеология объектов, ассоциированных с матрицами, трактует каждую матрицу как систему отношений в четверке базовых объектов. На их роль в модели частиц света претендуют пара электрических предзарядов и пара гравитационных предзарядов. С физической точки зрения ситуация эта кажется простой.

С математической точки зрения, индуцированной анализом матриц, порождаемых комбинаторным произведением, ситуация сложна. Действительно, физический анализ конечной системы, состоящей из четырех объектов, требует анализа и использования свойств

$$N(0) = 1820$$

физических объектов, изготовленных из четырех «одинаковых» предзарядов.

Поскольку речь идет о соединении в базовые объекты пары электрических и пары гравитационных предзарядов, вариантов будет намного больше. Нужно умножить полученное число на количество предзарядов и количество кодонов (различных троек, изготовленных из предзарядов). Получим

$$N(P) = 4\cdot 64 = 256.$$

Конечные физические системы, как показывает комбинаторная операция, богаты на отношения:

$$N(*) = N(0)\cdot N(P) = 1820\cdot 256 = 465920.$$

Физика взаимодействия будет зависеть от того, сколько и каких объектов взаимодействуют между собой в конкретной ситуации.

Конечно, эти объекты могут иметь некоторое динамичное статистическое распределение.

Комбинаторное произведение в структуре фактор-группы

Рассмотрим структуру канонической мономиальной группы с точки зрения комбинаторного произведения. Эта проблема появляется в связи с тем, что элементы этой группы распределяются по парам с точки зрения группы перестановок значимых элементов. Действительно, три элемента класса получаются из исходного элемента согласно своему правилу перестановок:

$$A_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix} \ldots B_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix} \ldots$$

.

$$C_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix} \ldots E_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix} \ldots$$

$$D_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{pmatrix} \ldots F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{pmatrix} \ldots$$

Выполним комбинаторное произведение указанных матриц на себя. При пятикратном произведении они переходят в себя, проходя три стадии превращений. При трехкратном произведении матрицы левого ряда трансформируются в матрицы правого ряда. Матрицы правого ряда имеют такое свойство только в первой строке.

Получим таблицу комбинаторных произведений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{5(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{5(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{5(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{5(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{5(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{5(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{3(k)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}^{3(k)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{3(k)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}^{3(k)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Алгоритм взаимодействия базовых объектов

Два положения инициируют обсуждение данной темы. С одной стороны, мы понимаем, что математической величине соответствует некий физический объект. Если матрицы сопоставляются объектам, то их количество будет равно количеству возможных физических объектов. С другой стороны, в силу принятого принципа реализации всех возможностей, такой вариант множественности количества и свойств базовых объектов соответствует трансфинитной практике.

В силу указанных обстоятельств математическое применение комбинаторной операции можно рассматривать как физический способ классификации всей совокупности объектов, а также косвенного описания свойств их взаимодействий. Поскольку комбинаторная операция имеет много граней, следует ожидать алгоритма описания многогранности взаимодействий.

Изучим комбинаторную операцию в обратном порядке: *что нужно сделать физическим объектам, которые представлены матрицами и которые подчинены комбинаторному произведению, чтобы действия объектов были согласованы с результатом расчета?*

Концентрируя практику многих столетий, мы понимаем, что как структуры, так и активности **управляются информацией**. В зависимости от того, как проявляет себя поток информации, какова реакция на него, как его можно изменить, когда он эффективен, зависит практически все.

В этой связи возникает потребность по-новому «взглянуть» на взаимодействие.

Несложно видеть ряд граней физического взаимодействия базовых объектов:

- объект «осознаёт себя» как упорядоченное изделие с определенной структурой (математически это выражается строками, столбцами, значимыми элементами матрицы, их величинами),
- каждый объект подчинен ориентации произведения (левые матрицы управляющие, правые матрицы подчинены им),
- объект может оставаться неизменным в отсутствие воздействий, что означает наличие некоторого устойчивого обмена с окружением,
- объект способен «считывать информацию» с окружения и других объектов,
- объект способен выделить свои слагаемые в отдельное множество, подчиненное своим законам взаимодействия,
- объект способен принять информацию (и свойства) другого объекта, реализуя их частично или полностью,
- объект способен из принятого дара изготовить новое изделие, следуя некоторому алгоритму,
- объект способен изменить каждое самостоятельное слагаемое с учетом перемен той части, которая им была получена,

- объект способен изменить себя в соответствии с принятыми правилами сборки,
- объект изменяет слагаемые, соответствующие второму объекту
- после всего этого объект сохраняет себя в новом качестве.

Схема комбинаторного произведения включает в себя все указанные 11 элементов. Действительно, получим, например, в случае матричного произведения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \; \frac{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \; \frac{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \; \frac{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае матричного произведения каждая строка первой матрицы умножается на элементы транспонированной второй матрицы. Сначала первая матрица разлагается на строки, затем трансформируется вторая матрица. Затем проводится изменение строк первой матрицы, она снова собирается в самостоятельный объект. Остальные слагаемые становятся свободными, что выражено единичной матрицей.

Комбинаторное произведение сложнее. Оно реализуется по другому алгоритму, схожему с предыдущим. Действительно, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \; \frac{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \; \frac{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \; \frac{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь уже строки первой матрицы сначала разделены, как и столбцы второй матрицы. Столбцы второй матрицы превращены в самостоятельные матрицы согласно циклической перестановке значимых элементов вправо (возможен, конечно, цикл влево). Затем проводится модификация строк первой матрицы с последующей сборкой в самостоятельную матрицу. Она комбинаторно умножена (в этом состоит её физическая свобода) на матрицу, ассоциированную с электрическим предзарядом.

Заметим, что единичных матриц в варианте матричного произведения может быть много. Они задают условия сохранения рассматриваемого объекта. Объект «живет» в «море» свободных объектов. Если объект изготовлен из гравитационных и электрических предзарядов, то это «море» образуют именно они.

В случае комбинаторного произведения «море» образовано в основном «электрическими предзарядами». Это совсем другой физический вариант.

Заметим, что комбинаторное произведение матриц, у которых заполнены только четыре места, может реализовываться через матрицы с большим числом заполненных мест. Другими словами, *комбинаторное произведение вовлекает в «свою игру» объекты. не принадлежащие исследуемому семейству.*

Комбинаторное произведение для сигруппы Гало

При анализе релаксационных процессов в электродинамике выяснилось, что процесс подчинен системе групп. Такой объект назван сигруппой Гало и обозначается Sg. Название выражает факт наличия в сигруппе группы Галилея и группы Лорентца. Сигруппа Гало на плоскости задается выражением

$$Sg = g_1 \cdot g_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}}\begin{pmatrix} 1 & v \\ \frac{v}{c^2}w_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{v^2}{c^2}w}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 0 \\ \dfrac{(w-w_1)\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} 1 & v \\ w\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Выразим элемент $g_{2,3}$ в виде произведения элементов двух новых групп:

$$g_{2,3} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{v^2}{c^2}w}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 0 \\ \dfrac{(w-w_1)\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{(w-w_1)\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}w} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{v^2}{c^2}w}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_2 \cdot g_3.$$

Задача состоит в том, чтобы проанализировать это тройное произведение, используя комбинаторную операцию.

Сигруппа Гало имеет аддитивное разложение по группе Лорентца вида

$$\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & v \\ \frac{v}{c^2}w & 1 \end{pmatrix} = \frac{\gamma_1}{\gamma}\gamma\begin{pmatrix} 1 & v+\sigma\alpha \\ \frac{v+\sigma\alpha}{c^2} & 1 \end{pmatrix} + \frac{\gamma_1}{\gamma}\gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{c^2}(w-1)-\frac{\sigma\alpha}{c^2} & 1 \end{pmatrix} - \frac{\gamma_1}{\gamma}\gamma\begin{pmatrix} 1 & \sigma\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{g}_1 + \bar{g}_2 + \bar{g}_3.$$

Аддитивное разложение по группе Галилея выглядит проще:

$$\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & v \\ \frac{v}{c^2}w & 1 \end{pmatrix} = \gamma_1\begin{pmatrix} 1 & v+\sigma\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{c^2}w & 1 \end{pmatrix} - \gamma_1\begin{pmatrix} 1 & \sigma\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сигруппа Гало может быть элементов некоторого более общего множества, для которого выполняется условия равенства числа составляющих для мультипликативного и аддитивного представления. Тогда

$$g_1 g_2 g_3 \Leftrightarrow SG \Leftrightarrow \bar{g}_1 + \bar{g}_2 + \bar{g}_3.$$

Упростим анализ, оставив без внимания множители перед матрицами. Тогда три матрицы, представляющие группы, используемые для мультипликативного выражения сигруппы Гало, имеют простой вид:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Перемножим их матрично и комбинаторно. При матричном произведении получим

$$(g_1 \times g_2) \times g_3 = \begin{pmatrix} 1 + a\sigma & a \\ b + \sigma & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + a\sigma)\eta & a\eta^{-1} \\ (b + \sigma)\eta & \eta^{-1} \end{pmatrix},$$

$$(g_1 \times g_2) \times g_3 = g_1 \times (g_2 \times g_3).$$

При комбинаторном произведении получим

$$\left(g_1 \overset{k}{\underset{lc}{\times}} g_2 \right) \overset{k}{\underset{lc}{\times}} g_3 = \begin{pmatrix} 1 + a\sigma & a + \sigma \\ 1 & b \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1 + a\sigma)\eta & (a + \sigma)\eta \\ b\eta^{-1} & \eta^{-1} \end{pmatrix},$$

$$g_1 \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \left(g_2 \overset{k}{\underset{lc}{\times}} g_3 \right) = \begin{pmatrix} \eta & a\eta \\ (b + \sigma)\eta^{-1} & (1 + b\sigma)\eta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Различия между комбинаторным и матричным произведениями таковы:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a\eta^{-1} - (a + \sigma)\eta \\ (b + \sigma)\eta - b\eta^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} a\sigma\eta & a(\eta^{-1} - \eta) \\ (b + \sigma)(\eta - \eta^{-1}) & -b\sigma\eta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Математическая сущность этого различия пока остается непонятной. Первая разность по своей структуру принадлежит полугруппе. По этой причине для разности может не быть закона сохранения.

Заметим, что разность зависит от размерности используемых матриц. Так, например, получим для матриц размерности 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_1 b_2 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 1 + b_1 a_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{LCP}{\times}} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_1 b_2 & a_1 + b_2 \\ b_1 + a_2 & 1 + b_1 a_2 \end{pmatrix},$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 0 & b_2 - a_2 \\ a_2 - b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матриц размерности 4×4 вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \alpha_1 \times \alpha, B = \alpha_1 \overset{k}{\underset{lcp}{\times}} \alpha_2$$

получим

$$B-A=\begin{pmatrix} 0 & b_2 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Комбинаторная операция обнаруживает зависимость результата расчета от размерности используемых матриц.

Сигруппу Гало можно рассматривать как произведение по Адамару группы Лорентца и группы, треугольной по Адамару Действительно, получим

$$\gamma\begin{pmatrix} 1 & a \\ wb & 1 \end{pmatrix}=\frac{\gamma}{\gamma_0}\gamma_0\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}\underset{A}{\times}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ w & 1 \end{pmatrix}.$$

Единицей для новой группы будет выражение

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведения по Адамару в канонической мономиальной группе порождают генераторы псевдовращений. Если мы умножим исходные элементы на знаковую группу, дополнительно получим все генераторы вращений. Так, например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\underset{A}{\times}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\underset{A}{\times}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ldots$$

Группы в данном случае образованы совокупностью одинаковых элементов. Они обратны себе и их можно считать единицами группы. В соединении с элементами других групп они задают генераторы псевдовращений.

Проективная унимодулярная группа при использовании произведения Адамара превращается в прямую сумму групп с элементами родственной структуры. Каждая такая группа имеет факторгруппу, состоящую их элементов исходной группы, умноженных на минус единицу. Действительно, множество элементов разбивается на классы типа

$$A\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$B\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Элементы A задают группу по произведению Адамара, элементы B формируют полочку факторгруппы.

Следовательно, классификация структуры множества сущностно зависит от операций, используемых в множестве. С физической точки зрения это обстоятельство задает «код поведения» объектов при их взаимодействии.

В случае произведения по Адамару, равно как и при действии комбинаторной операции, каноническая мономиальная группа дополняется немономиальными составляющими.

При матричном произведении новых структурных объектов не появляется.

Рассмотрим матричное произведение элементов проективной унимодулярной группы. Будем считать, что мы имеем дело с элементами алгебры, соответствующей однопараметрическим подгруппам.

Действительно,

$$\begin{pmatrix}1&0&a&0\\0&1&0&a\\a&0&1&0\\0&a&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&b&0\\0&1&0&b\\b&0&1&0\\0&b&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ab&0&a+b&0\\0&1+ab&0&a+b\\a+b&0&1+ab&0\\0&a+b&0&1+ab\end{pmatrix}\ldots$$

Аналогичные результаты получаются для других матриц с аналогичной структурой. Так обосновывается еще один способ получения элементов проективной унимодулярной группы: через построение однопараметрических генераторов симметрии с заполнением нескольких мест у матриц, представляющих группы.

Комбинаторная трансформация уравнений электродинамики

Ранее было показано, что уравнения Фарадея-Ампера можно записать через комбинаторную производную таким образом, что их вид не изменится. Так была обоснована корректность применения комбинаторной операции в физике. Система уравнений выглядит так:

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}$$

$$\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+$$

$$+\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\right\}\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}$$

$$\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}\begin{pmatrix}E_x-iB_x\\E_y-iB_y\\E_z-iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=0\,.$$

Учтем, что в уравнениях Фарадея-Ампера матрицы заданы с точностью до умножения их на единичную матрицу:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Меняя матричную операцию на комбинаторную, получим два варианта расширения уравнений Фарадея-Ампера. Такой алгоритм пригоден для любых уравнений физики, записанных в матричном виде на матричной операции. Тогда

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, E\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$E\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, E\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$E\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Уравнения Фарадея-Ампера получат вид:

$$\left\{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}$$

$$\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+$$

$$+\left\{\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\right\}\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}$$

$$\overset{k}{\underset{\xi}{\times}}\begin{pmatrix}E_x-iB_x\\E_y-iB_y\\E_z-iB_z\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=0\,.$$

Их векторная форма такова:

$$\partial_t\left(B_x + B_y + B_z\right) = 0,$$
$$\partial_x(E_z + iB_x) + \partial_z E_y = 0,$$
$$\partial_y(E_x - E_z) + i\partial_y B_y = 0,$$
$$\partial_x E_y + \partial_z(E_x + E_z) = 0.$$

Эти уравнения косвенно свидетельствуют о наличии «гравитационных» свойств у электромагнитного поля.

Поскольку мы вправе умножить матрицы на единичную матрицу многократно, допускается несколько форм трансформации физических уравнений. Так, при комбинаторном произведении полученных выше матриц на единичную матрицу получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При подстановке этих матриц в уравнения электродинамики мы получим новую систему уравнений. Согласно принципу реализации всех возможностей, такими будут свойства электромагнитного поля, дополнительные к известным свойствам.

Анализ показал, что таких возможностей изменения при простейшем последовательном произведении на одну и ту же матрицу, только четыре. Комбинаторное произведение в рассматриваемом случае многократного произведения на пятом «шаге» дает исходную матрицу.

В случае умножений слева и справа вариантов больше. Их нужно конкретно анализировать.

На рассматриваемом примере обнаруживается трансфинитность физических моделей. Модель, заданная в матричном виде, трансфинитности не допускает. Трансфинитной в таких моделях выступает форма. Комбинаторная операция допускает систему трансформаций, в них трансфинитна как форма, так и содержание. По этой причине система комбинаторных моделей способна прямо или косвенно выразить трансфинитность структуры физических изделий и их свойств.

Поскольку используемые матрицы можно рассматривать также как матричные произведения других матриц. Заменяя матричную операцию на комбинаторную операцию, мы получаем **множество моделей** трансфинитной реальности, ассоциированных с конкретной матричной моделью.

Такое расширение моделей можно реализовывать во всех разделах физики, а также в химии и в биологии.

