Теория
формальных отношений

Введение

Прелесть геометрии, с физической точки зрения, в том, что, с одной стороны, она настроена на получение законов, применимых для объектов любого уровня материи, с другой стороны, базируется на структурном представлении физических объектов и взаимосвязей между ними. Именно так подходят к анализу объективной реальности физики.

Математики на основе экспериментальных данных конструируют виртуальную (формальную) реальность, представляя физические объекты математическими объектами, а взаимодействия объектов представляются системой математических операций. Речь идет не только о вложении эмпирических данных в рамки математической модели, но о конструировании модели такого качества, которое достаточно также для предсказания новых данных. Кроме этого, модель должна допускать возможность расширения и углубления в согласии с действующей или ожидаемой практикой.

Прелесть топологии, с физической точки зрения, в том, что она настроена на получение законов, соответствующих моделям классификации объектов и их свойств, в частности, согласования их между собой по тем или другим признакам. Непрерывность предполагает анализ взаимоотношений объектов разного размера и разной размерности, их согласований между собой.

Для физиков многие понятия и алгоритмы геометрии и топологии наивны и примитивны. Приведем несколько примеров. Расстояния между объектами можно задавать с учетом ориентации: объекты могут располагаться «спиной» или «лицом» друг к другу. В зависимости от этого расстояние будет разным. Такой аспект проблемы не учитывается в стандартном варианте моделирования. Геометрия имеет дело с «точками», на роль которых, с физической точки зрения, претендует любой физический объект. Это могут быть электроны, атомы, яблоки, планеты, книги, люди и т.д. Представление каждого из данных объектов точкой означает формализацию, которая убирает все индивидуальные признаки и свойства объекта. Реализована концентрация только на свойстве, названном пространством: объекты имеют размеры и расстояния между объектами. По этой причине, с физической точки зрения, есть система пространств, различающихся по тому, какой объект принят в качестве точечного объекта.

С другой стороны, геометрия описывает изменения и движения физических объектов. Согласно практике изменения объектов в пространстве, компоненты вектора могут зависеть от самого вектора и от того, в каком пространстве реализуются эти изменения. Например, основу анализа образует величина

$$dA^p = \Gamma^p_{ks}\left(x^r\right)A^k dx^s.$$

Её изменения согласованы с самой величиной и факторами внешнего влияния в форме «компонент связности» В этом подходе пространство есть фактор физического влияния на величину. Это может быть аналог физической среды, моделируемой посредством указанных компонент. Понятно, что изменения могут быть существенно более сложными, реализуя другие алгоритмы влияний. Физика указывает возможности конструктивных изменений геометрий.

Важным звеном всех разработанных моделей является система операций, применяемых при расчете. Поскольку обычно модели конструируются на матрицах, речь идет о системе операций для матриц. Поскольку матрицы образуют основу любых физических моделей, обобщенный подход к геометрии позволит обобщить физические модели. Новейший анализ операций позволил найти спектр разнообразных операций. По этой причине место отдельных геометрий занимает система геометрий. Аналогичное замечание пригодно для топологий: есть операционно значимая система топологий.

Группа на структурной операции

В теории групп и алгебр математики начинают анализ с задания некоторой системы элементов и системы операций. Обе составляющие следуют обычно из предыдущей практики, а также из целевой установки на достижение новых результатов. Часто элементы теории априорны не потому, что они абсолютны в смысле истины, а потому что отсутствуют подходы и средства для доказательства границ и меры принятой априорности.

Аналогично действуют физики: они создают новые конструкции и новые свойства на основе применения элементов предыдущей практики и ожидаемых перспектив новой практики.

Для достижения нового качества теории и эксперимента требуются новые элементы и новые операции. Рассмотрим одну возможность, которая представляется конструктивной. Определим структурную сигнатуру матриц.

Определение: структурная сигнатура матрицы есть набор чисел, последовательно характеризующий места значимого элемента матрицы по отношению к значимым элементам другой матрицы, применяемой в качестве элемента с нулевой сигнатурой.

Проиллюстрируем определение на примере четверной группы Клейна, применяя единичную матрицу в качестве элемента с нулевой сигнатурой. Получим соответствия вида

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \updownarrow \\ \hline a_1\rightarrow(0,0,0,0)\\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \updownarrow \\ \hline a_2\rightarrow(1,-1,1,-1)\\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \updownarrow \\ \hline a_3\rightarrow(2,2,-2,-2)\\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \updownarrow \\ \hline a_4\rightarrow(3,1,-1,-3)\\ \hline\end{array}.$$

Положительное число указывает число «шагов» вправо, требуемых для трансляции элемента опорной матрицы на место элемента исследуемой матрицы. Отрицательное число указывает число шагов влево, требуемых для трансляции элемента опорной матрицы на место элемента исследуемой матрицы.

Сигнатуру можно рассматривать как совокупность координат точки в четырехмерном пространстве, отсчитываемых по отношению к «точке», принятой в качестве нулевой точки.

Заметим фундаментальное свойство структурной сигнатуры матриц, состоящее в том, что суммирование и вычитание сигнатур генерирует новую сигнатуру:

$$(1,-1,1,-1)+(2,2,-2,-2)=(3,1,-1,-3)\rightarrow a_2\overset{m}{\times}a_3=a_4,$$
$$(3,1,-1,-3)-(1,-1,1,-1)=(2,2,-2,-2)\rightarrow a_4\overset{m}{\times}a_2=a_3,\dots$$

Следовательно, операции со структурными сигнатурами матриц можно рассматривать как пример бинарных операций.

Обратные элементы для исследуемых матриц определим условием, что сумма сигнатур такой пары матриц есть нулевая сигнатура:

$$(1,-1,1,-1)\overset{st}{+}(-1,1,-1,1)=(0,0,0,0)\rightarrow a\overset{m}{\times}a^{-1}=E.$$

Следовательно, перемена знаков в элементах структурной сигнатуры есть генерация обратного элемента матрицы.

Понятно, что матрица с нулевой сигнатурой есть аналог единичной матрицы в теории групп. Эта аналогия не однозначна, и она не так проста, как может показаться вначале.

Поскольку операция суммирования ассоциативна, операция сложения сигнатур есть средство для конструирования новых групп. Для этого требуется применить операцию на некотором семействе матриц, достигая замкнутости семейства относительно действия сигнатурной операции.

Семейство матриц, замкнутое на сигнатурной операции, *может быть группой*.

Заметим, что структурная сигнатура задается системой чисел неоднозначно: возможно разное числовое представление одних и тех же матриц. По этой причине желательно «восстанавливать» явный вид матриц по разным её сигнатурам, достигая навыков обращения с ними.

Заметим, что в данном случае суммирование сигнатур есть аналог суммирования по модулю 4. Числу 4 соответствует число 0. Выход значимого элемента «за пределы» матрицы реализуется переходом от начала к концу строки и обратно при большом числе шагов влево.

Выберем в качестве опорной матрицы единичную матрицу. Рассмотрим действия на ней группы трансляций, формируя массив матриц *с элементами первого уровня*. Обозначим структурные сигнатуры этих матриц.

Получим *базовую систему* матриц:

$$
\begin{array}{c}(0,0,0,0)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow\end{array},
\begin{array}{c}(1,1,1,1)\\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow\end{array},
\begin{array}{c}(2,2,-2,-2)\\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow\end{array},
\begin{array}{c}(-1,-1,-1,-1)\\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array},
$$

$$
\begin{array}{c}(0,0,0,0)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\end{array},
\begin{array}{c}(1,-1,1,-1)\\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\end{array},
\begin{array}{c}(2,2,-2,-2)\\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\end{array},
\begin{array}{c}(-1,1,-1,1)\\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array},
$$

$$
\begin{array}{c}(0,0,0,0)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\end{array},
\begin{array}{c}(1,-1,-1,1)\\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\end{array},
\begin{array}{c}(2,2,-2,-2)\\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\end{array},
\begin{array}{c}(-1,1,1,-1)\\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array},
$$

$$
\begin{array}{c}(0,0,0,0)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{array},
\begin{array}{c}(1,1,-1,-1)\\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{array},
\begin{array}{c}(2,2,-2,-2)\\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{array},
\begin{array}{c}(-1,-1,1,1)\\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}.
$$

На основе группы трансляций, примененной в качестве системы операций, и единичной матрицы как начального элемента конструируемого многообразия, обеспечено объединение мономиальных и немономиальных матриц.

Оно соответствует физической интуиции конструирования изделий и отношений (взаимодействий) между ними. И изделия, и отношения формируются не на числовом расчете, а либо на перемещении значимых элементов, либо на основе изменения значений (отношений) элементов.

Элемент со структурной сигнатурой повторяется 4 раза, имеет структурную *кратность*, равную 4. Структурная кратность, вероятно, «указывает» на эмпирическую значимость объектов, которые содержат в сигнатурных элементах числа, равные двойке.

Продолжим конструирование системы матриц, применив на следующем этапе конструирования многообразия суммирование структурных сигнатур. Получим таблицу

$\overset{st}{+}$	1111	$1-11-1$	$11-1-1$	$1-1-11$
1111	2222	2020	2200	2002
$1-11-1$	2020	$2-22-2$	$200-2$	$2-200$
$11-1-1$	2200	$200-2$	$22-2-2$	$20-20$
$1-1-11$	2002	$2-200$	$20-20$	$2-2-22$

.

Она генерирует элементы второго уровня

$$\begin{array}{|c|}\hline (2-200) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (2002) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (2020) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}.$$

Выполним суммирование структурных сигнатур элементов первого и второго уровней. Они соответствуют таблице

$\overset{st}{+}$	$2-200$	2002	2020
1111	$3-111$	3113	3131
$1-11-1$	$3-31-1$	$3-111$	$3-13-1$
$11-1-1$	$3-1-1-1$	$31-11$	$311-1$
$1-1-11$	$3-3-11$	$3-1-13$	$3-111$
$2-200$	0000	$0-202$	$0-220$
2002	$0-202$	0000	0022
2020	$0-220$	0022	0000

.

Элементы, содержащие тройки, эквивалентны элементам с единицами. Например, получим

$$3-111 \Rightarrow -1-111, \ldots$$

Простой анализ показывает генерацию элементов третьего уровня. Они таковы

$(00-22)$	$(02-20)$	(0202)
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

Заметим, что эти же матрицы получаются в данном случае на основе матричного произведения базовых матриц. Другими словами, элементы второго и третьего уровней могут быть получены на основе разных операций.

Структурная сигнатура ассоциирована со знаковой группой и группой трансляций, реализуемой в форме последовательной смены мест значимого элемента матрицы:

$$\begin{pmatrix}+&+&+&+\\+&-&+&-\\+&+&-&-\\+&-&-&+\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}\rightarrow&\rightarrow&\rightarrow&\rightarrow\\\rightarrow&\leftarrow&\rightarrow&\leftarrow\\\rightarrow`&\rightarrow&\leftarrow&\leftarrow\\\rightarrow&\leftarrow&\leftarrow&\rightarrow\end{pmatrix}.$$

Данный пример иллюстрирует *дополнительность и конструктивность действия* на элементы анализируемого массива системы операций, согласованных между собой.

Один элемент в форме единичной матрицы на основе действия группы трансляций значимых элементов «породил» 9 новых элементов. Эта ситуация фундаментальна в модели конструирования массива матриц из одного элемента. Эта «снежинка» есть плюс физического моделирования, который можно представить рисунком:

				$(2,2,-2,-2)$				
			$(1,1,1,1)$		$(-1,-1,-1,-1)$			
		$(-1,-1,1,1)$				$(1,-1,1,-1)$		
$(2,2,-2,-2)$				$(0,0,0,0)$				$(2,2,-2,-2)$
		$(1,1,-1,-1)$				$(-1,1,-1,1)$		
			$(-1,1,1,-1)$		$(1,-1,-1,1)$			
				$(2,2,-2,-2)$				

.

Анализ, который легко выполнить, показал, что так сконструированный массив матриц замкнут по матричному произведению. Элементы второго и третьего уровней получаются на основе матричного произведения элементов «снежинки». В данном случае оно достаточно для конструирования системы, удовлетворяющей исходным посылкам конструирования.

Суммирование структурных сигнатур, указанное нами, есть дополнительный прием построения операционного замкнутых многообразий.

Полная в операционном смысле система матриц не образует группу по матричному произведению, так как содержит матрицы, не имеющие обратных матриц на этом произведении.

Операция суммирования структурных сигнатур придает рассматриваемому множеству свойства группы. Множество имеет единицу в форме матрицы с нулевой сигнатурой, суммирование с которой не меняет любую другую сигнатуру. Множество на этой операции ассоциативно, потому что ассоциативна операция суммирования по модулю.

Единственный пункт, который нужно обосновать, если множество замкнуто по операции суммирования структурных сигнатур, состоит в обосновании наличия обратных элементов. В данном случае это легко проверить прямым изменением знаков сигнатур.

Операционно замкнутая система матриц такова:

$$(0000)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{*},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}(2222),$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Зададим индекс мономиальности множества в форме отношения σ количества мономиальных матриц в системе $n(мн)$ к количеству немономиальных матриц $n(нмн)$. В рассматриваемом случае

$$\sigma=\frac{n(мн)}{n(нмн)}=1.$$

Подгруппу на операции суммирования структурных сигнатур образует совокупность матриц, состоящая из единичной матрицы и элементов третьего уровня:

$$(0,0,0,0)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(0,0,2,2)\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},(0,2,2,0)\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},(0,2,0,2)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Эта подгруппа не выходит за рамки принятой классификации простых групп. Она не принадлежит группе подстановок, она не имеет аналога с группами Ли, она не циклична, она не спорадична. Однако объединение единичной матрицы с одной из оставшихся трёх матриц задаёт нормальную подгруппу по операции структурного суммирования, она не является простой группой.

Рассматриваемая группа на структурной операции имеет систему нормальных подгрупп. Сложна система отношений в совокупности матриц. Представим отношения схемой, следующей из анализа суммирования структурных сигнатур. Получим модель, аналогичную модели точной последовательности, когда элементы «последовательно» согласованы друг с другом по операции или системе операций. Удобно записать данные *структурного суммирования* в форме последовательности блоков структурных сигнатур:

$$\alpha\rightarrow\begin{pmatrix}0022\\0220\\0202\\0000\end{pmatrix},\alpha^*\rightarrow\begin{pmatrix}2002\\2020\\2200\\0000\end{pmatrix},1\rightarrow\begin{pmatrix}1111\\1-1-11\\11-1-1\\1-11-1\end{pmatrix},2\rightarrow\begin{pmatrix}2222\\2-2-22\\22-2-2\\2-22-2\end{pmatrix},3\rightarrow\begin{pmatrix}3333\\3-3-33\\33-3-3\\3-33-3\end{pmatrix}.$$

Отношения между указанными массивами матриц имеют свой портрет. Укажем некоторые его черты. Только один блок α^* при взаимных произведениях генерирует блок α. Блок 1 генерирует блок α^* и блок 2. Блок 2 с блоком 1 генерирует блок 2, а с блоком α^* он генерирует блок α. Блок 3 генерирует блок 2, а вместе с блоком 1 он генерирует блок α.