Привычка доверять только экспериментам в трансфинитной реальности недостаточна. Поэтому новые уравнения могут дать логические и прагматические следствия, которые выходят за рамки условий и возможностей наших экспериментов. Это вовсе не означает, что полученные новые решения не соответствуют реальности. *Реальность, как нам кажется, по своим возможностям превосходит математические возможности используемых моделей.* Другое дело, как эти возможности раскрываются и как они используются. Укажем несколько возможностей.

Вариант 1. Заметим, что возможно расширение любой физической теории на неассоциативное множество, полученное из ассоциативного множества, основанного на матричной операции. Для этого следует дополнить пространство и время новой координатой, к дифференциалам которой присоединить матрицу неассоциативного множества и ассоциированную с ней волновую функцию.

Так, уравнения Фарадея-Ампера вида

$$\alpha^k \partial_k \Psi + \beta^k \partial_k \overline{\Psi} = 0$$

допускают обобщение с матрицами из неассоциативного множества π^a, а также с производными от дополнительных переменных:

$$\alpha^k \partial_k \Psi + \beta^k \partial_k \overline{\Psi} + \pi^a \partial_a \Phi = 0.$$

Вариант 2. Дополнительные возможности для прояснения сущности физических изделий и явлений мы обнаруживаем, когда принимаем в рассмотрение вариант активной не тензорной деформации кватернионов и антикватернионов, используемых в физической модели.

Например, мы заменяем канонические числа на функции:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти функции могут быть подчинены дополнительным динамическим условиям. Например, они могут быть составляющими 4-векпора или же интегралами от некоторых других функции или решениями интегро-дифференциальных уравнений...

Используя указанный вариант деформации, мы приходим к новым (скрытым) уравнениям электродинамики. Действительно, используя за основу спинорную форму стандартных уравнений электродинамики Максвелла, получим, например

$$-\alpha_1 \partial_y \left(E_z - iB_z\right) + \alpha_1 \partial_z \left(E_y - iB_y\right) + \frac{(-i)}{c} \alpha_1 \partial_t \left(E_x - iB_x\right) -$$

$$-\alpha_2 \partial_y \left(E_z + iB_z\right) + \alpha_2 \partial_z \left(E_y + iB_y\right) - \frac{(-i)}{c} \alpha_2 \partial_t \left(E_x + iB_x\right) = 0.$$

Группируя слагаемые, получим уравнение вида

$$\left\{\left(\partial_y E_z - \partial_z E_y\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}\right\} - i\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)}\left\{\left(\partial_y B_z - \partial_z B_y\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}\right\} = 0.$$

В этом варианте стандартные слагаемые модели Максвелла дополнены комплексными слагаемыми. Их роль зависит от коэффициента

$$\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Другие составляющие системы уравнений изменятся в своей мнимой части по-разному, что зависит от соответствующих коэффициентов, выражающих деформацию кватернионов.

Можно сказать так: *на систематическое решение накладывается «комплексная рябь».* Она может быть достаточно сложна. По своей сути, как мы понимаем, она выражает систему отношений между базовыми изделиями, которые входят в состав частиц света.

Предложенное обобщение можно использовать, заменив матричные операции на комбинаторные.

Вариант 3. Обратим внимание на специфику изучаемой физики. Рассмотрим физическое тело конечных размеров, движущееся с постоянной скоростью $\vec{v}$ и с вращением, момент количества движения $\vec{M}$ которого направлен по вектору скорости. Тогда для характеристики вращения можно ограничиться заданием только частоты вращения ω.

Известно, что в отсутствие внешних воздействий скорость, и момент количества движения остаются неизменными.

Величины $(\vec{v},\omega)$ в динамике взаимодействия будут как-то согласованы между собой. Измениться может как скорость, так и частота вращения. Если есть дополнительные условия, то будет существовать некоторая связь между скоростью и частотой.

При анализе поведения света имеет место согласованное изменение скорости и частоты. Условия для него задаются системой уравнений электродинамики.

Заметим, что физическое единство скорости и частоты является эмпирическим требованием для математических объектов, ему соответствующих.

На их роль, **с одной стороны**, претендуют четырехскорости, если частота «относится» к их четвёртой компоненте, а стандартный вектор скорости «динамизируется» посредством четырехмерного интервала. Получим

$$u^k = \frac{dx^k}{d\theta}, k = 1,2,3,4, d\theta = \left(\theta_{ik} dx^i dx^k\right)^{1/2}.$$

На их роль, **с другой стороны**, претендуют кватернионы, посредством которых реализуется соединение вектора и скаляра. Анализ, выполненный ранее, позволил так выразить фундаментальные свойства частиц света. Они движутся со скоростью $\vec{v}$ перпендикулярно плоскостям, образованным электрическими предзарядами в форме нейтральных объектов, названных элонами. Сами предзаряды вращаются вокруг центра с частотой ω. Так скорость $\vec{v}$ и частота ω соединяются в физически единый «комплекс». Он проявляет себя на практике.

На их роль, **в-третьих**, претендуют кватернионные единицы, представленные матрицами размерности 4×4. Как известно, через них в форме $G-$модуля можно выразить уравнения электродинамики. Так электродинамика посредством динамических уравнений учитывает единство скоростей и частот частиц света.

В силу указанных обстоятельств неассоциативность может проявить себя тогда, когда у частиц света (элементарных частиц) учитываются не только механические, но и немеханические свойства.

Вариант 4. В физической модели могут явно использоваться 1-коциклы. Действительно, пусть элементы группы постоянны. Тогда

$$\partial_i\left(g^i(1)a - a\right)\Psi + \partial_i\left(g^i(2)a - a\right)\overline{\Psi} = 0 \Rightarrow a\left(g^i(1)\partial_i\Psi + g^i(2)\partial_i\overline{\Psi}\right) = 0.$$

Этот факт означает, что уравнения Максвелла могут быть записаны через 1-коциклы. По этой причине к анализу электродинамики можно привлечь средства гомологической алгебры. Однако в случае неассоциативного множества модель усложняется. Для получения совпадения расчета с экспериментом потребуются дополнительные сведения.

В общем случае физическую модель можно рассматривать как изделие, необходимое и достаточное для теоретического эксперимента.

Свойства матричных групп с комбинаторной операцией

Пример 1. Изучим возможности, следующие из комбинаторного произведения элементов группы. Выберем в качестве примера группу с элементами вида

$$g(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma(i) & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда *последовательные произведения* элементов этой группы будут заданы матрицами вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 1 & \sigma(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B \\ \sigma(1) & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

соответственно для четного и нечетного количества сомножителей. Выражения для слагаемых A, B задаются рекуррентными соотношениями:

$$A(i) = A(i-1) + B(i-1)\sigma(i),$$
$$B(i) = B(i-1) + A(i-1)\sigma(i).$$

Принимая условие одинаковости $\sigma(i) = \sigma, i = 1,2,3,\ldots$, получим

$$A(1) = 1, \qquad B(1) = 0,$$

$$A(2) = 1, \qquad B(2) = \sigma,$$

$$A(3) = 1 + \sigma^2, \qquad B(3) = 2\sigma,$$

$$A(4) = 1 + 3\sigma^2, \qquad B(4) = 3\sigma + \sigma^3,$$

$$A(5) = 1 + 6\sigma^2 + \sigma^4, \qquad B(5) = 4\sigma + 4\sigma^3,$$

$$A(6) = 1 + 10\sigma^2 + 5\sigma^4, \qquad B(6) = 5\sigma + 10\sigma^3 + \sigma^5,$$

$$A(7) = 1 + 15\sigma^2 + 15\sigma^4 + \sigma^6, \qquad B(7) = 6\sigma + 20\sigma^3 + 6\sigma^5 \ldots$$

Заметим, что для $\sigma = 1$ после первого произведения, когда $A(2) = 1, B(2) = 1$, последующие значения на каждом шаге получаются умножением на двойку:

$$A(i) = B(i), i = 2,3,4\ldots \Rightarrow 1,2,4,8,16,32\ldots$$

Такое соответствие формально похоже на некоторую формулу для расчета спектра энергии некоторой физической системы. Они могут реализоваться не только в грубой материи, но на каком-либо уровне материи.

Если элементы группы на каждом шаге различны, формулы будут более сложными, допуская разные спектральные соответствия. Так, получим

$$\begin{aligned}
&A(1) = 1, B(1) = 0, A(2) = 1, B(2) = \sigma(2),\\
&A(3) = 1 + \sigma(2)\sigma(3), B(3) = \sigma(2) + \sigma(3),\\
&A(4) = 1 + \sigma(2)\sigma(3) + \sigma(2)\sigma(4) + \sigma(3)\sigma(4),\\
&B(4) = \sigma(2) + \sigma(3) + \sigma(4) + \sigma(2)\sigma(3)\sigma(4),\\
&A(5) = 1 + \sigma(2)\sigma(3) + \sigma(2)\sigma(4) + \sigma(3)\sigma(4) +\\
&+ \sigma(2)\sigma(5) + \sigma(3)\sigma(5) + \sigma(4)\sigma(5) + \sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5),\\
&B(5) = \sigma(2) + \sigma(3) + \sigma(4) + \sigma(2) + \sigma(2)\sigma(3)\sigma(5) +\\
&+ \sigma(2)\sigma(4)\sigma(5) + \sigma(3)\sigma(4)\sigma(5),\\
&A(6) = A(5) + B(5)\sigma(6), B(6) = B(5) + A(5)\sigma(6).....
\end{aligned}$$

Если спектр энергий некоторых объектов подчинен комбинаторной операции на группе, ассоциированной с объектами, то его будет легко посчитать, даже если объект сложен.

Если же рассмотреть *комбинаторное произведение разных групп* с учетом возможной комбинаторики их произведения, то так можно описать многие состояния.

Данный алгоритм допускает разнообразные деформации групп, а также динамику генераторов и коэффициентов. В итоге анализа могут получиться динамические модели изменения энергии объектов, построенные на совершенно новой математической основе при использовании свойств неассоциативных множеств.

Анализируемая возможность базируется на паре аргументов:

- процессы, следуя анализу явлений в электродинамике, подчинены системе групп – сигруппе, которая представляет собой матричное произведение групп,
- есть комбинаторное произведение, свойства которого следует применить к системе групп.

В силу указанных обстоятельств можно ожидать, что как состояния физических объектов, так и изменения состояний будут описываться **группами, подчиненными комбинаторным операциям.** В этом случае мы имеем дело с новым математическим объектом. Его приложения к физике представляют собой предмет исследования. Приложения не очевидны.

При повторных комбинаторных произведениях исходного элемента матричной группы на себя получается *характеристическое семейство* матриц:

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & b\\ c & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & c\end{pmatrix}\right\}.$$

Они превращаются друг в друга при умножении их слева на исходную матрицу, которая стоит в данном списке на первом месте. Во всех остальных случаях получаются матрицы общего вида

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Данное множество некоммутативно и неассоциативно. Семейство матриц, с точки зрения их структуры, имеет пять уровней. В нем есть *подмножество, сохраняющее свою структуру при умножении слева на одну матрицу данного семейства*.

С физической точки зрения, сопоставляя матрицам объекты, мы можем утверждать, что объект «удерживает слева» другие объекты, порожденные им при комбинаторном произведении, образуя аналог «семьи».

Любые другие взаимодействия меняют и исходный объект необратимо, расширяя его свойства. Другими словами, имеет место фактор развития: при воздействии справа объекты меняют свое качество, получая индивидуальное аддитивное дополнение.

Только один объект остается при умножении слева в семействе как «старший ребенок» в семье. Он частично сохраняет характеристическое семейство.

Пример 2. Изучим свойства матричной группы, представленной выражением

$$g=\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Комбинаторное произведение даёт цепочку равенств вида

$$\begin{pmatrix}\sigma(1) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}\sigma(2) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma(1)\sigma(2) & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}\sigma(3) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае мы получаем при тройном произведении элемент, принадлежащий группе, хотя при двойном произведении получается элемент со структурой

$$p=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

На первый взгляд мы имеем дело с двухуровневой системой. Рассмотрим свойства нового элемента. При матричном произведении получим

$$\begin{pmatrix} \alpha(1) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha(2) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha(2) \begin{pmatrix} \alpha(1) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При комбинаторном произведении получим

$$\begin{pmatrix} \alpha(1) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \begin{pmatrix} \alpha(2) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha(2) \begin{pmatrix} \alpha(1) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha(2) \begin{pmatrix} \alpha(1) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \begin{pmatrix} \alpha(3) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha(2) \begin{pmatrix} 1+\alpha(1)\alpha(3) & \alpha(1)+\alpha(3) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} B+bA & A+bB \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots$$

Система по структуре слагаемых становится трехуровневой. Рассмотрим произведения. Получим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \underset{lc}{\overset{k}{\times}} & \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right).$$

Данное множество замкнуто по комбинаторной операции. Оно некоммутативно и неассоциативно.

В нем есть ассоциативное подмножество (полугруппа) с элементами

$$\mu = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(1) \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \left(\mu(2) \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \mu(3) \right) = \left(\mu(1) \times \underset{lc}{\overset{k}{\mu}}(2) \right) \underset{lc}{\overset{k}{\times}} \mu(3).$$

Оно образует также полугруппу по матричному произведению.

Комбинаторное расширение треугольной группы

Пусть элемент группы есть матрица вида

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Четырём параметрам поставим в соответствие четыре однопараметрические подгруппы:

$$g_+(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_-(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_+(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_+(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы, задающие базис касательного пространства, таковы:

$$a_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполним их матричное произведение.

$$a_+ \times a_- = c, a_- \times a_+ = 0 \quad a_+ \times b = a_+, b \times a_+ = 0 \quad a_- \times b = 0, b \times a_- = a_-,$$
$$a_+ \times c = a_- \times c = c \times a_+ = c \times a_- = b \times c = c \times b = 0.$$

Выполним их комбинаторное произведение.

$$a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- = 0, a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_+ = a_- \quad a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b = 0, b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_+ = b \quad a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b = b, b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- = 0,$$
$$a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c = a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c = c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_+ = c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- = b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c = c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b = 0.$$

Следовательно, комбинаторное произведение меняет алгебру базиса касательного пространства группы.

В случае матричного произведения получим пару алгебр:

$$a_+ \times a_- - a_- \times a_+ = c, \quad a_+ \times b - b \times a_+ = a_+, \quad a_- \times b - b \times a_- = -a_-,$$
$$a_+ \times c - c \times a_+ = a_- \times c - c \times a_- = b \times c - c \times b = 0.$$

$$a_+ \times a_- + a_- \times a_+ = c, \quad a_+ \times b + b \times a_+ = a_+, \quad a_- \times b + b \times a_- = -a_-,$$
$$a_+ \times c + c \times a_+ = a_- \times c + c \times a_- = b \times c + c \times b = 0.$$

В случае комбинаторного произведения получим другую пару алгебр:

$$a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- - a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_+ = -a_-, \quad a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b - b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_+ = -b, \quad a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b - b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- = b,$$
$$a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c - c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_+ = a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c - c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- = b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c - c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b = 0.$$

$$a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- + a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_+ = a_-, \quad a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b + b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_+ = b, \quad a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b + b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- = b,$$
$$a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c + c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_+ = a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c + c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- = b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c + c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b = 0.$$

Происходят и другие изменения. Рассмотрим произведение базисов на себя.

Матричное произведение задано выражениями:

$$a_+ \times a_+ = a_- \times a_- = c \times c = 0, b \times b = b.$$

Комбинаторное произведение задано выражениями:

$$a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_+ = a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- = c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c = 0, b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b = r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили новый генератор, дополняющий генераторы матричной группы. Анализ произведений данного генератора с начальными, получим ещё один генератор вида

$$q = a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Новых генераторов, индуцированных взаимными произведениями в данной системе генераторов, комбинаторное произведение не дает. Мы получили теперь новую систему базисов касательного пространства:

$$a_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так реализован переход от четырехмерного пространства к шестимерному. Элемент группы, которая перестала быть треугольной, соответствующий данной системе базисов, имеет вид

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ \beta & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Новая группа *ассоциирована с комбинаторным произведением* базисных элементов исходной треугольной группы. Есть ещё одна группа. Она соответствует пятимерному пространству параметров:

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Она получается как частный случай группы в шестимерном пространстве параметров, когда $\beta = 0$.

Комбинаторные произведения начальных базисных элементов с новыми базисными элементами имеют некоторую специфику.