Ситуацию можно трактовать так: группе анализируемых матриц на операции структурного суммирования соответствует иерархия «смежных» классов.

Проанализируем ситуацию с целью развития данного подхода и алгоритма. Мы применили систему операций к одному элементу в форме единичной матрицы. Этот подход позволил получить совокупность, состоящую из 16 матриц. Совокупность замкнута относительно действия матричной операции, равно как и относительно операции суммирования структурных сигнатур. Совокупность имеет индекс мономиальности, равный единице. Принимая точку зрения, что им соответствуют гравитационные и электрические предзаряды, мы получили совокупность матриц, которая «сохраняет себя» при действии матричной операции, а также при действии операции суммирования структурных сигнатур. С физической точки зрения это означает устойчивость физических систем, ассоциированных с ними, к паре взаимодействий. Есть ли другие операции, относительно которых система замкнута?

Естественно продолжить анализ других алгоритмов конструирования многообразий элементов. Возможно последовательное действие системы операций: другая операция применяется после выполнения первой операции для всего множества элементов или его части. Возможно параллельное действие системы операции: на одни и те же элементы действует пара или более операций с объединением результатов действий.

Мы применили смешанный алгоритм. Понятно, что иногда он может быть более удобен и прост.

Ранее нами рассматривалась другая возможность. Исходным пунктом конструирования многообразия элементов были 4 объекта: мономиальная и немономиальная матрицы и элементы, полученные из них деформацией на основе операции суммирования структурных сигнатур. Эта система была расширена действием группы трансляций в форме перестановки значимых элементов в исходных матрицах. Анализ показал, что такая система замкнута относительно матричного произведения, а также относительно комбинаторного произведения строк на строки.

Следовательно, есть *два принципиально разных алгоритма* конструирования новых многообразий: с одним исходным элементом и системой операций или с системой исходных элементов и одной операцией.

Структура конструируемого многообразия зависит от выбора начального элемента. Проиллюстрируем это замечание набором матриц, которые получаются по указанному выше алгоритму из матриц в форме левого идеала. Многообразие матриц имеет, например, вид

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Принципиальное его различие от предыдущей модели в том, что многообразие не содержит мономиальных матриц. Его индекс мономиальности равен нулю

$$\sigma = \frac{n(мн)}{n(нмн)} = 0.$$

В других случаях индекс мономиальности будет меняться в широком диапазоне значений. Он характеризует, прямо или косвенно, топологические свойства конструируемых многообразий. Они будут согласованы с метрическими свойствами многообразия матриц.

С физической точки зрения многообразие матриц есть аналог физического ансамбля. Поскольку есть 1820 исходных матриц с 4 значимыми элементами, таких ансамблей достаточно много. Их свойства следует изучить полностью, если мы желаем не только применять взаимодействия, но и управлять ими.

Физические аспекты конструирования групп на структурной операции

Группа на структурной операции объединяет матрицы разной структуры в единое многообразие. Естественно проанализировать механизмы такого объединения. Они могут и должны иметь физическое обоснование. Философский анализ предполагает возможность конструирования системы согласованных изделий на базе совокупности свободных объектов.

С математической точки зрения они представляются единичной матрицей. Она симметрична, что означает принятие гравитационного начала в качестве первопричины физической реальности. Тогда естественно ввести механизм «рождения» «из гравитации» первичных объектов, эволюция которых формирует замкнутую систему объектов.

Примем в качестве начального механизма формирования физических изделий образование группы на структурной операции, задающей *программу поведения* свободных объектов, вида

$$\begin{array}{cccc}
\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}. \\
(0000) & (2200) & (2002) & (0202)
\end{array}$$

Применим эту систему «объектов» в качестве базовых элементов однородной трансляции. Получим матрицы:

$$\begin{array}{ccccc}
A \to &
\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}, \\
& (0000) & (1111) & (2222) & (-1-1-1-1) \\
B \to &
\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}, \\
& (2002) & (-111-1) & (0220) & (1-1-11)
\end{array}$$

$$
C \to \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (2200)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (-1-111)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (0022)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (11-1-1)\\ \hline\end{array},
$$

$$
D \to \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (0202)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (1-11-1)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (2020)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (-11-11)\\ \hline\end{array}.
$$

Получен набор матриц, большинство которых не имеют обратных матриц по матричному произведению. Это обстоятельство можно трактовать как аргумент в пользу «устойчивости» таких объектов: отсутствуют другие объекты в данной системе, взаимодействие с которыми превращает изделия в систему свободных слагаемых. Такая устойчивость интересна и конструктивна с физической точки зрения, утверждая новое понимание концепции частиц и античастиц.

Данная система матриц замкнута по структурной операции. Следовательно, мы имеем группу. Система ассоциативна, она содержит единицу, у каждого элемента есть обратный элемент.

4 блока матриц, согласованных друг с другом, могут быть применены для моделирования и единого описания структуры и динамики Тел, Сознаний и пары Чувств, которые их взаимно соединяют.

Этих наборов много, они имеют разные свойства. По этой причине удача действий в указанном направлении обоснует наличие спектра Тел, Сознаний, Чувств.

Сравним, в частности, два набора, полученные по одному алгоритму. Система матриц

$$
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0000)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (2200)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (2002)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (0202)\\ \hline\end{array}.
$$

замкнута по матричному произведению и по структурному произведению. Система матриц

$$
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (0000)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (2200)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (2002)\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (0202)\\ \hline\end{array}
$$

замкнута по комбинаторному произведению (строка на строку) и структурному произведению.

Идеалы, с физической точки зрения, соответствуя электрическим предзарядам, формируют «электрическое начало» объектов физической реальности. Мы замечаем, что это начало базируется не на матричной, а на комбинаторной операции.

Этот пример косвенно подтверждает потребность системы операций для формирования базовых объектов реальности. Другими словами, система предзарядов может и должна быть дополнена системой операций. Только при наличии и применении такого «набора» можно реально конструировать изделия с разной структурой и разными свойствами.

Анализ применяемых на практике расчетных моделей показал, что фундаментальные физические модели в основном могут описываться на четверной группе перестановок Клейна. Эта группа расширена до уровня фундаментальной группы на основе знаковой группы в том смысле, что её алгебра генерирует матричную алгебру. Поскольку каждый элемент матричной алгебры выражается через элементы алгебры фундаментальной группы, мы фактически представляем расчетные модели в форме слов, составленных из букв.

Эти слова становятся содержательными, если они дополнены системой величин и системой дифференциальных операторов. Однако «позвоночник» модели формирует алгебра фундаментальной группы.