Так, получим

$$a_+ \overset{k}{\underset{lc}{\times}} r = q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_+ = a_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Только в данном случае коммутатор и антикоммутатор задаются через пару базисных элементов. Во всех остальных случаях этого нет. Действительно, получим

$$a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} r = 0, r \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- = 0, \quad c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} r = a_+, r \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c = 0, \quad b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} r = 0, r \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b = a_-, \quad q \overset{k}{\underset{lc}{\times}} r = c, r \overset{k}{\underset{lc}{\times}} q = 0,$$

$$a_- \overset{k}{\underset{lc}{\times}} q = 0, q \overset{k}{\underset{lc}{\times}} a_- = 0, \quad c \overset{k}{\underset{lc}{\times}} q = a0, q \overset{k}{\underset{lc}{\times}} c = 0, \quad q \overset{k}{\underset{lc}{\times}} r = c, r \overset{k}{\underset{lc}{\times}} q = 0, \quad q \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b = 0, b \overset{k}{\underset{lc}{\times}} q = 0,$$

$$a_+ \overset{\mathrm{k}}{\underset{\mathrm{lc}}{\times}} q = a_+, q \overset{\mathrm{k}}{\underset{\mathrm{lc}}{\times}} a_+ = 0.$$

Данный пример иллюстрирует алгоритм построения расширенной группы, в которую вложена исходная группа.

В рассматриваемом случае мы обнаруживаем две группы, индуцированные новыми базисными элементами. Так, получим

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to g(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to g(q) = \begin{pmatrix} e^{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предложенное расширение группы, основанное на комбинаторной операции, не охватывает всех расширений исходной треугольной группы. Возможные диагональные и недиагональные генераторы

$$m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которые ассоциированы с подгруппами вида

$$g(m)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\beta\end{pmatrix},g(p)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\a&0&1\end{pmatrix},g(s)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&b&1\end{pmatrix},$$

порождают дальнейшие расширения.

Важно главное обстоятельство: действия комбинаторной операции на элементах группы, принадлежащих ассоциативному множеству, дает новые элементы, которые позволяют расширить группу.

Согласование ассоциативных и неассоциативных множеств

Используем в качестве ассоциативного объекта группу Паули, в которой операцией является матричное произведение. Применим к элементам группы комбинаторную операцию. Получим неассоциативное множество, которое содержит в себе исходное множество. Применим к полученному неассоциативному множеству матричную операцию. Рассмотрим специфику нового множества.

Упростим задачу, ограничив величину значимых элементов единицей.

Выполним комбинаторное произведение этих элементов, а также новых элементов, которые оно порождает. Получим таблицу грави-электрических взаимодействий (ГЭВ):

$$\left(\begin{array}{c|cccccc}
\overset{k}{\underset{lc}{\times}} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

Выполним матричное произведение данных элементов:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc}
\times & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

Данное ассоциативное множество содержит предыдущее неассоциативное множество, в котором есть ассоциативные тройки элементов. Так, выберем элементы

$$a=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Получим $(ab)c=a(bc)$.

В ассоциативном множестве есть шесть новых элементов:

$$\Pi\to\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

При комбинаторном или матричном произведении они не порождают новых элементов. Среди рассмотренных произведений отсутствуют четыре элемента:

$$\Lambda\to\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Для получения всей совокупности матриц нужно использовать минус единицы в указанных выражениях. Учесть их комбинаторику (с точностью до умножения матриц на минус единицу) легко.

Продолжая исследование вариантов соответствия физических объектов и математических изделий, обратим внимание на структуру таблиц произведений, основанных на матричном и комбинаторном произведении.

Ранее рассматривалась структура канонической мономиальной группы. Она имеет нормальную подгруппу A и смежные классы, обозначенные B,C,D,E,F. Таблица произведений для классов элементов выглядит так:

$$AA\Rightarrow A, BB, CC, DD\Rightarrow A, EF, FE\Rightarrow A.$$

Построим **геометрическую модель** для произведения матриц канонической мономиальной группы. Расположим элементы класса A в центре математической конструкции в виде ориентированной окружности с четырьмя выделенными точками на этой окружности. Посредством ориентации на замкнутой кривой мы выражаем факт, что при взаимном произведении элементы остаются в своем классе. Остальные классы представим отрезками кривых, соединенных с центральным кругом, содержащих четыре выделенных точки и имеющих ориентацию с направлением к центральному кругу. Так выражен факт наличия элементов в классах и то обстоятельство, что при их взаимном произведении получаются элементы класса A. Классы A,B,C самостоятельно образуют элементы класса A. Классы E,F устроены иначе: они образуют элементы класса A при взаимных произведениях. При произведении на себя классы E,F переходят друг в друга. Произведение элементов, принадлежащих разным классам, подчинено таблице:

$$CE, FC, DF\Rightarrow B, BF, EB, DE\Rightarrow C, FB, EC, CF\Rightarrow D,$$

$$BC, CD, DB, EE\Rightarrow F, DC, CB, BD, FF\Rightarrow E.$$

На этой основе можно изобразить «паутину связей» между элементами классов, которая будет соединять отрезки, содержащие элементы классов. В совокупности смежных классов есть некий «концентратор», представленный классами E,F. Они самостоятельными по произведению элементов на своих «полочках», а взаимные произведения на других «отрезках» принадлежат указанным множествам. Взаимное произведение элементов A,B,C на элементы E,F выступает в роли «смесителя» для элементов A,B,C. Другими словами, *«паутина связей» устроена нетривиально*. Она разделена на самостоятельные, согласованные между собой классы отношений. Взаимные произведения элементов смежных классов и класса A перемешивают элементы внутри этих классов:

$$AB,BA \Rightarrow B, AC,CA \Rightarrow C, AD,DA \Rightarrow D, AF,FA \Rightarrow F, AE,EA \Rightarrow E.$$

Класс A обеспечивает перемешивание элементов по «полочкам», на которых расположены эти элементы. Классы E,F обеспечивают перемешивание элементов между «полочками».

Данная геометрическая модель допускает физическую аналогию с моделью электрического предзаряда. Согласно этой модели, инициированной исследованиями по структурной модели света, электрический предзаряд образован линейными объектами (рецепторами), образованными из ориентированных струн, которые способны соединяться в направлении центральной части единого объекта или в противоположном направлении. Рецепторы имеют соединения между собой, образующие «паутину поперечных связей». Поскольку рецепторы соединены между собой, они имеют взаимодействие между своими составляющими как в «продольном», так и в «поперечном» направлении. Такая картина отношений между физическими слагаемыми аналогична картине отношений в канонической мономиальной группе. Принимая такую возможность, мы приходим к задаче нахождения другой математической модели, которая была бы похожа на физическую модель гравитационного предзаряда. Согласно этой модели, инициированной также исследования по структурной модели света, гравитационный предзаряд имеет структуру, в которой есть замкнутые линейные ориентированные объекты, изготовленные из ориентированных струн. Они расположены в форме системы концентрических окружностей и состоят из конечного числа струн. Кроме этого, у них есть поперечные соединения, задающие реальные связи между этими окружностями.

Рассмотрим неассоциативное множество на примере таблицы ГЭВ. Множество состоит из трёх классов A,B,C. Поведение классов неассоциативного множества качественно отличается от поведения классов канонической мономиальной группы. Действительно, множество имеет центральную часть, состоящую из элементов C с законом произведения $C \underset{lc}{\overset{k}{\times}} C = C$. Этот закон, как и ранее, удобно представить в виде ориентированной окружности с выделенными точками. Кроме этого, есть два класса A,B с принципиально разным поведением: $BB \Rightarrow C, AA \Rightarrow B$. Соединим их в другую окружность, центр которой совпадает с центром окружности C, расположив элементы классов A,B друг за другом. Фактор замкнутости этой окружности выражается правилом произведения элементов A. Эта замкнутость не является полной, так как при взаимном произведении элементов класса B получаются элементы класса A. С другой стороны, в данной паре классов выполняются отношения вида $BA \Rightarrow A, AB \Rightarrow C$. Они «свидетельствуют» о том, что рассматриваемые классы соответствуют правилу нахождения на окружности, но это правило согласовано с правилом «падения» в центр. Другими законами, по сравнению с законами для канонической мономиальной группы, регулируются отношения с элементами класса C: $CA,CB \Rightarrow C, AC \Rightarrow A, BC \Rightarrow B.$ При воздействии элементов класса C на элементы классов A,B получаются элементы класса C. При произведении элементов классов A,B на элементы класса C получаются элементы классов A,B. Произошло «разделение функций» в классах элементов. Класс C не является аналогом нормальной подгруппы. Иначе ведут себя и элементы классов A,B.

Следовательно, *неассоциативное множество на комбинаторной операции подчинено законам, которые «ближе» к свойствам гравитационного предзаряда. Ассоциативное множество с матричной операцией «ближе» к свойствам электрического предзаряда*.

Поскольку электрический и гравитационный предзаряды имеют себе пары в форме античастиц, перед математиками ставится задача построения пары новых множеств, соответствующих другому электрическому и другому гравитационному предзарядам. По-видимому, одно новое множество должно быть ассоциативным, а другое новое множество должно быть неассоциативным.

Важно отметить, что при анализе предложенных проблем мы работаем в рамках трилинейных алгебраических систем. Их свойства значительно сложнее свойств билинейных алгебраических систем. В силу аналогии математических объектов и физических объектов **можно предположить, что физические модели предзарядов и их динамики базируются на алгебрах трилинейных систем.**

Полученное ассоциативное множество можно преобразовать в группу. При этом можно изменить произведение матриц таким образом, чтобы избавиться от элементов, которых нет в предыдущем неассоциативном множестве. Тогда мы *получим два множества с одинаковыми элементами, но с разными операциями.*

Введем произведение вида

$$a \overset{\sigma,\kappa}{\times} b = (1+\kappa)a \times b + \sigma a.$$

Выберем числа в соответствии с принадлежностью к классам согласно таблицам:

$$\kappa = \left(\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & -1 \\ c & 0 & -1 & 0 \end{array} \right), \sigma = \left(\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Класс a образуют матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, класс b образуют матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, класс c образуют матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Они представляют собой векторы матричной алгебры с базисом

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Новая таблица произведения элементов выглядит так:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc}
\times & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array} \right).$$

В изучаемом множестве есть аналог неассоциативной полугруппы. Рассмотрим таблицу произведений:

$$\left(\begin{array}{c|cccc}
\overset{k}{\underset{lc}{\times}} & i=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & j=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & k=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & l=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\\
\hline
i=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\\
j=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\\
k=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\\
l=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

Умножим вектор на вектор, используя комбинаторную операцию. Получим

$$\begin{aligned}
&\left(a_1 i + b_1 j + c_1 k + d_1 l\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(a_2 i + b_2 j + c_2 k + d_2 l\right) = \\
&= \left(a_1 c_2 + b_1 d_2\right) i + \left(a_1 d_2 + b_1 c_2\right) j + \\
&+ \left(a_1 a_2 + b_1 a_2 + c_1 a_2 \boxplus c_1 c_2 + c_1 d_2\right) k + \\
&+ \left(a_1 b_2 + b_1 b_2 + d_1 b_2 \boxplus d_1 c_2 + d_1 d_2\right) l.
\end{aligned}$$

Если все компоненты первого и второго «вектора» одинаковы, то в итоге получим новый вектор, который не только имеет другую длину, но и другое направление:

$$A\overset{k}{\underset{lc}{\times}}A = 2a^2 i + 2a^2 j + 5a^2 k + 5a^2 l.$$

Рассмотрим сейчас свойства полученных алгебр. Следуя формализму построения и анализа алгебр Ли, для этого нужно вычислить разности и суммы различных произведений. Получим новые алгебры. Их отличительной чертой является использование элементов, находящихся за пределами анализируемого множество. В случае комбинаторного произведения, получим, например

$$\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Разность произведений элементов неассоциативного множества выражена через элементы, которые не принадлежат неассоциативному множеству, а получены при матричном умножении его элементов.

Разность произведений элементов неассоциативного множества равна разности элементов ассоциативного множества.

В случае матричного произведения элементов расширенного ассоциативного множества получим, в частности

$$\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\right).$$

Сумма произведений отдельных элементов ассоциативного множества равна сумме элементов, не принадлежащих этому множеству.

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Коммутатор произведений подмножества ассоциативного множества задан элементами, ***не принадлежащими*** *этому множеству.*

Потребность построения алгебр с указанными свойствами вытекает из **свойств открытых систем**.

В них по-другому нужно решать задачи взаимодействия, в частности, энергетического обмена. Происходит так потому, что в модели используется не вся информация, а только её часть. Так происходит, очевидно, если явление многоуровневое, а модель одноуровневая. Отсутствие закона сохранения энергии может свидетельствовать о том, что часть энергии получается системой или уходит из системы на другие уровни материи.

Аналогично в случае рассматриваемых алгебр используются как элементы, принадлежащие ей, так и элементы, не принадлежащие ей. Соотношение между ассоциативными и неассоциативными множествами становится средством построения *подалгебр с необычными свойствами*.

Аддитивно представим матрицу размерности 2×2 через систему групп. Получим

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&d\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$g=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)-g(5).$$

Пяти группам будут поставлены в соответствие элементы алгебры вида

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Они получаются, если буквы рассматриваются как параметры группы, а затем матрицы дифференцируются по этим параметрам.

Заметим, что аналогичное представление группы в виде суммы однопараметрических подгрупп возможно для конечных квадратных матриц любой размерности.

Применим к элементам алгебры матричное и комбинаторное произведение. В обоих случаях мы не выйдем за пределы используемого множества. Но результаты произведений будут отличаться:

$$\left(\begin{array}{c|cccc}
\times & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\\ \hline
\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}
\end{array}\right),
\left(\begin{array}{c|cccc}
\overset{k}{\underset{lc}{\times}} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\\ \hline
\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

На этой основе появляется пара новых алгебр:

$$\alpha\times\beta-\beta\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\alpha=L(\varsigma),\ \alpha\times\beta+\beta\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\alpha=\widetilde{L}(\varsigma).$$

Выражения $L(\xi)$, $\widetilde{L}(\varsigma)$обозначают линейные функции от используемых элементов. Они порождают новые элементы.

Кроме этого, получим четыре алгебры:

$$\alpha\times\beta-\beta\times\alpha=L_1(\varsigma),\ \alpha\times\beta+\beta\times\alpha=L_2(\varsigma),\ \alpha\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\beta-\beta\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\alpha=L_3(\varsigma),\ \alpha\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\beta+\beta\underset{lc}{\overset{k}{\times}}\alpha=L_4(\varsigma).$$

Неассоциативное множество с парой операций порождает 6 алгебр и систему подалгебр. Подалгебры могут соответствовать некоторым дополнительным условиям, которым подчинены физические системы. *Поскольку расширения групп ассоциированы с когомологиями, должна существовать некоторая связь комбинаторной операции с когомологическими операциями.*

Рассмотрим матричное произведение канонических мономиальных матриц размерности 3×3:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc}
\times & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\
\hline
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{array}\right)$$

В их структуре есть нормальная подгруппа Aи смежный класс B:

$$A\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\},B\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Им соответствует таблица произведений классов:

$$AA \Rightarrow A, BB \Rightarrow A, AB, BA \Rightarrow A.$$

Ситуация выглядит иначе, если мы рассмотрим произведения матриц с точки зрения «разряда их структуры». Под разрядом структуры будем понимать единый алгоритм конструирования матриц из некоторых базовых матриц. В качестве примера рассмотрим три разряда:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве σ используем пару матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим таблицу произведений:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} \times & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ \hline a_1 & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ a_2 & a_2 & a_1 & a_1, c_1 & b_1 & a_1, c_1 & d_1 & c_2 & b_1 \\ b_1 & b_1 & a_2 & d_1 & a_2 & b_1 & d_2 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_2 & d_1 & c_2 & a_1 & b_2 & b_1 & a_2 & a_1 \\ c_1 & a_1, c_1 & a_2 & b_1 & b_2 & c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_2 & c_2 & b_1 & a_2 & d_1 & c_2 & a_1 & d_2 & d_1 \\ d_1 & d_1 & d_2, b_2 & a_1 & c_2 & d_1 & a_2 & b_1 & c_2 \\ d_2 & d_2 & d_1 & c_2 & a_1 & d_2 & b_1 & a_2 & a_1 \end{array} \right).$$

Из неё следует система отношений:

$$AA \Rightarrow A, AB \Rightarrow A, B, C, AC \Rightarrow A, C, D, AD \Rightarrow B, C, D,$$
$$BA \Rightarrow A, B, D, BB \Rightarrow A, C, D, BC \Rightarrow B, D, BD \Rightarrow A,$$
$$CA \Rightarrow A, C, B, CB \Rightarrow A, B, D, CC \Rightarrow C, CD \Rightarrow D,$$
$$DA \Rightarrow D, DC \Rightarrow A, C, DD \Rightarrow A, B, D, DD \Rightarrow A, B, C.$$

Простая система отношений в рамках модели факторгруппы становится сложной системой отношений при другом делении элементов группы на разделы по структурному принципу.