Отметим наличие системы механизмов формирования групп на структурной операции. Из одной матрицы может быть получена система, состоящая из 4 матриц, если применить *программу изменений* начального элемента в форме системы трансляций, ассоциированных со знаковой группой. Получим, например, матрицы

$$T(1111)\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$T(1-11-1)\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$T(1-1-11)\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$T(11-1-1)\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Все указанные «квартеты» матриц есть группы по структурному произведению. Ни у матричного произведения, ни у комбинаторного произведения нет таких свойств.

Поэтому естественно предположить, что структурное произведение относится к категории первичных произведений. Ему аналогична группа трансляций и знаковая группа.

Естественно расширение каждого квартета на основе придания значимым элементам знаков в соответствии с системой знаков. Тогда можно выразить элементы матричной алгебры на основе элементов группы на сигнатурной операции. Таких систем много, они обладают разными свойствами.

Поскольку групп на матричной операции значительно меньше, чем групп на структурной операции, естественно предположить, что именно структурные группы являются первоначалом любых расчетных моделей.

Данный квартет матриц можно применять для моделирования единой системы Тел, Сознаний и Чувств, ассоциированных с исходным элементом, который играет роль их первоисточника. Есть удивительное богатство вариантов и возможностей.

Среди 1820 матриц, содержащих 4 значимых элемента, более всего тех элементов, которые не являются ни мономиальными матрицами, ни идеалами. По физической идеологии эти объекты есть предпредзаряды. С другой стороны, предзаряды, следуя физической аргументации, образуются из ориентированных струн. В данном подходе препредзаряды выполняют функции ориентированных струн.

Следовательно, расчетные модели, базирующиеся на матрицах, ассоциированных с предпредзарядами, могут быть полезны для понимания структуры и функций системы ориентированных струн.

Операционная анизотропия многообразия матриц

Мы исследовали ранее набор матриц группы перестановок из 4 элементов. Он образован из матриц нормальной подгруппы Клейна A и смежного класса, обозначенного буквой B, а также из их деформации одного типа, обозначенных A^*, B^*. К набору применялась трансляция одного типа.

В итоге получен набор матриц, который операционно замкнут относительно матричного произведения, а также относительно комбинаторного произведения строк на строки. Назовем такой набор матриц продольной базой исходного многообразия: в конструировании нового многообразия применяются матрицы из нормальной подгруппы и одного смежного класса. Будем считать, что новые многообразия характеризуют продольные свойства исходного многообразия (по одному смежному классу).

Известно, что есть группа матриц в группе перестановок из 4 элементов, которая задается совокупностью элементов, по одному взятых из каждого смежного класса. Такой набор матриц назовем поперечной базой исходного многообразия. Естественно изучить структуру его расширения. Новое многообразие будет характеризовать поперечные свойства исходного многообразия (по совокупности элементов из разных смежных классов).

Если рассматриваемые свойства одинаковы, будем говорить, что исходное многообразие операционно изотропно. Если «продольные» и «поперечные» свойства различны, будем говорить, что многообразие анизотропно.

С физической точки зрения замкнутое многообразие матриц соответствует некоторому реальному изделию: такова его математическая форма в одном из вариантов возможного описания.

Разные операции характеризуют изменения этого изделия под некоторым внутренним или внешним воздействием. Речь может идти не только об изменении структуры изделия, но и об изменении его свойств.

Тогда различие «продольных» и «поперечных» свойств многообразия есть косвенное исследование продольных и поперечных свойств физического изделия.

Дополним анализ «продольных» свойств группы перестановок из 4 элементов примером расширения группы, характеризующей «поперечные» свойства группы перестановок.

Структура исходной группы такова:

$$
\begin{array}{c}(0000)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(0202)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(01-10)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(001-1)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(02-1-1)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}.
$$

Применим к ее элементам операцию суммирования структурных сигнатур. Получим таблицу

$\overset{st}{+}$	0202	01−10	001−1	011−2	02−1−1
0202	0000	03−12	0211	0310	00−11
01−10		02−20	010−1	020−2	03−2−1
001−1			002−2	012−3	020−2
011−2				0220	030−3
02−1−1					00−2−2

.

Она генерирует 10 новых матриц:

$$
\begin{array}{c}(03-12)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(0211)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(0310)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(00-11)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(010-1)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array},
$$

$$
\begin{array}{c}(02-20)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(03-2-1)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(00-2-2)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(012-3)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array},
\begin{array}{c}(030-3)\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}.
$$

Получены 16 матриц. Они замкнуты относительно суммирования структурных сигнатур. Для доказательства требуется проанализировать все суммы. Покажем часть из них.

Получим, например, соответствия

$\overset{st}{+}$	03−12	0211	0310	00−11	010−1
0202	01−10	0013	0112	02−13	0301
01−10	00−22	0301	0000	01−21	02−1−1
001−1	0301	0220	032−1	0000	011−2
011−2	0000	032−1	002−2	010−1	021−3
02−1−1	01−21	0000	010−1	02−20	03−1−2

,

$\overset{st}{+}$	03−12	0211	0310	00−11	010−1
03−12	02−20	0103	0202	03−23	00−11
0211		0000	0121	0202	0310
03−11			0220	0301	001−1
00−11				00−22	01−10
011−1					020−2

,...

Прямая проверка подтверждает предположение, что новое многообразие замкнуто относительно операции суммирования структурных сигнатур.

Однако оно не замкнуто относительно матричной операции. Так, например, получим

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ldots$$

Следовательно, новое многообразие можно расширить на основе матричной операции.

Алгоритмы генерации новых многообразий из базовой группы

Наличие семейства различных операций инициирует исследование их соотношения друг с другом, сравнение их свойств. Анализ удобно проводить, применяя матричную, комбинаторную, логическую и сигнатурную операции.

Сделаем это на примере четверной группы Клейна. Она представлена матрицами

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\delta=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Таблица её матричных произведений дублирует структуру базовых матриц:

$\overset{m}{\times}$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	γ	β	α

$$\Rightarrow\alpha\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Матричное произведение в этом случае есть частный вариант логического произведения, в котором перемножаемые матрицы тождественны матрицам произведений:

$\overset{l}{\times}$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

.

Структурные сигнатуры матриц четверной группы Клейна имеют представление:

$$\alpha \to (0000), \beta \to (1-11-1), \gamma = (22-2-2), \delta = (-11-11).$$

Таблица произведений структурных сигнатур отличается от аналогичной таблицы для матричных произведений:

$\overset{m}{\times}$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	γ	δ	α
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	α	β	γ

.

Мы получили сигнатурную группу на той же системе матриц, на которой основана матричная группа. Поскольку таблицы произведений различны, эти *две группы неизоморфны*.

Подчиним элементы четверной группы Клейна комбинаторной операции в форме произведения строк на строки. Обозначим матрицы буквой A. Получим последовательными произведениями справа новые матрицы:

$$A^2 = A \overset{k}{\times} A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \overset{k}{\times} A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 \overset{k}{\times} A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица комбинаторных произведений классов элементов такова:

$\overset{k}{\times}$	A	A^2	A^3	A^4
A	A^2	A	A^4	A^3
A^2	A^3	A^2	A	A^4
A^3	A^4	A^3	A^2	A
A^4	A	A^4	A^3	A^2

$$= A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + A^3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + A^4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемое многообразие неассоциативно. Оно не имеет обратных единиц. Аналогичное семейство матриц исследовано ранее на основе другого алгоритма. Рассматривались 4 матрицы, к которым *циклически применен* один элемент группы трансляций. Получено семейство, состоящее из 16 матриц. Они тождественны матрицам, указанным выше. Более того, доказано, что эта система матриц инвариантна также относительно матричных произведений.