Рассмотрим комбинаторное произведение канонических мономиальных матриц. Получим произведения класса А.

AA

$$\left(\begin{array}{c|cccccc}
\begin{matrix} k \\ \times \\ lc \end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}
\end{array}\right)$$

Получим произведения класса B

BB

$$\left(\begin{array}{c|cccccc}
\begin{matrix} k \\ \times \\ lc \end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}
\end{array}\right)$$

Получим произведения классов B, A.

BA

$$
\left(\begin{array}{c|cccccc}
\overset{k}{\underset{lc}{\times}} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}
\end{array}\right)
$$

Получим произведения классов BB.

BB

$$
\left(\begin{array}{c|cccccc}
\overset{k}{\underset{lc}{\times}} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}
\end{array}\right)
$$

Трансфинитность групп на комбинаторной операции

Ранее было показано, что применение комбинаторной операции к алгебре треугольной группы позволяет получить генераторы новых подгрупп. Новая группа уже не будет треугольной, однако она остается линейной группой. Покажем, что комбинаторная операция позволяет поставить в соответствие линейной группе $SL(2,R)$системе групп. Среди них есть группы с произведением по Адамару, а также нелинейные группы. Однопараметрические подгруппы группы $SL(2,R)$ известны:

$$g(1)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}, g(2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}, g(3)=\begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{pmatrix}.$$

Им соответствуют генераторы алгебры вида

$$a(1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, a(2)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, g(3)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Применим к ним комбинаторную операцию, добавляя в таблицу появляющиеся новые генераторы. Получим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc}
\overset{k}{\underset{lc}{\times}} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\\
\hline
\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

Добавились новые генераторы:

$$A\to\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}, B\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Они образуют два раздела.

$A-$раздел позволяет ввести наряду с рассматриваемой линейной группой нелинейные группы. Они получаются при произведении начальных однопараметрических групп на однопараметрические группы, индуцированные генераторами из $A-$раздела. «Скрытые» подгруппы имеют вид

$$\hat{g}(1)=\begin{pmatrix}e^{t(1)} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \hat{g}(2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{t(2)}\end{pmatrix}.$$

Эти группы не проявляют себя, если их параметры равны нулю. По этой причине они названы «скрытыми». Они образуют семейство групп, дополнительное начальной группе, будучи согласованными с ней.

$B-$ раздел задает семейство групп с почленным умножением по Адамару. Группы с другим произведением назовем вторичными группами. Их явный вид таков:

$$\tilde{g}(1)=\begin{pmatrix} e^{t(3)} & 1 \\ e^{t(3)} & 1 \end{pmatrix}, \tilde{g}(2)=\begin{pmatrix} e^{t(4)} & e^{t(4)} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{g}(3)=\begin{pmatrix} e^{t(5)} & e^{t(5)} \\ e^{t(5)} & e^{t(5)} \end{pmatrix}.$$

Вывод: Комбинаторное произведение элементов алгебры группы $SL(2,R)$ задает новые генераторы. На их основе к начальной группе можно добавить нелинейные группы, которые названы «скрытыми» группами. Дополнительно можно добавить группы, основанные на произведении Адамара.

***Косвенное следствие**: Физические модели, основанные на матричной группе, согласно комбинаторному произведению, имеют в своей структуре скрытые и вторичные группы. Их нужно учитывать при анализе расширений физической модели, а также при анализе экспериментальных данных.*

Проанализируем, как меняется ситуация при изменении комбинаторного произведения. Пусть комбинаторно умножаются столбцы первой матрицы на строки второй. Получим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc}
\overset{k}{\underset{cl}{\times}} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

К трём генераторам добавились два новых генератора. Трехпараметрическая линейная группа может быть преобразована в нелинейную пятипараметрическую группу.

Проанализируем комбинаторное произведение генераторов строка на строку:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc}
\overset{k}{\underset{ll}{\times}} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}
\end{array}\right).$$

К нелинейным группам добавилась группа по Адамару.

При комбинаторном произведении столбца на столбец получится алгебра с четырьмя дополнительными генераторами. Они имеют вид

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Их математический смысл выяснен ранее.

Вывод: Разные комбинаторные операции имеют разные свойства. Есть операции, производящие максимальное для рассматриваемой ситуации расширение алгебры. Есть операции, производящие минимальное для рассматриваемой ситуации расширение алгебры. Поскольку у комбинаторных операции могут быть разными также другие грани приложений, мы имеем совокупность «инструментов» для анализа математической реальности.

Поскольку математическая реальность софистатна физической реальности, мы можем в отдельных случаях без проведения экспериментов выяснить её новые свойства, опираясь на предыдущий опыт и на свойства математических изделий.

Коррекция представлений групп, индуцированная комбинаторной операцией

Комбинаторную операцию можно использовать для учета дополнительных свойств физических явлений. Покажем некоторые возможности, следующие из теории представлений групп.

Используем общепринятый подход. Рассмотрим действие матриц второго порядка, принадлежащих группе $GL(2,C)$, на комплексный вектор (z_1, z_2):

$$(w_1, w_2) = (z_1, z_2)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = (\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \gamma z_2).$$

Построим линейное представление группы в пространстве функций от двух переменных:

$$T(g) f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \gamma z_2).$$

В данном случае легко проверить, что

$$T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2).$$

Рассматриваемое представление приводимо из-за наличия подпространств, инвариантных относительно $T(g)$.

Известно, что в этом случае неприводимые представления могут быть заданы формулой

$$T_l(g)\varphi(z)=\varphi_g(z)=(\beta z+\delta)^{2l}\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right).$$

Здесь $\varphi(z)-$ однородный многочлен степени $2l$.

Для многочленов можно выбрать ортогональный, нормированный базис на основе функций

$$\varphi_n(x)=\frac{x^{l-n}}{\sqrt{(l-n)!(l+n)!}},-l\le n\le l.$$

Тогда для расчета матричных элементов представлений получим формулы

$$t_{mn}^l(g)=\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}\,\alpha^{l-m}\gamma^{m-n}\delta^{l+n}\times$$
$$\times\sum_{j=M}^{N}\frac{1}{j!(l-m-j)!(l+n-j)!(m-n+j)!}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\right)^j.$$

Здесь $M=\max(0,n-m),N=\min(l-m,l+n)$. Они используются для построения формул сложения для функций, реализующих представление группы, и имеют приложения к физике.

Заменим матричное действие группы на комплексный вектор комбинаторным $\varepsilon-$произведением. Пусть

$$(z_1,z_2)\overset{k}{\underset{\varepsilon}{\times}}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=(z_1,z_2)\overset{k}{\underset{\varepsilon}{\times}}\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \gamma & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\right)=\begin{array}{cc}z_1 & z_2\\ \hline \alpha & \beta\\ \varepsilon\beta & \varepsilon\alpha\end{array}\hat{+}\begin{array}{cc}z_1 & z_2\\ \hline \varepsilon\delta & \varepsilon\beta\\ \beta & \delta\end{array}=\begin{pmatrix}\tilde{\alpha} & \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha z_1+\beta z_2\\ \varepsilon\beta z_1+\varepsilon\alpha z_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon\delta z_1+\varepsilon\beta z_2\\ \beta z_1+\delta z_2\end{pmatrix}=(z_1,z_2)\times\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}\delta & \gamma\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\right)=(z_1,z_2)\times\left(A+A^{T\tilde{T}}\right).$$

Принимая возможность *описания взаимодействий на основе симметрий, зависимых от используемых операций*, мы можем корректировать результаты расчета, задавая на основе использования новых математических **измененные значения элементов матрицы**, которая представляет группу. Когда введенный алгоритм и корректирующий параметр ε зависят от координат и времени, мы получаем *возможность изменения «внешних» проявлений исследуемой ситуации на основе учета «внутренних» свойств конкретной задачи*.

Обратим внимание на новые возможности расчета, следующие из введенной выше комбинаторной операции. Рассмотрим вариант представления трехуровневой физической системы 6 комплексными числами. Исследуем трансформацию величин, полагая, что их изменение подчинено действию заданной матрицы и комбинаторного $\varepsilon-$произведения.

Рассмотрим

$$((z_1z_2)(z_3z_4)(z_5z_6))\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0\\ c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & \pi_1\\ \sigma_2 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & \pi_2\\ 0 & \sigma_3 & 0 & 0 & a_3 & b_3\\ 0 & 0 & \pi_3 & 0 & c_3 & d_3\end{pmatrix}=\Lambda.$$

Произведение строки на первый столбец по комбинаторному $\varepsilon-$произведению выглядит так:

$$\left(\begin{array}{cccccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ \hline a_1 & c_1 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}a_1 & \varepsilon_{11}c_1 & \varepsilon_{11}\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{12}a_1 & \varepsilon_{12}c_1 & \varepsilon_{12}\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{13}a_1 & \varepsilon_{13}c_1 & \varepsilon_{13}\sigma_2 \\ \varepsilon_{14}\sigma_2 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{14}a_1 & \varepsilon_{14}c_1 \\ \varepsilon_{15}c_1 & \varepsilon_{15}\sigma_2 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{15}a_1 \end{array}\right).$$

Для произведения строки на второй столбец получим

$$\left(\begin{array}{cccccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ \hline \varepsilon_{25}d_1 & 0 & 0 & \varepsilon_{25}\sigma_3 & 0 & \varepsilon_{25}b_1 \\ b_1 & d_1 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{21}b_1 & \varepsilon_{21}d_1 & 0 & 0 & \varepsilon_{21}\sigma_3 \\ \varepsilon_{22}\sigma_3 & 0 & \varepsilon_{22}b_1 & \varepsilon_{22}d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{23}\sigma_3 & 0 & \varepsilon_{23}b_1 & \varepsilon_{23}d_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{24}\sigma_3 & 0 & \varepsilon_{24}b_1 & \varepsilon_{24}d_1 \end{array}\right).$$

Выполнив все необходимые произведения, мы получим вклад в каждую составляющую всех трех уровней материи. В формулах содержится большое количество коэффициентов, порожденных принятой структурой комбинаторного произведения. Сделано это для того, чтобы проиллюстрировать возможности комбинаторного $\varepsilon-$произведения. Понятно, что проверить такие расчеты экспериментально практически невозможно. Однако это обстоятельство нельзя рассматривать как недостаток теории. Все чаще эксперимент оказывается не в состоянии дать полную и достоверную информацию об объектах и явлениях. По этой причине развитие теории, для которой открываются новые возможности, можно только приветствовать. Именно расчет может оказаться путеводителем для возможного эксперимента.

Многоуровневые квантовые алгебры на комбинаторной операции

Идеология построения квантовых алгебр базируется на использовании единого правила некоммутативности для алгебраических переменных:

$$yx = qxy,\ y'x' = qx'y',\ y''x'' = qx''y''.$$

Эти соотношения привычны для множеств, подчиненных комбинаторной операции.

Затем используются условия

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(cx+dy)(ax+by) = q(ax+by)(cx+dy),$$
$$(bx+dy)(ax+cy) = q(ax+cy)(bx+dy).$$

Сравнивая коэффициенты при x^2, y^2, xy, получим условия для квантовой алгебры:

$$ba = qab,\ db = qbd,\ ca = qac,\ dc = qcd,$$
$$bc = cb,\ ad - da = \left(q^{-1} - q\right)bc.$$

Посмотрим, как изменится структура квантовой алгебры при замене матричной операции на комбинаторную операцию. Пусть дана многократная комбинаторная операция:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{\varepsilon}{\times}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \right) \overset{k}{\underset{\varepsilon}{\times}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} a & b \\ \hline x & y \\ \varepsilon y & \varepsilon x \end{array} \hat{+} \begin{array}{cc} c & d \\ \hline \varepsilon y & \varepsilon x \\ x & y \end{array},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + \varepsilon dx + \varepsilon cy \\ cx + dy + \varepsilon bx + \varepsilon ay \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{\varepsilon}{\times}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & d \end{pmatrix} \right) \overset{k}{\underset{\varepsilon}{\times}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} a & c \\ \hline x & y \\ \varepsilon y & \varepsilon x \end{array} \hat{+} \begin{array}{cc} b & d \\ \hline \varepsilon y & \varepsilon x \\ x & y \end{array},$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy + \varepsilon dx + \varepsilon by \\ bx + dy + \varepsilon cx + \varepsilon ay \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\varepsilon a = \tilde{a}, \varepsilon b = \tilde{b} \ldots$ Выполним расчет, объединив в самостоятельные множества элементы по степеням ε: ε^0 – нулевой уровень, ε^1 – первый уровень, ε^2 – второй уровень.

Нулевому уровню соответствуют соотношения

$$ba = qab, db = qbd, ca = qac, dc = qcd,$$
$$bc = cb, ad - da = \left(q^{-1} - q\right)bc.$$

Первому уровню соответствуют соотношения

$$c\tilde{d} + \tilde{b}a = q\left(a\tilde{b} + \tilde{d}c\right), d\tilde{c} + \tilde{a}b = q\left(\tilde{c}d + b\tilde{a}\right),$$
$$c\tilde{c} + \tilde{b}b + qd\tilde{d} + q\tilde{a}a = qa\tilde{a} + q^2 b\tilde{b} + q^2\tilde{c}c + q\tilde{d}d,$$
$$\tilde{c}a + b\tilde{d} = q\left(a\tilde{c} + \tilde{d}b\right), \tilde{a}c + d\tilde{b} = q\left(c\tilde{a} + \tilde{b}d\right),$$
$$q\tilde{a}a + \tilde{c}c + b\tilde{b} + qd\tilde{d} = qa\tilde{a} + q^2 c\tilde{c} + q^2\tilde{b}b + q\tilde{d}d.$$

Второму уровню соответствуют соотношения

$$\tilde{a}\tilde{b} = q\tilde{b}\tilde{a}, \tilde{a}\tilde{c} = q\tilde{c}\tilde{a}, \tilde{b}\tilde{d} = q\tilde{d}\tilde{b}, \tilde{c}\tilde{d} = qd\tilde{c},$$
$$\tilde{b}\tilde{c} = \tilde{c}\tilde{b}, \tilde{a}\tilde{d} - \tilde{d}\tilde{a} = \left(q - q^{-1}\right)\tilde{b}\tilde{c}.$$

Комбинаторная операция дополняет известные одноуровневые соотношения, используемые для анализа квантовых алгебр, многоуровневыми соотношениями. Более того, *меняя комбинаторные операции, мы получаем семейство квантовых алгебр.*

Поскольку квантовые алгебры имеют физические приложения, следует классифицировать возможности, предлагаемые данным алгоритмом.

Новая связь физики и геометрии

Заметим, что комбинаторное произведение порождает систему тождеств для конечной совокупности элементов (подмножеств), принадлежащих неассоциативному множеству.

Выберем, например, подмножество, состоящее из элементов

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя комбинаторное произведение, получим

$$\left(x \overset{k}{\underset{cl}{\times}} y \right) \overset{k}{\underset{cl}{\times}} \left(z \overset{k}{\underset{cl}{\times}} x \right) = x \overset{k}{\underset{cl}{\times}} \left(\left(z \overset{k}{\underset{cl}{\times}} y \right) \overset{k}{\underset{cl}{\times}} x \right).$$

Оно аналогично известному тождеству Муфанг для лупы. Истинное тождество

$$\left(x\overset{k}{\underset{cl}{\times}}y\right)\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\left(z\overset{k}{\underset{cl}{\times}}x\right)=x\overset{k}{\underset{cl}{\times}}\left(\left(y\overset{k}{\underset{cl}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{cl}{\times}}x\right)$$

не выполняется. Не выполняется и аналогичное предыдущему тождество вида

$$\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x=x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right).$$

Его можно обобщить. Получим

$$z\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)=\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z.$$

Тождество соответствует правилу повторного умножения пары элементов из выбранной тройки. Оно выполняется также для тройки элементов

$$x=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},z=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Не выполняется для указанной тройки элементов тождество Болла:

$$x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)=\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z.$$

Его можно обобщить. Получим

$$y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\right)=\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}y.$$

На тройке элементов

$$x=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},z=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

выполняется тождество Болла. Выполняется также обобщенное тождество Муфанг вида

$$\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z=z\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right).$$

Выберем элементы, представляющие свободный объект x, гравитационный предзаряд y, электрический предзаряд z:

$$x=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},z=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

Для них выполняется тождество Муфанг. Выполняется также условие

$$x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)=\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x.$$

В данном случае один элемент из выбранной тройки элементов используется четыре раза.

Мы знаем, что у разных физических объектов есть разные свойства. Различны они и у совокупности объектов. Задача состоит в том, чтобы научиться эффективно описывать структуру и взаимодействие объектов, используя различные экспериментальные и математические средства. Интересно также учесть структуру объектов и ее проявления в динамике.

Обратим внимание на специфику подхода, основанного на комбинаторной операции. С одной стороны, мы сопоставляем физическим объектам совокупность матриц. Поскольку *совокупности матриц имеют разные свойства*, через них мы учитываем разные свойства физических объектов. С другой стороны, мы используем для матриц комбинаторные операции. Они позволяют подчинить совокупности матриц математическим законам. Пример такого закона есть условие Муфанг.

Более сложный закон композиции означает, что есть сложные физические объекты: например, к паре элементов в определенном порядке (согласно «коду») присоединены четыре других объекта. В рассматриваемой выше композиции к электрическому и гравитационному предзарядам присоединены четыре «свободных» объекта.

Аналогичное правило действует при других композициях. Они описывают физические объекты с преобладанием электрической или гравитационной составляющей. Мы получаем возможность рассматривать физические связи как следствие «математического кода», которому подчинены совокупности элементов и их соединения. Объекты и связи создаются только в определенном порядке. Естественно ожидать, что «разбирать» их нужно тоже только в определенном порядке.

Анализ показал, что для выбранной совокупности элементов выполняется условие

$$y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}y\right)\right)=\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}y\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}y\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}y.$$

Оно соответствует «коду» создания объектов, имеющих массу, так как в композиции преобладают гравитационные предзаряды, которым сопоставлена матрица y .

При преобладании в композиции электрических предзарядов в рамках рассматриваемой совокупности элементов выполняется другой закон:

$$z\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(z\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(z\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)=\left(z\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z.$$

Этого следовало ожидать, так как свойства электрических и гравитационных предзарядов различны. Было бы странно, если бы для них выполнялся один и тот же закон композиции. Его можно было бы оправдать на некоторой стадии создания объектов из праматерии, но все равно следовало бы найти условия, при которых эти законы будут разными. В рассматриваемом варианте отличие имеет место в первичных законах композиции.

Мы понимаем, что «свободные» объекты могут иметь свойства гравитационного типа, могут они иметь и свойства электрического типа, ведь пара предзарядов может быть получена из них. Закон «гравитационной» композиции для «свободных» объектов подтвержден. Выполняется ли он для «электрической» композиции?

Проверка показала, что в совокупности элементов выполняется условие

$$x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)=\left(x\overset{k}{\underset{lc}{\times}}\left(\left(\left(y\overset{k}{\underset{lc}{\times}}z\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x\right)\right)\overset{k}{\underset{lc}{\times}}x.$$

Следовательно, три элемента математически и физически согласованы между собой.

Согласование имеет оттенок, который проявляется при морфологической или графической записи найденных произведений.

Для гравитационных предзарядов получим формулы:

$$B(xz)L(y)R(y)L(y)L(y), B(xz)R(y)L(y)R(y)R(y).$$

Для электрических предзарядов получим формулы:

$$\widetilde{B}(yx)L(z)L(z)R(z)L(z), \widetilde{B}(yx)R(z)R(z)L(z)R(z).$$

Они имеют как бы обратный порядок. Здесь через $B, \widetilde{B}$ обозначаются начальные элементы, символ L означает, что произведение выполняется слева, символ R означает, что произведение выполняется справа.

В *графическом представлении мы имеем дело с одной и той же структурной диаграммой* («ключом»). Она «проходится» с одной стороны в случае гравитационных предзарядов и с другой стороны в случае электрических предзарядов.

Есть в рассматриваемом множестве равенства с неограниченным числом одинаковых элементов. В частности, выполняется «зеркальная» формула:

$$\langle z\rangle z((xy)z)=(z(yx))z\langle z\rangle .$$

Здесь элемент $\langle z\rangle$ означает конечную последовательность произведений элементов z, учитываемых слева или справа согласно формуле. Она может иметь слева и справа разное количество элементов. Морфологические формулы таковы:

$$B(xy)R(z)L(z)L(z)L(z)L(z)L(z)...,\widetilde{B}(yx)L(z)R(z)R(z)R(z)R(z)R(z)...$$

Исследуемое множество

$$x=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, z=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

подчинено также закону вида

$$B(yz)R(x)L(x)R(y)L(y)R(z)L(z)=\widetilde{B}(zy)L(x)R(x)L(y)R(y)L(z)R(z).$$

Мы получили как бы две «пружины» с разной ориентацией. При последнем умножении первого выражения слева на z, равно как и при последнем умножении второго выражения справа на z, мы получаем итоговый элемент z. По этой причине, умножив первую цепочку слева на y, а вторую цепочку справа на y мы приходим к начальным элементам yz, zy. Следовательно, **цепочка может быть продолжена дальше**. Начальные элементы выступают в роли «поперечных сечений» изделия, представленного графически.

Примем предположение, что найденный математический закон софистатен физическому изделию в форме некоторой «силовой линии». Это означает, что комбинаторная операция на неассоциативном множестве способна в форме математического закона отобразить реальную физическую конструкцию. Тогда исследование всех возможных форм математического закона (или их совокупности) подсказывает возможные физические изделия, которые могут быть изготовлены из базовых объектов.

Данную модель можно рассматривать как аналог двойной спирали ДНК с тремя кодонами $2x, 2y, 2z$.

Конечность длины «спирали», с физической точки зрения, обусловлена способностью системы удерживать только конечное число базовых элементов.

Модель может приблизиться к физике, если будет найден алгоритм расчета «энергетических» свойств предлагаемых наглядных конструкций.

Обратимся к анализу математических свойств квазигрупп и луп. Отметим, в частности, результат Киккава. Согласно его исследованиям, пространство аффинной связности допускает построение в окрестности любой точки совокупности луп. Их анализ основан на построении реальной «петли», узел которой есть выбранная точка. От неё по неортогональным геодезическим выполняются смещения, которые затем замыкаются в форме «прямоугольника». Такие «петли» классифицированы Акивисом, и они связаны с тензором кручения и кривизны аффинного пространства. Математический расчет геометрических свойств «петель» основан на стандартных матричных операциях.

Примем **гипотезу** *о соответствии «петли» в пространстве аффинной связности с законом композиции матриц, базирующемся на комбинаторной операции*.

Посмотрим с такой точки зрения на условие Муфанг вида

$$(z(xy))z = z((xy)z).$$

Оно выполняется на тройке элементов, выбранных выше.

С математической точки зрения сопоставлению соответствует простая «картина»:

- выбирается объект (xy) и точка в аффинном многообразии, ассоциированная с (xy),
- умножение матрицы, представляющей физический объект, *слева* на z ассоциируется с перемещением выбранной точки *по одной геодезической* пространства аффинной связности,
- умножение матрицы, представляющей физический объект, *справа* на z ассоциируется с перемещением по другой геодезической пространства аффинной связности,
- условие Муфанг означает, с одной стороны, что в итоге получается один и тот же физический объект, с другой стороны, что перемещения в пространстве аффинной связности, выполненные в прямом и обратном порядке, «сходятся» одной точке, образуя «петлю».

С физической точки зрения ситуация выглядит так. Мы имеем пространство аффинной связности, сконструированное с учетом некоторых физических свойств исследуемого взаимодействия. Эти свойства выражены через тензор кручения и кривизны пространства аффинной связности. Кроме этого, мы имеем совокупность физических объектов. Они представлены матрицами и подчинены комбинаторной операции. На этой основе существуют законы композиции матриц, учитывающие свойства взаимодействия физических объектов. Этим же свойствам можно *поставить в соответствие поведение траекторий точечных физических тел в пространстве аффинной связности, согласовывая их со свойствами композиции для матриц.* Следовательно, **разные физические объекты будут двигаться в пространстве аффинной связности по разным траекториям.**

Задача состоит в том, чтобы изучить совокупность вопросов, появившихся при такой постановке задачи. Требуется также выполнить классификацию типов объектов и типов траекторий, которые им соответствуют.

Простые идеи были путеводной звездой выполненного исследования:

- есть трансфинитное соответствие между физическими структурными объектами и математическими структурными объектами, роль которых была возложена на матрицы,
- есть трансфинитное соответствие между свойствами структурных физических объектов, проявляющимися во взаимодействиях и свойствами математических операций, которым подчинены матрицы и величины, присоединенные к ним,
- исследование системы матриц с системой операций, присоединенных к ним, является ключом к пониманию структуры и взаимодействия реальных физических объектов,
- исследование структуры матриц и системы операций с ними позволяет разработать алгоритмы конструирования структурных физических объектов, имеющих разнообразные свойства.

Законы для неассоциативных множеств

Рассмотрим сначала возможность получения новых циклических законов для групп. Пусть группа G_B состоит из симметричных матриц с элементами $S_{ij} = S_{ji}$ и антисимметричных матриц $A_{ij}=-A_{ji}$. Тогда $\{A_{ij},\ S_{ij},\ A_{ij}^{-1},\ S_{ij}^{-1},\ I\}\in G_B$. Введем индекс симметричности

$$\chi(A_{ij})=0,\ \chi(S_{ij})=1$$

и фактор симметричности $\sigma=(-1)^{\chi}$.Он задает одномерное проективное представление группы G_B, так как

$$\sigma(\zeta)=\sigma(\xi\cdot\eta)=f(\xi,\eta)\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta),$$

где $(\xi,\eta,\zeta)\in G_B$, $f(\xi,\eta)\in Z_2=[-1,1]$. Найдем алгебру, которой подчинена группа G_B, учитывая факторы симметричности ее элементов. Заметим, что

$$\sigma(\xi)\neq 0,\ \sigma^2(\xi)=1,\ \sigma^{-1}(\xi)=\sigma(\xi),\ \sigma(ab)=\sigma(ba).$$

Факторы симметричности образуют абелеву группу отношений между элементами группы G_B. Будем для удобства обозначать элементы группы G_B латинскими буквами. Введем произведение ее элементов, учитывая группу отношений $\sigma(\xi)$. Пусть

$$\langle ab\rangle=ab-\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)ba,$$

$$\langle bc\rangle=bc-\sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)cb,$$

$$\langle ca\rangle=ca-\sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)ac.$$

Определим

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle=\langle ab\rangle c-\sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)c\langle ab\rangle,$$

$$\langle\langle bc\rangle a\rangle=\langle bc\rangle a-\sigma(b,c)\sigma(a)\sigma(b,c,a)a\langle bc\rangle,$$

$$\langle\langle ca\rangle b\rangle=\langle ca\rangle b-\sigma(c,a)\sigma(b)\sigma(c,a,b)b\langle ca\rangle.$$

Они содержат множители

$$\sigma(a,b),\ \sigma(b,c),\ \sigma(c,a),\ \sigma(a,b,c),\ \sigma(b,c,a),\ \sigma(c,a,b),$$

которые следует определить из дополнительных условий. Будем искать их, предполагая возможность циклического условия

$$A\langle\langle ab\rangle c\rangle+B\langle\langle bc\rangle a\rangle+C\langle\langle ca\rangle b\rangle=0.$$

Найдем выражения для *B* и *C*, при которых получается тождество. Имеем

$$A\{\langle ab\rangle c-\sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)c\langle ab\rangle\}+B\{\langle bc\rangle a-\sigma(b,c)\sigma(a)\sigma(b,c,a)a\langle bc\rangle\}+$$

$$+C\{\langle ca\rangle b-\sigma(c,a)\sigma(b)\sigma(c,a,b)b\langle ca\rangle\}=$$

$$=A\{abc-\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)bac-\sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)[cab-\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)cba]\}+$$

$$+B\{bca-\sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)cba-\sigma(b,c)\sigma(a)\sigma(b,c,a)[abc-\sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)acb]\}+$$

$$+C\{cab-\sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)acb-\sigma(c,a)\sigma(b)\sigma(c,a,b)[bca-\sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)bac]\}=0.$$

Отсюда

$$(A-\sigma(b,c)\sigma(a)\sigma(b,c,a)B)abc+(A\sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)-B\sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc))cba+$$

$$+(C-\sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)A)cab+(C\sigma(c,a)\sigma(b)\sigma(c,a,b)\sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)-A\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab))bac+$$

$$+(B-\sigma(c,a)\sigma(b)\sigma(c,a,b)C)bca+(B\sigma(b,c)\sigma(a)\sigma(b,c,a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)-C\sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca))acb=0.$$

Следовательно,

$$A-\sigma(a)\sigma(b,c)\sigma(b,c,a)B=0, \qquad (\alpha)$$

$$A\sigma(a)\sigma(ab)\sigma(a,b)\sigma(a,b,c)-\sigma(bc)B=0, \qquad (\alpha^*)$$

$$B-\sigma(b)\sigma(c,a)\sigma(c,a,b)C=0, \qquad (\beta)$$

$$B\sigma(b)\sigma(bc)\sigma(b,c)\sigma(b,c,a)-C\sigma(ca)=0, \qquad (\beta^*)$$

$$C-\sigma(c)\sigma(a,b)\sigma(a,b,c)A=0, \qquad (\gamma)$$

$$C\sigma(c)\sigma(ca)\sigma(c,a)\sigma(c,a,b)-A\sigma(ab)=0. \qquad (\gamma^*)$$

Примем условие, что

$$\sigma(\eta,\xi)=\sigma(\xi,\eta)=\sigma(\xi\eta)=\sigma(\eta\xi).$$

Из (γ) и (γ*) получим

$$\sigma(a,b,c)\sigma(c,a,b)=1,$$

$$C=\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(a,b,c)A.$$

Тогда

$$B=\sigma(b)\sigma(\ c)\sigma(ab)\sigma(ac).$$

Из (β*) следует, что

$$\sigma(b,c,a)=\sigma(a,b,c).$$

Из (α) получим

$$\sigma(a,b,c)=\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc).$$

Примем условие, что

$$\sigma(a,b,c)=\sigma(b,c,a)=\sigma(c,a,b).$$

Тогда, поскольку $A\neq 0$, имеем циклическое тождество, определяющее алгебру с отношением

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle+\langle\langle bc\rangle a\rangle\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)+\langle\langle ca\rangle b\rangle\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc)=0.$$

Это выражение умножим на $\sigma(b)\sigma(ac)$. Получим в симметричном по $\sigma(\xi)$ виде:

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle\sigma(b)\sigma(ac)+\langle\langle bc\rangle a\rangle\sigma(c)\sigma(ba)+\langle\langle ca\rangle b\rangle\sigma(a)\sigma(cb)=0.$$

Пусть $\sigma(a)=\sigma(b)=\sigma(c)=1$. Тогда $\langle ab\rangle=ab-ba=[a,b]$.

Имеем тождество Якоби: $[[a,b]c]+[[b,c]a]+[[c,a]b]=0$ Пусть $\sigma(a)=\sigma(b)=\sigma(c)=-1$. Тогда

$$\langle ab\rangle=ab+ba=\{a,b\}.$$

Имеем тождество: $[\{a,b\}c]+[\{b,c\}a]+[\{c,a\}b]=0$.

Действительно, $\langle ab\rangle=ab-(-1)(-1)(-1)ba=ab+ba$

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle=\langle ab\rangle c-\sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)c\langle ab\rangle=\langle ab\rangle c-\sigma(ab)\sigma(c)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc)c\langle ab\rangle$$

$$=\langle ab\rangle c-\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc)c\langle ab\rangle=\langle ab\rangle c-(-1)(-1)(-1)(-1)c\langle ab\rangle=\langle ab\rangle c-c\langle ab\rangle.$$

Действуя аналогично, получим

$$(ab+ba)c-c(ab+ba)+(bc+cb)a-a(bc+cb)+(ca+ac)b-b(ca+ac)=abc+bac-cab-cba+$$

$$+bca+cba-abc-acb+cab+acb-bca-bac=0.$$

Заметим, что антикоммутаторы имеют всегда ненулевой цикл, что свидетельствует о глубинной неассоциативности алгебры матриц, содержащей подалгебры антикоммутативного типа.