Заметим, что таблица произведения классов этих элементов генерирует матрицы, подчиненные логической операции. В рассматриваемом случае это семейство классов неассоциативно.

Базовые элементы логической операции в форме указанных матриц образуют группу по матричному произведению. Другими словами, данное неассоциативное многообразие генерирует *матричную группу, ассоциированную с действием логической группы на классах элементов.*

Ассоциированная группа в равной мере содержит элементы, принадлежащие группе Клейна и её смежному классу, обозначенному буквой Группа имеет нормальную подгруппу, состоящую из пары элементов, принадлежащих группе Клейна.

Рассмотрим произведения структурных сигнатур для этой системы матриц. Примем в качестве базовой матрицы единичную матрицу. Имеет место представление

$a=(0000)$	$b=(1111)$	$c=(22-2-2)$	$d=(-1-1-1-1)$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Таблица сигнатурных произведений такова:

$\overset{st}{\times}$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Она совпадает с таблицей сигнатурных произведений группы Клейна: пара рассматриваемых групп изоморфна друг другу.

Следовательно, разные множества матриц на сигнатурной операции могут быть изоморфны. Это обстоятельство «приближает» модель групп на сигнатурной операции к моделям групп на матричной операции.

Рассмотрим комбинаторное произведение матриц, ассоциированных с таблицей произведения классов элементов. Получим систему идеалов:

$$aa \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ab \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, ac \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, ad \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С физической точки зрения мы получили подтверждение идеи, что «игра» классов элементов генерирует объекты (в данном случае это ассоциированные матрицы), взаимные произведения которых проявляют себя в форме электрических предзарядов.

С позиции теоретической психологии это означает, что взаимодействия классов элементов (социумы) могут иметь аналогию с взаимодействиями электрических зарядов и предзарядов.

Рассмотрим логическое произведение для анализируемых матриц. Оно ассоциативно, потому что транспонированная матрица совпадает с исходной матрицей. Таблица произведений такова:

$\overset{l}{\times}$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

.

Структурная геометрия с возможностью управления расстояниями между объектами

Фундаментальным фактом всей практики физиков следует считать взаимосвязь взаимодействия объектов с их структурой. От того, как устроены объекты, и какая их внутренняя и взаимная активность, зависит многое в равновесиях, в динамике, в эволюции анализируемых систем.

В математике почти отсутствуют приемы и алгоритмы конструктивного описания указанной взаимосвязи. Поскольку структура объектов может быть задана системой матриц, желательно найти алгоритмы их геометрического описания. На начальном этапе следует корректно определить расстояния между объектами, представленными матрицами. Этот шаг позволит отобразить систему матриц в форме геометрического объекта. Затем нужно изучать изменения этой геометрической фигуры (симплекса), её зависимость от внутренних и внешних условий и обстоятельств. Далее на этой основе требуется классификация систем объектов, а также их взаимодействий друг с другом.

Рассмотрим реализацию указанных идей на примере четверной группы Клейна. Заметим, что спектр структурной сигнатуры в данном случае не зависит от выбора опорного объекта. Проиллюстрирует это обстоятельство.

Получим распределение структурных сигнатур:

$$\begin{array}{|c|}\hline (0000) \\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (1-11-1) \\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (22-2-2) \\ \hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (-11-11) \\ \hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (0000) \\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (1-11-1) \\ \hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (22-2-2) \\ \hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (-11-11) \\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (0000) \\ \hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (1-11-1) \\ \hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (22-2-2) \\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (-11-11) \\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (0000) \\ \hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (1-11-1) \\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (22-2-2) \\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (-11-11) \\ \hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}.$$

Спектр его слагаемых один и тот же, хотя опорные матрицы разные. Однако структурные сигнатуры в каждом случае распределены по-разному. Можно принять точку зрения, что есть определенная система отношений в системе матриц, которая меняется при изменении управления: придания одной из матриц статуса матрицы с нулевой структурной сигнатурой.

В рассматриваемом случае система сигнатур представлена матрицами в форме идеалов.

Примем за основу анализа модель представления матриц системой чисел, названной структурной сигнатурой. В этом представлении каждой матрице ставится в соответствие набор «координат», с которым ассоциируется некоторое пространство. Оно может быть разным в зависимости от состава и структуры *дополнительных условий*.

Модель системы матриц (объектов) в ассоциированном с ними пространстве есть предмет исследования новой математической дисциплины, которую назовем *структурной геометрией*.

По аналогии с разностью координат (и по той же математической схеме) зададим разность структурных сигнатур для определения расстояния между матрицами:

$$\theta_{ij} = \sigma_j - \sigma_i.$$

Назовем эти разности относительными индексами структурных сигнатур. Определим расстояние согласно модели евклидовой геометрии. Получим для квадрата расстояния между объектами, представленными матрицами, выражение

$$l_i^2 = \sum_j \theta_{ij}^2.$$

Анализ изменений в модели структурной геометрии естественно согласовывать с изменением объектов и их внутренних и внешних отношений. В частности, так можно учесть деформацию структур и активностей.

Представим систему сигнатур таблицей, ассоциированной с мономиальными матрицами. Введем обозначения матриц:

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, 3 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 4 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица структурных сигнатур и ассоциированных квадратов расстояний между матрицами имеет вид:

θ_{ij}	1	2	3	4
1	0000	$1-11-1$	$22-2-2$	$-11-11$
2	$-11-11$	0000	$1-11-1$	$22-2-2$
3	$22-2-2$	$-11-11$	0000	$1-11-1$
4	$1-11-1$	$22-2-2$	$-11-11$	0000

$\Leftrightarrow$

l_i^2	1	2	3	4
1	0	4	16	4
2	4	0	4	16
3	16	4	0	4
4	4	16	4	0

.

Из таблицы следует вывод, что «объекты» 1 и 3 *взаимно и одинаково* «отталкивают» друг друга при передаче им управления в системе. Аналогичные отношения имеет пара объектов 2 и 4. Однако при других управлениях «враждующие» объекты «дружны» между собой. Общая сумма расстояний одинакова, она не зависит от выбора управляющего объекта.

Мы получили на основе представления матриц структурными сигнатурами математические средства для геометрического описания систем с управлением. Структурная геометрия, в силу отмеченного факта, относится к *категории геометрий управления*.

Она может быть согласована с дискретной геометрией, в которой координатами являются целые числа. Расстояния есть корень квадратный из квадрата расстояния. Получим спектр чисел

$$-4, -2, 0, 2, 4.$$

Эти числа образуют группу при их суммировании по модулю 4. Группу можно задать системой идеалов:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&-4&0&0\\0&-4&0&0\\0&-4&0&0\\0&-4&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&-4\\0&0&0&-4\\0&0&0&-4\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&0&0\\0&-2&0&0\\0&-2&0&0\\0&-2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&-2\\0&0&0&-2\\0&0&0&-2\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&4&0&4\\0&4&0&4\\0&4&0&4\\0&4&0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&4&0&2\\0&4&0&2\\0&4&0&2\\0&4&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&0&4\\0&2&0&4\\0&2&0&4\\0&2&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0&2\\0&2&0&2\\0&2&0&2\\0&2&0&2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&4&0&0\\0&4&0&0\\0&4&0&0\\0&4&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&4\\0&0&0&4\\0&0&0&4\\0&0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0&0\\0&2&0&0\\0&2&0&0\\0&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&2\\0&0&0&2\\0&0&0&2\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Четверная группа Клейна на основе модели структурной геометрии генерирует группу чисел при суммировании по модулю 4. С ней ассоциирована группа матриц в форме идеалов с числом элементов, равным 9.