Все элементы группы G_B могут быть на основе ее супералгебры)*W*(поделены на классы, в которых выполняется то или другое сочетание коммутаторов $[\cdot,\cdot]$ и антикоммутаторов $\{\cdot,\cdot\}$. Выполним проверку циклического условия, задаваемого супералгеброй)*W*(в общем виде. Так,

$$\begin{gathered}
0=<<ab>c>\sigma(b)\sigma(ac)+<<bc>a>\sigma(c)\sigma(ba)+<<ca>b>\sigma(a)\sigma(cb)= \\
=(<ab>c-\sigma(ab)\sigma(c)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc)c<ab>)\sigma(b)\sigma(ac)+ \\
+(<bc>a-\sigma(bc)\sigma(a)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc)a<bc>)\sigma(c)\sigma(ba)+ \\
+(<ca>b-\sigma(ca)\sigma(b)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab\sigma(ac)\sigma(bc)b<ca>)\sigma(a)\sigma(cb)= \\
=(<ab>c\sigma(b)\sigma(ac)-\sigma(a)\sigma(bc)\sigma<ab>)+(<bc>a\sigma(c)\sigma(ba)-\sigma(b)\sigma(ac)a<bc>)+ \\
+(<ca>b\sigma(a)\sigma(cb)-\sigma(c)\sigma(ab)b<ca>)= \\
=abc\sigma(b)\sigma(ac)-\sigma(a)\sigma(ac)\sigma(ab)bac-\sigma(a)\sigma(bc)cab+\sigma(b)\sigma(bc)\sigma(ab)cba+ \\
+bca\sigma(c)\sigma(ba)-\sigma(b)\sigma(ba)\sigma(bc)cba-\sigma(b)\sigma(ac)abc+\sigma(c)\sigma(ac)\sigma(bc)acb+ \\
+cab\sigma(a)\sigma(cb)-\sigma(c)\sigma(ca)\sigma(cb)acb-\sigma(c)\sigma(ab)bca+\sigma(a)\sigma(ab)\sigma(ca)bac=0.
\end{gathered}$$

Введем

$$<<<ab>c>d>=<<ab>c>d-\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(d)<<ab>c>.$$

Легко показать, что имеет место тождество:

$$\begin{gathered}
\{<<<ab>c>d>\sigma(b)\sigma(ac)+<<<bc>d>a>\sigma(c)\sigma(bd)+ \\
+<<<cd>a>b>\sigma(d)\sigma(ca)+<<<da>b>c>\sigma(a)\sigma(db)\}+ \\
\{<<<bc>a>d>\sigma(c)\sigma(ba)+<<<cd>b>a>\sigma(d)\sigma(cb)+ \\
+<<<da>c>b>\sigma(a)\sigma(da)+<<<ab>d>c>\sigma(b)\sigma(ab)\}+ \\
\{<<<ca>b>d>\sigma(a)\sigma(cb)+<<<db>c>a>\sigma(b)\sigma(dc)+ \\
+<<<ac>d>b>\sigma(c)\sigma(ad)+<<<bd>a>c>\sigma(d)\sigma(ba)\}=0.
\end{gathered}$$

Так три четырехарных цикла компенсируют друг друга. Очевидно, что это условие зависит от факторов симметричности.

Группа Паули состоит из матриц

$$\sigma^0=I=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}=a,\quad \sigma^1=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}=b,$$

$$\sigma^2=\begin{Vmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{Vmatrix}=c,\quad \sigma^3=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}=d.$$

Ее факторы симметричности таковы:

$$\sigma(a)=-1,\ \ \sigma(b)=-1,\ \ \sigma(c)=1,\ \ \sigma(d)=-1.$$

Найдем ее супералгебру)*W*(. Класс элементов, содержащих *a* и любую пару остальных элементов, подчинен условию

$$\{\{ab\}d\}+[[bd]a]-\{\{da\}b\}=0.$$

Действительно,

$$\begin{gathered}
<ab>=ab-(-1)(-1)(-1)ba=ab+ba, \\
<bd>=bd-(-1)(-1)(1)db=bd-db, \\
<da>=da-(-1)(-1)(-1)ad=da+ad, \\
<<ab>d>=<ab>d-(-1)(-1)(-1)(1)d<ab>=<ab>d+d<ab>, \\
<<bd>a>=<bd>a-(-1)(-1)(-1)(-1)a<bd>=<bd>a-a<bd>, \\
<<da>b>=<da>b-(-1)(-1)(+1)(-1)b<da>=<da>b+b<da>. \\
0\equiv<<ab>d>(-1)(-1)+<<bd>a>(-1)(-1)+<<da>b>(-1)1= \\
=(ab+ba)d+d(ab+ba)+(bd-db)a-a(bd-db)-(da+ad)b-b(da+ad)=0.
\end{gathered}$$

Класс элементов без единицы подчинен тождеству Якоби:

$$[[bc]d]+[[cd]b]+[[db]c]=0.$$

Единичные элементы удовлетворяют соотношению

$$[\{aa\}a]+[\{aa\}a]+[\{aa\}a]=0.$$

Рассмотрим все варианты различных расположений единиц. Получим матрицы

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Они образуют группу. В ней есть подгруппа *P*:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Введем числа $a+ib+jc$. Найдем таблицу их умножения, используя *P*. Получим соответствие

$$\uparrow(a_1+ib_1+jc_1)\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}a+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}b+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}c.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\c_1&a_1&b_1\\b_1&c_1&a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2&b_2&c_2\\c_2&a_2&b_2\\b_2&c_2&a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2+c_1b_2&a_1b_2+b_1a_2+c_1c_2&a_1c_2+b_1b_2+c_1a_2\\a_1a_2+a_1c_2+b_1b_2&c_1b_2+a_1a_2+b_1c_2&c_1c_2+a_1b_2+b_1a_2\\c_1a_2+c_1a_2+a_1b_2&b_1b_2+c_1a_2+a_1c_2&b_1c_2+c_1b_2+a_1a_2\end{pmatrix}.$$

Отсюда, выполнив обратное проектирование, получим

$$(a_1+ib_1+jc_1)(a_2+ib_2+jc_2)=a_1a_2+b_1c_2+c_1b_2+i(a_1b_2+b_1a_2+c_1c_2)+j(a_1c_2+b_1b_2+c_1a_2).$$

Примем законы:

$$1\cdot1=1,\quad i\cdot j=j\cdot i=1,$$

$$i\cdot1=1\cdot i=i,\quad i\cdot i=j,$$

$$j\cdot1=1\cdot j=j,\quad j\cdot j=i.$$

Получим числа с единицами, которые подчинены условиям

$$1\cdot1\cdot1=1,\quad i\cdot i\cdot i=1,\quad j\cdot j\cdot j=1.$$

Понятно, что они дублируют свойства матриц подгруппы *P*.

Остальные матрицы таковы:

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Ими учтены все возможные варианты. Мы получили мономиальную группу *MN*(3) над группой $Z_2 = [-1,1]$. В силу ассоциативности матриц они задают алгебру с отношениями, формируя их набор, согласованный с распределением отношений $w_M = [-1,1]$ по группе *MN*(3). Сопоставим матрицам трехуровневую систему отношений. Пусть, во-первых, задано соответствие,

$$a \to \sigma(a),\ \ b \to \sigma(b),\ \ c \to \sigma(b),$$

где $\sigma(\xi)=1$ или -1. *Их распределение может быть произвольным, подчиняясь некоторому дополнительному правилу*. Пусть, во-вторых, произведению элементов сопоставлены отношения:

$$ab \to \sigma(ab),\ \ ba \to \sigma(ba),\ \ ac \to \sigma(ac),$$

$$ca \to \sigma(ca),\ \ bc \to \sigma(bc),\ \ cb \to \sigma(bc)\ldots$$

Примем, в-третьих, условие, что

$$\sigma(\xi\eta) = \sigma(\eta\xi),$$

где ξ, η - любые элементы мономиальной группы. Найдем алгебры с отношениями. Используем выражения, полученные ранее. Так,

$$\langle ab\rangle = ab - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)ba\,,$$

$$\langle bc\rangle = bc - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)cb\,,$$

$$\langle ca\rangle = ca - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)ac\,,$$

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle = \langle ab\rangle c - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc)c\langle ab\rangle\,,$$

$$\langle\langle bc\rangle a\rangle = \langle bc\rangle a - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(ba)\sigma(ca)a\langle bc\rangle\,,$$

$$\langle\langle ca\rangle b\rangle = \langle ca\rangle b - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(cb)\sigma(ab)b\langle ca\rangle\,.$$

Общее циклическое условие

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle\sigma(b)\sigma(ac) + \langle\langle bc\rangle a\rangle\sigma(c)\sigma(ba) + \langle\langle ca\rangle b\rangle\sigma(a)\sigma(cb) = 0$$

задает взаимосвязи элементов с отношениями. Их легко получить: если

$$\sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(c) = \sigma(ab) = \sigma(ac) = \sigma(bc) = 1,$$

то

$$[[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] = 0\,.$$

Если

$$\sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(c) = -\sigma(ab) = -\sigma(ac) = -\sigma(bc) = 1,$$

то

$$[\{ab\}c]+[\{cb\}a]+[\{ca\}b]=0\,.$$

Аналогично выводятся все варианты взаимосвязей для элементов. Некоторые их них отличаются только порядком следования элементов a, b, c. Укажем несколько возможностей:

$$\{[ab]c\}-\{[bc]a\}-\{[ca]b\}=0\,,$$

$$[\{ab\}c]-[\{bc\}a]+[\{ca\}b]=0\,,$$

$$[\{ab\}c]-[\{bc\}a]+[\{ca\}b]=0\,,$$

$$\{[ab]c\}+\{[bc]a\}-\{[ca]b\}=0\,,$$

$$[\{ab\}c]-[\{bc\}a]+[\{ca\}b]=0\,,$$

$$[\{ab\}c]+[\{bc\}a]+[\{ca\}b]=0\ldots$$

По-видимому, ими можно пользоваться как средством, позволяющим расширить картину взаимосвязей объектов, реализующуюся через алгебру с отношениями.

Покажем, что данные взаимосвязи находят аналогию в произведениях векторов $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, заданных в трехмерном пространстве. Пусть

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}=\vec{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\vec{j}\left(b_xa_z-a_xb_z\right)+\vec{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right),\text{ где }[\vec{a}\,\vec{b}\,]=-[\vec{b}\,\vec{a}\,]\,,$$

$$\left\{\vec{a}\vec{b}\right\}=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}=\vec{i}\left(a_yb_z+a_zb_y\right)+\vec{j}\left(b_xa_z+a_xb_z\right)+\vec{k}\left(a_xb_y+a_yb_x\right),\text{ где }\left\{\vec{a}\vec{b}\right\}=\left\{\vec{b}\,\vec{a}\right\}.$$

Рассмотрим выражения:

$$[\left\{\vec{a}\,\vec{b}\right\}\vec{c}]=\vec{i}\left(\left(a_xb_z+a_zb_x\right)c_z-c_y\left(a_xb_y+a_yb_x\right)\right)+\vec{j}(-1)\left(\left(a_yb_z+a_zb_y\right)c_z-c_x\left(a_xb_y+a_yb_x\right)\right)+$$
$$+\vec{k}\left(\left(a_yb_z+a_zb_y\right)c_y-c_x\left(a_xb_z+a_zb_x\right)\right),$$

а также

$$[\left\{\vec{b}\,\vec{c}\right\}\vec{a}]=\cdots,\quad [\left\{\vec{c}\,\vec{a}\right\}\vec{b}]=\cdots.$$

Получим тождество

$$[\left\{\vec{a}\,\vec{b}\right\}\vec{c}]-[\left\{\vec{b}\,\vec{c}\right\}\vec{a}]-\left\{[\vec{c}\,\vec{a}]\vec{b}\right\}=0\,.$$

Аналогично выводятся равенства

$$[[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}]+[[\vec{b}\,\vec{c}]\vec{c}]+[[\vec{c}\,\vec{a}]\vec{b}=0\,,$$
$$\left\{[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}\right\}+\left\{[\vec{b}\,\vec{c}]\vec{a}\right\}+\left\{[\vec{c}\,\vec{a}]\vec{b}\right\}=0\ldots$$

Заметим, что введенная операция и коммутативна и некоммутативна, что управляется распределением факторов симметричности на числовом множестве. Легко обнаружить, что новая операция ассоциативна и неассоциативна. Действительно, получим

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle-\langle a\langle bc\rangle\rangle=\sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)(ac)b-\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)b(ac)+$$

$$+\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)b(ca)-\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc)(ca)b.$$

Эта разность зависит от распределения факторов симметричности или от отношений и может быть равной или не равной нулю. Следовательно, *концепция отношений способна качественно изменить сущность числового множества*.

Проанализируем по аналогичной методике **неассоциативные множества**. С целью упрощения записи комбинаторное произведение не будем показывать в формуле произведения комбинаторное произведение, записывая

$$a \underset{lc}{\overset{k}{\times}} b = ab.$$

Выберем в качестве конкретного примера неассоциативное множество размерности 2×2. Примем правило сопоставления матрицам числа σ по формуле

$$\sigma = \alpha\beta .$$

Для матриц «гравитационного типа» примем $\alpha = 1$, для матриц «электрического типа» примем $\alpha = -1$. Зададим число $\beta = 1$ для симметричных матриц гравитационного типа и для матриц электрического типа с вертикальным расположением единиц. Зададим число $\beta = -1$ для несимметричных матриц гравитационного типа и для матриц электрического типа с горизонтальным расположением единиц. В случае «смешения» типов матриц нужно принимать дополнительные условия. Фактически мы наделяем матрицы дополнительными, внутренними свойствами. Они могут иметь как закономерный характер, так и *выполнять роль дополнительного внешнего фактора, фиксируя некоторые условия, в которых находится объект, отображаемый матрицей.*

Сохраним для неассоциативных множеств правило выбора величины σ для произведения матриц:

$$\sigma(ab) = \sigma(c) = \sigma(ba).$$

Пусть, как и раньше, определены действия вида

$$\langle ab\rangle = ab - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)ba ,$$

$$\langle bc\rangle = bc - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)cb ,$$

$$\langle ca\rangle = ca - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)ac .$$

Определим также величины

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle = \langle a\,b\rangle c - \sigma(a, b)\sigma(c)\sigma(a, b, c)c\langle ab\rangle ,$$

$$\langle\langle bc\rangle a\rangle = \langle bc\rangle a - \sigma(b, c)\sigma(a)\sigma(b, c, a)a\langle bc\rangle ,$$

$$\langle\langle ca\rangle b\rangle = \langle ca\rangle b - \sigma(c, a)\sigma(b)\sigma(c, a, b)b\langle ca\rangle .$$

$$\sigma(a, b, c) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc).$$

Примем циклическое условие, определяющее ассоциативную алгебру с отношением вида

$$D(1) = \langle\langle ab\rangle c\rangle\sigma(b)\sigma(ac) + \langle\langle bc\rangle a\rangle\sigma(c)\sigma(ba) + \langle\langle ca\rangle b\rangle\sigma(a)\sigma(cb).$$

Из анализа, указанного выше, следует, что $D(1) = 0$ для ассоциативного множества. По этой причине нужно дополнить величину $D(1)$ некоторым другим выражением. Построим его на основе

$$D(2) = \alpha\langle\langle ba\rangle c\rangle\sigma(b)\sigma(ac) + \beta\langle\langle cb\rangle a\rangle\sigma(c)\sigma(ba) + \gamma\langle\langle ac\rangle b\rangle\sigma(a)\sigma(cb).$$

Покажем на конкретном примере выполнение закона для неассоциативного множества

$$D(1) + D(2) = 0 .$$

В более сложных ситуациях следует ожидать закона вида

$$\sum_i a(i)D(i) = 0 .$$

Выберем матрицы

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно принятому правилу нахождения внутренних параметров для этих матриц получим

$$\sigma(a)=1\cdot 1=1, \sigma(b)=-1\cdot 1=-1, \sigma(a)=-1\cdot -1=1.$$

Используя комбинаторное произведение матриц, получим для произведений такие значения σ:

$$\sigma(ab=c)=1=\sigma(ba),$$
$$\sigma(ac=a)=1=\sigma(ca),$$
$$\sigma(bc=b)=-1=\sigma(cb).$$

В рассматриваемом случае все тройные величины одинаковы

$$\sigma(a,b,c)=\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc)=\sigma(b,c,a)=\sigma(c,a,b)=1.$$

Получим

$$D(1)=(-1[\{ab\}c])+\{[bc]a\}+\{[ca],b\},$$
$$D(2)=\alpha[\{ba\}c]+\beta\{[cb]a\}+\gamma\{[ac]b\}.$$

При выборе $\alpha=\beta=\gamma=1$ сумма указанных выражений обращается в ноль.

Обратимся к методу анализа неассоциативных алгебр на основе формализма тройных систем. В тройные системы входят элементы алгебры, их двойные произведения в форме коммутаторов, а также тройные произведения в форме системы ассоциаторов. Тогда

$$[a,b]=ab-ba, (a,b,c)=(ab)c-a(bc).$$

Такие величины мы можем найти для любого неассоциативного множества. Легко проверить, что для произвольной тройки элементов выполняется единый циклический закон. Он обобщает тождество Якоби и имеет вид

$$[[a,b]c]+[[b,c]a]+[[c,a]b]=(a,b,c)+(b,c,a)+(c,a,b)-(b,a,c)-(c,b,a)-(a,c,b).$$

Аналогично можно ввести антикоммутатор и антиассоциатор

$$\{a,b\}=ab+ba, (a,b,c)^{+}=(ab)c+a(bc).$$

Для них выполняется тождество вида

$$\{\{a,b\}c\}+\{\{b,c\}a\}+\{\{c,a\}b\}=(a,b,c)^{+}+(b,c,a)^{+}+(c,a,b)^{+}+(b,a,c)^{+}+(c,b,a)^{+}+(a,c,b)^{+}.$$

Указанные два равенства можно объединить как в виде суммы с множителями, так и в виде разности с множителями. В чем смысл такого объединения, пока что сказать трудно.

Найдем связи между величинами в некоммутативном множестве для пары элементов при условии, что элементы могут повторяться. Рассмотрим объект на коммутаторах

$$\Delta_1=[[a,b]a]+[[b,a]b].$$

Введем пару операций:

$$\{a,b,c\}=(ab)c+a(bc), \quad |a,b,c|=a(bc)+(cb)a.$$

Назовём их антиассоциатором и «зеркалом». Тогда

$$\{a,b,a\}=(ab)a+a(ba), \quad |a,a,b|=a(ab)+(ba)a.$$

В частном случае

$$\{a,b,a\}=|a,b,a|.$$

Запишем объект, используя введенные операции. Получим

$$\Delta_1 = (ab)a - (ba)a - a(ab) + a(ba) + (ba)b - (ab)b - b(ba) + b(ab),$$
$$\Delta_1 = \{a,b,a\} + \{b,a,b\} - |a,a,b| - |b,b,a|.$$

Введем объект

$$\Delta_1^* = \{a,a,b\} + \{b,b,a\} - |a,b,a| - |b,a,b|,$$
$$\Delta_1^* = (aa)b + a(ab) + (bb)a + b(ba) - a(ba) - (ab)a - b(ab) - (ba)b.$$

Просуммируем введенные величины:

$$\Delta_1 + \Delta_1^* = (ab)a - (ba)a - a(ab) + a(ba) + (ba)b - (ab)b - b(ba) + b(ab) +$$
$$+ (aa)b + a(ab) + (bb)a + b(ba) - a(ba) - (ab)a - b(ab) - (ba)b.$$

Получим

$$\Delta_1 + \Delta_1^* = (aa)b - (ba)a + b(aa) - b(aa) + (bb)a - (ab)b + a(bb) - a(bb),$$
$$\Delta_1 + \Delta_1^* = |b,a,a| - \{b,a,a\} + |a,b,b| - \{a,b,b\}.$$

Следовательно, выполняется равенство

$$\{a,b,a\} + \{b,a,b\} + \{b,a,a\} + \{a,b,b\} + \{a,a,b\} + \{b,b,a\} =$$
$$= |a,b,a| + |b,a,b| + |b,a,a| + |a,b,b| + |a,a,b| + |b,b,a|.$$

В нём учитывается комбинаторика отношений в паре троек:

$$a,a,b \quad a,b,a \quad b,a,a \quad b,b,a \quad b,a,b \quad a,b,b$$

Этот вариант удобно представить в форме треугольника с вершинами b, в который вписан перевернутый треугольник с вершинами a, когда 2 вершины внутреннего треугольника расположены на ребрах внешнего треугольника, а третья вершина не прикасается к оставшемуся ребру.

Полученный результат косвенно свидетельствует о том, что для неассоциативных множеств важна *комбинаторика отношений*. Такова *суть неассоциативных множеств*. В том случае, когда полного учета комбинаторики нет, мы сводим ситуацию к ассоциативному случаю.

Полученное равенство разбивается на два типа простых равенств:

$$\{a,b,a\} = |a,b,a| \Leftrightarrow \{b,a,b\} = |b,a,b|,$$
$$\{a,b,b\} + \{b,b,a\} = |a,b,b| + |b,b,a| \Leftrightarrow \{b,a,a\} + \{a,a,b\} = |b,a,a| + |a,a,b|.$$

Введем новую операцию

$$\|a,b,c\| = a(bc) - (cb)a.$$

Тогда

$$\{a,b,c\} - \|c,b,a\| + \{c,b,a\} - \|a,b,c\| =$$
$$= a(bc) + (ab)c - c(ba) - (ab)c +$$
$$+ c(ba) + (cb)a - a(bc) - (cb)a = 0.$$

Получим равенство

$$\{a,b,c\} + \{c,b,a\} = \|a,b,c\| + \|c,b,a\|.$$

Складывается впечатление, что неассоциативные множества представляют собой «удобную среду» для математического и физического моделирования. Они соответствуют принципу реализации всех возможностей, выдвинутому в физике.

Неассоциативные множества подчинены локальным и глобальным циклическим законам. Они расширяют аналогичные законы для ассоциативных множеств. Они иллюстрируют дискретность свойств физических объектов, ассоциированных с исследуемыми математическими объектами.

Практика убедила нас в том, что физические объекты многофункциональны. Функции взаимосвязаны и меняются в зависимости от внутреннего состояния и внешних условий. Согласно новой концепции, объясняем взаимодействие, а потому и функции объекта, отношениями между объектами и их составляющими. С другой стороны, систему отношений мы ассоциируем с системой математических операций. Естественно предположить, что многофункциональность физического объекта может быть реализована в модели на некоторой системе операций. Вместо одной операции, например, стандартного матричного произведения, мы можем ввести в модель систему операций. Комбинаторные операции в состоянии по своим возможностям и идеологии анализа выступают в роли системы, характеризующей многофункциональность физических объектов.

Введем **пространство операций.** В пространстве операций зададим скаляры, векторы, тензоры, спиноры. Изменение физических величин будет разным в зависимости от того, какая операция или система операций применяется к этим величинам. Примем точку зрения, что операции могут иметь базис. Тогда можно построить линейные величины в пространстве операций. Их требуется корректно ввести в физическую модель. Возможно их подчинение динамическим законам.

Между операциями может быть связь. Например, для матриц A, B с комбинаторным произведением есть матрицы C, D с матричным произведением и с другой комбинаторной операцией:

$$A \underset{lc}{\overset{k}{\times}} B = C \overset{p}{\times} (A \times B) + D.$$

Аналогично матричные операции могут быть заменены на комбинаторные с «добавками».

При анализе проблемы расширения и углубления физических моделей нужно принять во внимание не только мультипликативное операционное расширение, но и возможности аддитивного расширения моделей. Укажем эти возможности на конкретной реализации. Так, например, уравнения электродинамики Фарадея-Ампера имеют матричный вид

$$g^{ij} a_i \partial_j \psi + r^{ij} b_i \partial_j \overline{\psi} = 0, g^{ij} = diag(1,1,1,-1), r^{ij} = diag(1,1,1,1)...$$

Меняя метрики, входящие в уравнения, мы реализуем расширение физической модели. Понятно, что *изменение метрики может быть никак не связано с гравитацией*, потому что метрические свойства гравитации могут быть слабее метрических свойств, обусловленных внешними условиями и внутренними изменениями электромагнитных явлений.

С другой стороны, могут частные производные меняться на ковариантные. Например

$$\partial_i \to \partial_i + B_i .$$

Следуя моделям теории калибровочных полей будут меняться величины, используемые в физической модели.

Операционное и аддитивное расширение физических моделей дополнительно друг другу. Нужны его конкретные реализации. Из общих соображений следует, что мы фактически переходим от *одноуровневых физических моделей к трансфинитным физическим моделям.*

Комбинаторные операции имеют богатые свойства. Часть из них в настоящее время скрыта от анализа и приложений.

Неассоциативные множество естественно рассматривать как алгебры.

Их коммутаторы и ассоциаторы выражаются через компоненты векторов и структурные постоянные. Так,

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle^i = C^i_{jk} a^j b^k, \left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle^i = \sigma C^i_{jm} C^m_{lk} a^j b^k c^l .$$

Им пропорциональны тензоры кривизны и кручения аффинной связности, порождающей геодезическую лупу на многообразии группы, структурные константы C_{ij}^{k} которой использованы в выражениях для коммутаторов и ассоциаторов.

$$R_{jk}^{i} = \alpha C_{jk}^{i},$$

$$R_{jlk}^{i} = \beta C_{jm}^{i} C_{lk}^{m} a^{j}.$$

Поскольку физические модели записываются в форме элементов алгебры, мы вправе использовать для них коммутаторы и ассоциаторы.

Кривизна и кручение аффинных связностей, ассоциированных с группой, могут характеризовать алгебраические свойства исследуемых физических моделей, проявления внутренних степеней свободы, присущих явлению.

В электродинамике элементы алгебры описывают пару физических величин: полей и индукций. Для каждой из рассматриваемых величин используется пара алгебр. Они являются касательными пространствами пары подгрупп $\left(a^{i}, b^{i}\right)$. Они имеют размерность 4. По этой **причине внешние, пространственно-временные и внутренние, алгебраические свойства «разыгрываются» в пространствах аффинной связности одинаковой размерности.** Задача физического моделирования состоит в том, чтобы учесть это согласование для практических потребностей.

Обычно в физике применяются алгебры Ли. Они ассоциированы с группами Ли и характеризуют касательные пространства к группе в окрестности единицы группы. Чаще всего *алгебры характеризуют некоторые* ***движения*.** Такова, например, алгебра трехмерных вращений. Она задается генераторами группы вращений:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они подчинены соотношениям:

$$[x, y] = z, [y, z] = x, [z, x] = y.$$

Известна вторая алгебр. Она выражается на основе матриц размерности 2×2 вида

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с соотношениями

$$[x, y] = 2y, [y, z] = x, [z, x] = 2z.$$

С математической точки зрения есть только эта пара неизоморфных алгебр размерности 3. Рассмотрим ещё один вариант. Он задан матрицами размерности 2×2 вида

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они подчинены соотношениям:

$$[x, y] = 2z, [y, z] = 2x, [z, x] = -2y.$$

Покажем, что *алгебры можно классифицировать* ***по структуре*** **физического изделия** на основе системы отношений между физическими объектами. Все рассмотренные матрицы можно интерпретировать как математическую запись системы отношений между тремя объектами.

В первом случае речь идет об отношениях первого объекта ко второму и обратно, первого объекта к третьему и обратно, второго объекта к третьему и обратно. Во втором и третьем случая речь идет о взаимодействии одного объекта с парой, рассматриваемой как один объект. Матрицы выражают возможные отношения между ними. В этих случаях в рассмотрение введено *самовоздействие*, характеризуемое числами, расположенными на диагонали. Первый объект в обоих случаях влияет на себя положительно. Второй объект в обоих случаях влияет на себя отрицательно. В первом случае есть влияние одного объекта на второй без обратной реакции. Во втором случае есть обратное влияние. Понятно, что возможны и другие варианты. Следовательно, *алгебры можно задавать, анализируя систему отношений между объектами.* Тогда изменение свойств алгебры свидетельствует об изменении отношений между объектами.

Используем вместо матрицы x единичную матрицу. Получим алгебру вида

$$[x, y] = 0, [y, z] = 2x, [z, x] = 0.$$

Рассмотрим варианты построения четырехмерной алгебры на основе матриц размерности 3×3. Пусть

$$\xi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\{\xi(1), x\} = \xi(1)x + x\xi(1) = 0, \{\xi(1), y\} = y, \{\xi(1), z\} = -z.$$

Для

$$\xi(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \xi(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

получим соответственно

$$\{\xi(2), x\} = x, \{\xi(2), y\} = -y, \{\xi(2), z\} = 0.$$
$$\{\xi(3), x\} = x, \{\xi(1), y\} = 0, \{\xi(1), z\} = -z.$$

Соотношения для других матриц основаны на коммутаторах. Мы получили модель градуированной алгебры с соотношениями

$$ab + (-1)^{p(a)p(b)}ba = \alpha c.$$

Величины $p(\eta)$ заданы по правилу: $p(\xi) = 0, p(x, y, z) = 1$. Следовательно, *градуированная* алгебра характеризует физическую систему с элементами самовоздействия. Матрицы $\xi(i)$ подчинены условиям

$$\xi(1) + \xi(2) = \xi(3),$$
$$\xi(3) - \xi(2) = \xi(1),$$
$$\xi(1) - \xi(3) = -\xi(2).$$

Следовательно, в системе градуированных алгебр есть дополнительные связи между генераторами, ассоциированными с антикоммутаторами.

Алгоритмы введения неассоциативности в физические модели

Неассоциативность, с математической точки зрения, есть нарушение тождества Якоби

$$[[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] \neq 0.$$

Здесь $[ab]=ab-ba$. Меняя данную операцию, мы обеспечиваем неассоциативность. Например, обобщая модель Сантилли Р., можно принять условие

$$[ab]=\lambda(a)ab-\mu(b)ba.$$

Если введенные функции $\lambda(a),\mu(b)$ имеют матричные значения, мы получаем вариант неассоциативной алгебры.

Примем новое правило. Обобщим выражение для коммутатора. Учтем софистатность математических и физических величин. Примем точку зрения, что матрицы математически представляют базовые физические объекты. Заметим, что их свойства при каноническом задании матриц могут быть учтены недостаточно. По этой причине матрицы нужно изменить, приняв некий алгоритм учета внешних обстоятельств, а также возможность внутренней структуры и динамики исследуемого объекта. Один из возможных вариантов реализуется на основе замены величин a,b выражениями, учитывающими внешние $\alpha(\eta)$ и внутренние $\beta(\eta)$ свойства физического объекта. Пусть

$$a\to a^*=(I+\alpha(a)+j\beta(a))a=(I+n(a))a,$$
$$b\to b^*=(I+\alpha(b)+j\beta(b))a=(I+n(b))b.$$

Определим произведение новых величин на основе стандартной матричной операции:

$$a*b=a^*b^*,[ab]=a^*b^*-b^*a^*.$$

Получим

$$a*b=(a+n(a)a)(b+n(b)b)=ab+(n(a)a)b+a(n(b)b)+(n(a)a)(n(b)b),$$
$$(a*b)*c=(ab)c+((n(a)a)b+a(n(b)b)+(n(a)a)(n(b)b))c+(ab)(\alpha(c)c)+$$
$$+((n(a)a)b+a(n(b)b)+(n(a)a)(n(b)b))(\alpha(c)c),$$
$$b*c=(b+n(b)b)(c+n(c)c)=bc+(n(b)b)c+b(n(c)c)+(n(b)b)(n(c)c),$$
$$a*(b*c)=a(bc)+a((n(b)b)c+b(n(c)c)+(n(b)b)(n(c)c))+(n(a)a)(bc)+$$
$$+(n(a)a)((n(b)b)c+b(n(c)c)+(n(b)b)(n(c)c)).$$

Между собой сравниваются слагаемые тождества Якоби вида $(ab)a,a(ba)$. При использовании матриц они совпадают. Другие слагаемые входят с разными множителя, что обеспечивает неассоциативность общего выражения.