Отрицательные расстояния в данном случае позволяют рассматривать геометрию с положительной и отрицательной ориентацией. Другими словами, объекты могут быть расположены относительно заданного (управляющего) объекта с одной или с другой стороны, могут находиться «слева» и «справа». Это обстоятельство можно трактовать также как характеристику положительного или отрицательного отношения одного объекта к другому. По этой причине имеет место *6 фазовых состояний* в системе отношений. Их удобно представить в форме зеркальных «шестерок» рис. 1:

	−	−				+
−		−			+	
−	−			+		
−				+	+	
	−			+		+
		−			+	+
3	2	1	0	1	2	3

Рис. 1. Фазовые состояния в структурной геометрии

Другие геометрические свойства имеет подгруппа на операции суммирования структурных сигнатур, которая состоит из следующих матриц:

$$(0,0,0,0)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(0,0,2,2)\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},(0,2,2,0)\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},(0,2,0,2)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Для нее все расстояния от любого управляющего объекта до других объектов одинаковы. Они расположены на сфере одного радиуса с иррациональным значением

$$R=2\sqrt{2}.$$

С физической точки зрения мы рассматриваем систему, в которой присутствуют два скомпенсированных начала: пара гравитационных предзарядов и пара электрических предзарядов. Их следует трактовать как объекты, дополнительные друг другу.

Это удобно сделать на основе геометрического алгоритма. Расположим каждую пару предзарядов по «своим» осям Ox и Oy системы координат на евклидовой плоскости. Сопоставим каждому из них геометрический образ в форме отрезка единичной длины. Тогда получим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого будет равна указанному значению расстояния в структурной геометрии.

В приложении к психологии мы можем говорить об описании гармонии двух семейных пар, демократично управляющих структурами и ситуациями.

Проанализируем расстояния в рамках структурной геометрии для 4 электрических предзарядов (мужских начал). Исходным объектом является система матриц

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Пусть опорной матрицей будет первая матрица. Тогда относительно ее соответственно получим следующие структурные сигнатуры:

$$(0000),(1111),(2222),(3333).$$

Спектр расстояний имеет вид

$$-6,-4,-2,0,2,4,6.$$

Каждый объект занимает место на своей гиперсфере. Это распределение не зависит от того, какой объект управляет ситуацией.

Геометрия с управлением для объектов, имеющих структуру

Динамическая модель геометрии в зрелом виде стала предметом и целью исследования с момента построения теории гравитации Эйнштейна. Впервые геометрические характеристики риманова многообразия были согласованы с параметрами физических объектов в форме тензора энергии-импульса.

Идея *взаимного динамического управления* в системе объектов генерирует задачу построения расчетных моделей, которые содержат не только данные о структуре и свойствах объектов, но и характеристики их взаимного динамического управления.

Рассмотрим алгоритм, следуя которому можно моделировать задачи такого типа. Конструктивно применим информацию о наличии и свойствах управления в конечных системах, базирующихся на операции структурного суммирования. Согласно этой операции выполняется представление матрицы с единичными элементами (*пассивной решетки*) в форме совокупности элементов, сумма которых равна исходной матрице. Так, например, получим модель управления, ассоциированную с пассивными элементами группы Клейна:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сигнатурное представление элементов группы Клейна позволило ввести расстояние между этими матрицами, а также сконструировать спектральный состав геометрической картины их отношений друг с другом. Анализ показал также их взаимные «симпатии» и «антипатии», которые зависят от того, какая матрица принимается в качестве управляющей (опорной) матрицы. При выборе другого распределения элементов пассивной решетки расстояния между матрицами и спектр их отношений меняются.

Ситуация усложняется и становится более интересной при рассмотрении активной решетки, в которой каждый элемент динамичен, задавая матрицу активного управления. В этом случае, следуя предыдущему рассмотрению, получим активные матрицы Клейна:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_3 + \tilde{\pi}_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Активные матрицы Клейна можно рассматривать в качестве самостоятельных элементов модели управления. В этом случае каждая такая матрица может иметь свою систему «носителей» информации, а также алгоритм конструирования отдельного элемента управления. Итоговая матрица активного управления может иметь сложную структуру. Она зависит также от алгоритма объединения базовых элементов управления в единую систему.

Естественно дополнить начальный анализ идеей применения системы динамических законов для элементов управления.

В известной мере эта задача самостоятельна и имеет свою специфику.

Исследуем возможности конструирования взаимодействия пары объектов, представленных матрицами, предполагая, что каждый объект располагает своим законом управления. Исходной точкой анализа становится система из 4 элементов: одна пара элементов задаёт характеристики объектов, другая пара элементов $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ задаёт характеристики взаимного управления. Конечно, более корректно рассматривать эту задачу с учетом воздействия на себя в процессе управления. Это воздействие может менять как структуру объекта, так и элементы его управления.

Например, рассмотрим представление свободной (без взаимодействия) физической системы матрицами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \alpha \Leftrightarrow \beta \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}, \alpha \to \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \beta \to \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \varphi_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{pmatrix}.$$

Примем *основную гипотезу*: взаимодействие пары объектов можно представить суммой свободных элементов с весовыми множителями, ассоциированными с алгоритмом управления. Назовём получаемые выражения *суммами с управлением*.

По-прежнему, будем применять алгоритм управления в соответствии с базовыми элементами управления, имеющими структуру группы Клейна. Получим выражения для описания взаимного воздействия объектов друг на друга с алгоритмом управления от первого объекта:

$$\Xi_{ij}^{\alpha}(1,2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_{11}(a_{11}+b_{11}) & \alpha_{12}(a_{12}+b_{12}) & \alpha_{13}(a_{13}+b_{13}) & \alpha_{14}(a_{14}+b_{14}) \\ \alpha_{21}(a_{21}+b_{21}) & \alpha_{22}(a_{22}+b_{22}) & \alpha_{23}(a_{23}+b_{23}) & \alpha_{24}(a_{24}+b_{24}) \\ \alpha_{31}(a_{31}+b_{31}) & \alpha_{32}(a_{32}+b_{32}) & \alpha_{33}(a_{33}+b_{33}) & \alpha_{34}(a_{34}+b_{34}) \\ \alpha_{41}(a_{41}+b_{41}) & \alpha_{42}(a_{42}+b_{42}) & \alpha_{43}(a_{43}+b_{43}) & \alpha_{44}(a_{44}+b_{44}) \end{pmatrix},$$

$$\Xi_{ij}^{\beta}(2,1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_{11}(a_{11}+b_{11}) & \beta_{12}(a_{12}+b_{12}) & \beta_{13}(a_{13}+b_{13}) & \beta_{14}(a_{14}+b_{14}) \\ \beta_{21}(a_{21}+b_{21}) & \beta_{22}(a_{22}+b_{22}) & \beta_{23}(a_{23}+b_{23}) & \beta_{24}(a_{24}+b_{24}) \\ \beta_{31}(a_{31}+b_{31}) & \beta_{32}(a_{32}+b_{32}) & \beta_{33}(a_{33}+b_{33}) & \beta_{34}(a_{34}+b_{34}) \\ \beta_{41}(a_{41}+b_{41}) & \beta_{42}(a_{42}+b_{42}) & \beta_{43}(a_{43}+b_{43}) & \alpha_{44}(a_{44}+b_{44}) \end{pmatrix}.$$

Воздействие на себя со «своим» алгоритмом управления даёт пару выражений:

$$\Xi_{ij}^{\alpha}(1,1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_{11}(a_{11}+a_{11}) & \alpha_{12}(a_{12}+a_{12}) & \alpha_{13}(a_{13}+a_{13}) & \alpha_{14}(a_{14}+a_{14}) \\ \alpha_{21}(a_{21}+a_{21}) & \alpha_{22}(a_{22}+a_{22}) & \alpha_{23}(a_{23}+a_{23}) & \alpha_{24}(a_{24}+a_{24}) \\ \alpha_{31}(a_{31}+a_{31}) & \alpha_{32}(a_{32}+a_{32}) & \alpha_{33}(a_{33}+a_{33}) & \alpha_{34}(a_{34}+a_{34}) \\ \alpha_{41}(a_{41}+a_{41}) & \alpha_{42}(a_{42}+a_{42}) & \alpha_{43}(a_{43}+a_{43}) & \alpha_{44}(a_{44}+a_{44}) \end{pmatrix},$$

$$\Xi_{ij}^{\beta}(2,2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_{11}(b_{11}+b_{11}) & \beta_{12}(b_{12}+b_{12}) & \beta_{13}(b_{13}+b_{13}) & \beta_{14}(b_{14}+b_{14}) \\ \beta_{21}(b_{21}+b_{21}) & \beta_{22}(b_{22}+b_{22}) & \beta_{23}(b_{23}+b_{23}) & \beta_{24}(b_{24}+b_{24}) \\ \beta_{31}(b_{31}+b_{31}) & \beta_{32}(b_{32}+b_{32}) & \beta_{33}(b_{33}+b_{33}) & \beta_{34}(b_{34}+b_{34}) \\ \beta_{41}(b_{41}+b_{41}) & \beta_{42}(b_{42}+b_{42}) & \beta_{43}(b_{43}+b_{43}) & \alpha_{44}(b_{44}+b_{44}) \end{pmatrix}.$$

Воздействие на себя с «чужим» алгоритмом управления даёт новую пару выражений:

$$\Xi_{ij}^{\beta}(1,1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_{11}(b_{11}+b_{11}) & \alpha_{12}(b_{12}+b_{12}) & \alpha_{13}(b_{13}+b_{13}) & \alpha_{14}(b_{14}+b_{14})\\ \alpha_{21}(b_{21}+b_{21}) & \alpha_{22}(b_{22}+b_{22}) & \alpha_{23}(b_{23}+b_{23}) & \alpha_{24}(b_{24}+b_{24})\\ \alpha_{31}(b_{31}+b_{31}) & \alpha_{32}(b_{32}+b_{32}) & \alpha_{33}(b_{33}+b_{33}) & \alpha_{34}(b_{34}+b_{34})\\ \alpha_{41}(b_{41}+b_{41}) & \alpha_{42}(b_{42}+b_{42}) & \alpha_{43}(b_{43}+b_{43}) & \alpha_{44}(b_{44}+b_{44})\end{pmatrix},$$

$$\Xi_{ij}^{\beta}(2,2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\beta_{11}(a_{11}+a_{11}) & \beta_{12}(a_{12}+a_{12}) & \beta_{13}(a_{13}+a_{13}) & \beta_{14}(a_{14}+a_{14})\\ \beta_{21}(a_{21}+a_{21}) & \beta_{22}(a_{22}+a_{22}) & \beta_{23}(a_{23}+a_{23}) & \beta_{24}(a_{24}+a_{24})\\ \beta_{31}(a_{31}+a_{31}) & \beta_{32}(a_{32}+a_{32}) & \beta_{33}(a_{33}+a_{33}) & \beta_{34}(a_{34}+a_{34})\\ \beta_{41}(a_{41}+a_{41}) & \beta_{42}(a_{42}+a_{42}) & \beta_{43}(a_{43}+a_{43}) & \alpha_{44}(a_{44}+a_{44})\end{pmatrix}.$$

При таком подходе пассивное управление есть нормированное суммирования матриц. Нормировочный множитель, введенный в рассмотрение, позволяет математически выразить тот физический факт, что пассивное управление не меняет управляемый объект. С математической точки зрения мы замечаем две грани ситуации. С одной стороны, определитель матрицы, посредством которой задается пассивное управление, равен нулю. Поэтому *меру управления* можно задавать величиной определителя матрицы управления:

$$\Sigma(\alpha)=\det\left|\alpha_{ij}\right|,\Sigma(\beta)=\det\left|\beta_{ij}\right|.$$

С другой стороны, матрицы управления образуют группу при их умножении по Даламберу: каждый элемент одной матрицы умножается на элемент этого же места из другой матрицы. Мы имеет дело с *информационной группой управления*.

При других произведениях естественны объекты с другими свойствами. Этот вариант соответствует некоторой одной или другой модели «пересечения» информационных потоков.

В исходной постановке задачи заложен не только механизм наличия и согласования динамики объектов и информации, но и *механизм деформирования* объектов и информации.

Для построения геометрии взаимодействующих объектов, управляющих друг другом, примем дополнительную *гипотезу*: геометрия взаимодействующих объектов с управлением базируется на метрическом тензоре g_{ij}, ассоциированном с выражением для суммы с управлением Ξ_{ij}.

В простейшем случае

$$g_{ij}=const\cdot\Xi_{ij}.$$

Тогда появляется возможность анализа взаимодействий с управлением в модели римановой геометрии. В ней исходным элементом является квадрат расстояния

$$ds^2=g_{ij}\left(x^k\right)dx^i dx^j.$$

Если сумма с управлением зависит от внутренних координат, они будут учитываться в обобщениях римановой геометрии.

Теперь стандартными математическими средствами можно анализировать тензоры кривизны и кручения, ассоциированные с выражениями для сумм с управлением.

Предложенный *алгоритм применим для любого количества объектов*, у которых есть структура, заданная величинами, объектов, владеющих пассивным или активным управлением.

Связи нелинейных алгебраических уравнений и групп на сингулярной операции

Рассмотрим несколько примеров. Система нелинейных уравнений

$$
\begin{aligned}
&ab = c^2 + c,\\
&a^2 = a + bc,\\
&ac = b^2 + b
\end{aligned}
$$

имеет решение

$$(000),(100),(0-10),(00-1).$$

По алгоритму структурной сигнатуры ему можно сопоставить наборы матриц, которые можно рассматривать в качестве решений данной системы нелинейных алгебраических уравнений. В частности, получим

$$
\begin{array}{|c|}\hline (000)\\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline (100)\\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline (0-10)\\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline (00-1)\\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
$$

$$
\begin{array}{|c|}\hline (000)\\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline (100)\\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline (0-10)\\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline (00-1)\\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
$$

$$
\begin{array}{|c|}\hline (000)\\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline (100)\\ \hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline (0-10)\\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline (00-1)\\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}\ldots
$$

Наборы имеют разные свойства по другим произведениям. В частности, они отличаются свойствами при матричном произведении.