Принимая функции расширения физической модели $n(\xi)$ в форме матриц, получим доказательство неассоциативности данной алгебры. Замена матриц в физической модели вида

$$a\to(I+n(a))a,b\to(I+n(b)b)$$

может рассматриваться как её *деформация на основе функций расширения*. Она учитывает дополнительные внешние обстоятельства задачи и внутренние свойства исследуемых объектов. При представлении функций расширения $n(\xi)$ скалярами, физическая модель остается ассоциативной.

Покажем, что функции расширения позволяют согласовать между собой комбинаторное и матричное произведение. Действительно, имеем

$$a*b=(a+n(a)a)(b+n(b)b)=ab+(n(a)a)b+a(n(b)b)+(n(a)a)(n(b)b)=ab+xb+ay+xy,$$
$$\Delta=a*b-ab=xb+ay+xy,x=n(a)a,y=n(b)b.$$

Мы получили одно уравнение с двумя неизвестными. Оно имеет бесчисленное множество решений. Из всего многообразия можно выбрать такие *данные, которые для конкретной ситуации будут лучше всего согласовываться с экспериментом*. Выбирая конкретное значение y_0, получим уравнение

$$\Delta-ay_0=x(b+y_0).$$

Отсюда следует, при условии разрешимости уравнения, значение x_0. Пара согласованных решений формирует «кривую возможностей» физической модели. Она должна быть согласована с экспериментальными данными. Рассмотрим частный пример. Пусть

$$a \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\underset{lc}{\times}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a \times b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = a \overset{k}{\underset{lc}{\times}} b - a \times b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (y=0) = x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = n(a)a \Rightarrow$$

$$n(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Введенная нами функция расширения в данном случае выражена через элементы знаковой неассоциативной алгебры с базисными матрицами размерности 4×4.

Сравним предложенный подход с произведением элементов сигруппы Гало. Рассмотрим

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ w_1 u_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ w_2 u_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + w_2 u_2 u_1 & u_2 + u_1 \\ w_2 u_2 + w_1 u_1 & 1 + w_1 u_2 u_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ w_1 u_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ w_1 u_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + w_1 u_2 u_1 & u_2 + u_1 \\ w_1 u_2 + w_1 u_1 & 1 + w_1 u_2 u_1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} (w_2 - w_1) u_2 u_1 & 0 \\ (w_2 - w_1) u_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ w_1 u_1 & 1 \end{pmatrix} B + A \begin{pmatrix} 1 & u_2 \\ w_2 u_2 & 1 \end{pmatrix} + AB.$$

Пусть $A = 0.$ Рассмотрим

$$\Delta = \begin{pmatrix} (w_2 - w_1) u_2 u_1 & 0 \\ (w_2 - w_1) u_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ w_1 u_1 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ w_1 u_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\alpha + u_1\beta = (w_2 - w_1)u_2u_1 = \sigma,$$
$$w_1u_1\alpha + u_1\beta = (w_2 - w_1)u_2 = \pi.$$

Эта линейная система имеет решение. Следовательно, произведение элементов сигруппы Гало может быть представлено в виде, используемом для произведения матриц при построении неассоциативных физических моделей.

Заметим возможность выражения используемого множителя на основе треугольных матриц:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & -n \end{pmatrix}\right].$$

С другой стороны, так выражаются элементы неассоциативной алгебры, ассоциированные с электрическими предзарядами.

*Заметим, что комбинаторная операция меняет результат произведения матриц при неизменности их начального вида. Алгоритм функций расширения не меняет матричного произведения, но **меняет начальные матрицы**. Из общих соображений ясно, что при расчете физических изделий и их свойств такие варианты возможны.*

*Заметим, что решения в неассоциативных моделях зависят от выбора начального представителя решения. По этой причине имеет место многовариантность. Она выступает в роли фундаментальной черты трансфинитной реальности. **«Случайность»** в моделях трансфинитной реальности **детерминирована скрытыми обстоятельствами.** Их сложно обнаружить, что приводит к построению моделей вероятностной физики.*

*Заметим, что алгебра, зависимая от групп (например, алгебра Ли) выступает в роли средства, показывающего **явные стороны движений** и она нацелена на писание **сохраняющихся величин**, в частности, законов сохранения. Неассоциативная алгебра, независимая от групп, ориентирована на фиксацию и проявление **скрытых сторон** изделия и его свойств, а также на описание **несохраняющихся величин**, которые меняются без учета законов сохранения.*

Для того чтобы вводимая математическая деформация величин проявила себя в физической модели, требуется сделать несколько дополнительных предположений.

Прежде всего, обратим внимание на матричную структуру уравнений физической модели. В ней сами величины, а также дифференциальные и кодифференциальные уравнения могут быть представлены в форме $G-$модулей на группе заполнения. Роль группы заполнения выполняет проективная унимодулярная группа $PSL(4,R)$. Поскольку на этой основе можно выразить элементы матричной алгебры, мы вправе любую физическую модель записать в матричном виде на основе группы заполнения.

Так задана, например, электродинамика Максвелла. Уравнения Фарадея-Ампера

$$g^{ij}a_i\partial_j\psi + r^{ij}b_i\partial_j\overline{\psi} = 0$$

содержат матрицы, которые, равно как и спиноры, могут быть изменены на основе модели указанного вида.

Данные уравнения, как и другие матричные уравнения физических моделей, можно умножить справа на канонические мономиальные матрицы. Например, матрицы a^i переходят в матрицы, соответствующие смежному классу нормальной подгруппы A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\right\}\ldots$$

При этом происходит только перестановка строк в матрицах. По этой причине уравнения спинорного вида не меняются. Однако они представлены теперь в виде уравнений с произведением матриц. *При изменении модели по алгоритму функций расширения произойдет дополнительное её усложнение*. Его нет в случае, когда уравнения выражены через одиночные матрицы.

Неассоциативное расширение физических моделей позволяет дополнить известные решения и условия системой дополнительных обстоятельств.

Поскольку внешние условия и внутренние обстоятельства динамичны и согласованы друг с другом, нужны *динамические условия на функции расширения физической модели.* Тогда получим замкнутую систему уравнений. Для неё нужны расширенные начальные и граничные условия.

Философские аспекты неассоциативности

Реальность убеждает нас в том, что её возможности существенно превосходят возможности отдельного человека и всего Человечества. Этот факт позволяет нам принять *принцип реализации всех возможностей*: жизнь устроена так, что реализуются все варианты и все возможности. Руководствуясь им, при построении моделей и организации практики нужно стараться достичь уровня максимальной полноты подхода.

Заметим, однако, что поскольку у реальности есть много осмысленного, то, следуя принципу реализации всех возможностей, у реальности есть много неосмысленного. По этой причине не нужно пытаться все понять, что не исключает попыток расширить границы осмысленного знания.

Заметим, что есть возможное как для теории, так и для эксперимента. Есть невозможное как для теории, так и для эксперимента. Есть возможное для теории, но невозможное для эксперимента. Есть возможное для эксперимента, но невозможное для теории. Указанные грани практики следует принимать во внимание.

Концепция трансфинитной материи (многогранной, многоуровневой, многофункциональной, многозначной...) соответствует принципу реализации всех возможностей. Их нужно реализовывать через систему физических изделий и их свойств. *Одним из таких изделий, естественно, является сам человек*. В моделях трансфинитной реальности человека следует рассматривать как базовый объект определенного уровня материи.

У других объектов в силу *принципа софистатности базовых объектов* могут быть свойства, аналогичные свойствам человека. Более того, следуя логике трансфинитной реальности, возможны **базовые объекты** и изделия, изготовленные из них, со свойствами, которые значительно превосходят свойства человека и любой совокупности людей.

Физика изучает физическую материю. Под эти термином мы понимаем всё, что имеет структуру и активность. С этой точки зрения весь мир есть физическая материя. То, что не имеет структуры и активности, есть ничто. Моделирование трансфинитного мира и практика в нём формируют фундаментальные задачи физики.

При анализе науки в целом нужно принять во внимание следующие факты:

1. Физическая реальность значительно сложнее совокупности моделей, приёмов её описания и практики в ней.

2. Любая модель описания изделий, их связей и активностей ограничена, так как она отражает ограниченную практику людей и средств познания реальности.

3. Теоретические модели обязаны развиваться на основе расширения и углубления практики и познания.

4. Физическая реальность есть согласованная, развивающаяся динамическая система.

В теоретическом моделировании есть пара диаметрально противоположных тенденций развития. Обе они по-своему полезны. С одной стороны, есть тенденция упростить сложное, выделив из него некоторые, может быть, не главные моменты практики. С другой стороны, есть тенденция усложнять простое.

Иногда проще бывает решить более сложную задачу, основываясь на этом решения можно извлечь полезные следствия в частных задачах, которые ранее не имели решения.

Вряд ли корректен подход, согласно которому сознание рассматривается как продукт достигнутого опыта. У сознания изначально есть свойства, позволяющие ему выйти за пределы достигнутой практики. Таковы фантазии и интуиция, задающие дополнительные степени свободы сознания. Они не сводятся к достигнутой практике, хотя могут быть как-то согласованы с ней.

Обобщение концепции множества и величин, используемых в моделях, естественно зависит от системы математических операций, используемых на практике. Комбинаторные операции, анализ свойств и приложений которых начат в данной работе, соответствуют идеологии моделирования трансфинитной реальности. Предлагается новая операция в соответствии с ожиданиями анализа и применения новых свойств физической реальности.

Инструментами математического исследования являются объекты и операции. Они соответствуют некоторой алгебре. Поэтому *расширение и углубление алгебр*, а также их связей с физикой, конструктивно для трансфинитной практики.

Софистатность (взаимная трансфинитность) означает также *взаимную возможность*.

От знаний одного качества к знаниям другого качества ведет явная и скрытная софистатность, в которой проявляет себя как пустота фактов, так и сложнейшие черты реальности.

Принцип софистатности структур и активностей предполагает, что невозможна активность без структуры, равно как невозможна структура без активности. Наличие объекта означает наличие у него структуры и активности, которые согласованы друг с другом.

Трансфинитность материи предполагает и допускает трансфинитность сознания, а также трансфинитность чувств. Поэтому имеет место объективная трансфинитность знаний, согласованных с трансфинитным сознанием и чувствами.

Заключение

Симметрия в форме групп и групповых модулей давно образует основу фундаментальной физики. Она широко используется также в приложениях. Постепенно сложилось убеждение, что структура физических объектов, как и их поведение, описываются посредством группового анализа.

Комбинаторная операция, предложенная в монографии, уточняет ситуацию и переводит задачу на качественно более высокий уровень.

Неассоциативные множества не являются группой. По этой причине концепция симметрии должна быть изменена. В неассоциативном множестве структура физических объектов неассоциативна, а потому, в силу принципа софистатности структуры и динамики, их динамика неассоциативна. Новые модели неизбежно выходят за рамки моделей, основанных на группах. В частности, должна быть расширена и уточнена теория калибровочных полей.

Меняется понимание и представление законов сохранения. В вариационном подходе они обусловлены группой симметрии. В новых моделях, основанных на неассоциативных множествах, симметрия будет основана не на группах симметрии. В модели неассоциативных множеств меняется концепция физической материи. Она должна рассматриваться, следуя данным опыта, как трансфинитный объект. Для такого объекта характерен переход энергии с одного уровня материи на другие. Неассоциативные множества, как показал начальный анализ, обладают необычными новыми свойствами, которые представляются адекватными реальным свойствам трансфинитной реальности.

Физические законы имеют форму законов сохранения для симметрийных модулей, ассоциированных с величинами и операторами, заданными в неассоциативном множестве.

Возможно построение системы уравнений, состоящей из блоков, подчиненных матричной операции или своим комбинаторным операциям. В этом случае, если нет связей между блоками, системы уравнений можно решать независимо друг от друга. В частности, блоки могут быть получены посредством матричного или комбинаторного произведения из некоторой базовой системы уравнений. Предложенный прием уместен как для алгебраических, так и для дифференциальных уравнений.

Принципиально разное поведение решений соответствует концепции принципиально разного структурирования и активности объектов трансфинитной реальности. Они многогранны и многофункциональны. Комбинаторная операция позволяет реализовать такую возможность. При этом *меняется концепция решения*. В матричных алгоритмах подстановка решения в систему уравнений является проверкой правильности полученного решения. В комбинаторном подходе система уравнений является только носителем решений. Подстановка решений в уравнения не является средством проверки корректности решения. В этом варианте кажется возможным принять любые решения. Однако это не так, потому что любое решение не может быть отождествлено с комбинаторным. В качестве средства проверки корректности комбинаторного решения выступает проверка корректности получения данного решения. Другими словами, скрытое решение неявно связано с используемой системой уравнений.

Комбинаторный подход к построению и оценке решений систем уравнений позволяет принять *новую схему верификации* полученных результатов. Следует считать, что не всякие физические качества допускают экспериментальную проверку. Есть свойства объектов, которые выходят за рамки возможностей измерительных приборов. Однако они могут присутствовать как элемент теории и практики. Скрытые свойства могут быть субъективными и объективными. Они могут быть скрыты как от математического анализа, так и от измерения посредством имеющихся приборов.

Возможность расчета, не обеспеченная возможностью экспериментального измерения, является одним из новых элементов трансфинитной верификации практики.

Возможности эксперимента, не укладывающиеся в рамки логики и расчета, перестанут быть фактором, сдерживающим познание.

Комбинаторный подход допускает соединение в систему объектов, которые качественно различны по структуре и поведению. Он хорош для компьютерного моделирования, реализуя модели разных «Вселенных». Они устроены по-разному и по-разному ведут себя. Поскольку **реальная Вселенная реализует все возможности**, мы получаем средства для анализа новых возможностей при минимальных материальных затратах на пути развития интеллекта и алгоритмов практики.

Трансфинитная реальность допускает трансфинитную верификацию практики. Однако не следует забывать, что консерватизм мышления и поведения людей также трансфинитен. В силу этого обстоятельства бывает сложно создавать и утверждать новое знание, опираясь на достигнутый опыт и известную систему «контроля качества».

Для нового знания и новой практики нужны как новые люди, так и новые алгоритмы утверждения практики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. – М. Наука, 1967.
2. Акивис А.М. Введение в теорию 3-тканей. – Калинин :КГУ, 1985.
3. Сабинин Л.В. О геометрии луп. // Мат. заметки. – 1972.т.12,№5.
4. Kikkawa M. On local loops in affine manifolds // J.Sci. Yiroshima Univ. – 1964. – V.28. – p.199-207.
5. Акивис М.А. О локальных алгебрах // Сиб. мат. журнал. – 1976. – т.17. -- №2. с. 5-11.
6. Nomizy K/ Invariant affine connection on homogeneous space // Amer. J. Math. – 1954. – V.76. №1. – p. 33-65.
7. Sagle A. On algebras of totally geodesic Space (triple system) //J.Sci. Hiroshima Univ. Ser.A. – 1958. – V.21. -- №1. – p.107-113.
8. Сабинин Л.И. К эквивалентности категорий луп и однородных пространств // ДАН СССР. – 1972. – т.205. -- №3. – с.533-536.
9. Nambu Y. Generalised Hamiltonian Dynamics // Phys. Rev. – 1973. – D7. – p.2405-2412.
10. Gunaydin M. Scola Norm. Sup. Pisa. – 1975 / Preprint 5/75.
11. Jordan P. Uber das Verhaltnis der Elementariange zur Quantentheorie // Comm. Math. Phys. – 1968. – V.5. – p.279-289.
12. Birkhoff G., Neumann J. // Ann. of Math. – 1936. – V.37. -- p.823.

Научное издание

Барыкин Виктор Николаевич

НЕАССОЦИАТИВНОСТЬ НА КОМБИНАТОРНОЙ ОПЕРАЦИИ

Ответственный за выпуск Владимир Кузьмин

Подписано в печать 19.04.2011.
Формат 60x84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 27,4. Уч.-изд. л. 8,9.
Тираж 50 экз. Заказ 18.

ООО «Ковчег»
ЛИ № 02330/0548599 от 09.07.2009.
Пр. Независимости, 68-19, 220072 г.Минск
Тел./факс: (017) 284 04 33
kovcheg_info@tut.by

ISBN 978-985-7006-08-3

9 789857 006083