Рассмотрим тройку матриц из последнего набора:

$$
a=\begin{array}{|c|}\hline (000)\\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
b=\begin{array}{|c|}\hline (100)\\ \hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},
c=\begin{array}{|c|}\hline (00-1)\\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}.
$$

На матричном произведении они имеют такие свойства:

$$a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c,$$

$$ab = a, ba = b,$$
$$bc = cb = ac = ca = c.$$

Этот набор матриц есть полугруппа по матричному произведению. Поэтому полугруппы можно трактовать как решения систем нелинейных уравнений.

Решим обратную задачу: получим систему нелинейных алгебраических уравнений на основе анализа произведений элементов некоторого множества. Выберем, например, тройку элементов из первого набора:

$$a = \boxed{\begin{array}{c} (000) \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}, b = \boxed{\begin{array}{c} (100) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}, c = \boxed{\begin{array}{c} (0-10) \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}.$$

Получим *полугруппу* с единицей. Произведения элементов таковы:

$$a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c,$$
$$ab = ba = b, ac = ca = c,$$
$$bc = c, cb = b.$$

Мы можем рассматривать это множество в качестве решения системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c,$$
$$ab \cdot ba + ac \cdot ca - b^2 - c^2 = 0,$$
$$cb \cdot bc - c = 0.$$

При другом объединении правил произведения получим другие системы нелинейных алгебраических уравнений. Одно решение получается из разных систем уравнений.

Объединим матрицы, по-другому распределив элементы в форме матриц мономиального типа. Рассмотрим, например, выражение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to 2\alpha + \beta.$$

С физической точки зрения мы выполнили несколько действий. На первом этапе произошло объединение трех матриц в одну. Этот шаг можно трактовать как взаимодействие, которое «склеило» объекты. На втором этапе произошло разделение этой системы с образованием пары свободных объектов и одного объекта мономиального типа. Причины и алгоритм такого механизма не раскрывается. Ясно только одно, что объекты «электрического типа» преобразовались в объекты «гравитационного типа». Изменения произошли за счет внутренних или внешних причин, обеспечивающих этот механизм. Естественно, что изменились законы, которым подчинена «пара» новых матриц. Они просты по сравнению с законами для исходных матриц.

Получим соотношения:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \alpha, \alpha\beta = \beta\alpha = \beta.$$

Мы имеем *группу*, в которой элементы обратны себе (порождающие есть инволюции).

В этом варианте выполняется квадратичный закон «цветной косы»

$$(\alpha\beta\alpha)^2 = (\beta\alpha\beta)^2 .$$

Объекты как-бы «сплетены» друг с другом. Ситуация меняется при взаимном влиянии объектов друг на друга. Например, при взаимодействии пары объектов может получиться новая пара:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Посредством новых выражений отображено сближение значимых элементов в первой строке для пары разных объектов. Это обстоятельство можно интерпретировать как «взаимную симпатию», которая приблизила друг к другу значимые элементы первой строки. При таком подходе и попытках такой интерпретации группе присуще сохранение внутренних свойств объектов. Полугруппа, наоборот, учитывает изменения, обусловленные взаимным влиянием. Обратим внимание на свойства объектов, подчиненных логическим операциям. Мы приняли ранее такой их набор:

A	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

,

E	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	1	2
3	4	3	2	1
4	2	1	4	3

,

F	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	3	2	1
3	2	1	4	3
4	3	4	1	2

,

B	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	3	2	1
3	3	4	1	2
4	2	1	4	3

,

C	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	1	2
3	2	1	4	3
4	4	3	2	1

,

D	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	4	3	2	1
4	3	4	1	2

.

Он реализован по структуре матриц нормальной подгруппы и смежных классов в группе перестановок из 4 элементов.

Анализ показал выполнение частных законов (не на всех элементах и не на всех логических операциях) вида

$$aab = baa,$$
$$aab = bba, baa = abb,$$
$$(aab)(baa) = (bba)(abb),$$
$$(aab)(bba) = (baa)(abb).$$

Следовательно, законы, которым подчинены объекты, зависят от того, какой логической операции они подчинены. Заметим, что логическая операция есть *операция выбора* в соответствии с внешними критериями объекта (например, его номером, хотя могут быть и другие параметры). У таких операций «свои» законы, характеризующие подчинение системы объектов системе правил, которые не являются их внутренними правилами.

Конструирование динамических уравнений по структуре групп

Проанализируем возможности конструирования динамических уравнений и их следствий, применяя для этого алгоритм, базирующийся на структуре групп.

Рассмотрим модель суммирования

$$1+1=0, 0+0=0,$$
$$1+0=1, 0+1=1.$$

Так можно задать аналог колебательного процесса некоторого объекта от начальной точки к удаленной точке. Началу соответствует ноль, удаленной точке соответствует единица. Сложение единиц есть возвращение к исходной точке. Так можно трактовать условие равновесия рычага с равными «плечами». Если дополнительный вес нулевой, то рычаг находится в равновесии. Он в равновесии также, если на обоих «плечах» расположен одинаковый груз. В остальных случаях есть неравновесное состояние, обозначенное числом единица.

В этом варианте есть совокупность матриц, которая образует группу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У нее есть система подгрупп, образованных нулевой матрицей и любой из остальных матриц.

Возможен алгоритм сопоставления каждой такой подгруппе динамических уравнений, применяемых при решении физических задач. Применим алгоритм согласования величины и дифференциальных операторов с матрицами на основе конструирования сумм, полученных при взаимном произведении элементов. Проиллюстрируем алгоритм на примерах.

Рассмотрим модель

$\hat{*}$	$\frac{dx}{dt}$	f
$\frac{d}{dt}$	1	0
$a = m^{-1}$	0	1

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) + m^{-1} f = 0.$$

Получен аналог основного закона динамики для материальной точки. На этой же матрице рассмотрим другую возможность:

$\hat{*}$	$\frac{d\xi}{dt} = \omega \frac{dx}{dt}$	$\frac{dy}{dt}$
$\xi = \omega x$	1	0
y	0	1

$$\rightarrow y\frac{dy}{dt} + \omega^2 x \frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow \left(y = \frac{dx}{dt} \right) \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

Получен аналог закона колебаний для материальной точки. Следовательно, группы можно применять в качестве «инструмента» для генерирования законов динамики.

Рассмотренный вариант допускает обобщение на основе применения арифметической суммы по модулю g. Она подчинена правилу

$$a \hat{+} b = \begin{cases} a+b, a+b \prec g, \\ 0, a+b = g, \\ a+b-g, a+b \succ g. \end{cases}$$

Циклическая группа Z_g содержит элементы

$$Z_g = \left\{ X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, \ldots X_{g-1} = g-1 \right\}.$$

Её элементы заданы с точностью до их дополнения элементами

$$gZ = \left\{ 0, \pm g, \pm 2g, \ldots \right\}.$$

Поэтому циклическая группа Z_g есть факторгруппа по подгруппе gZ. В частности,

$$Z_1 = \left\{ 0 \right\}, Z_2 = \left\{ 0,1 \right\}, Z_3 = \left\{ 0,1,2 \right\}, \ldots$$

Предыдущий алгоритм применялся на группе, ассоциированной с группой Z_2. Он пригоден для более сложных моделей и задач.

Алгоритм имеет формальное значение. Однако он удобен для обращения, равно как и для понимания того факта, что сложные законы могут иметь простое алгоритмическое представление в рамках моделей симметрий.

Фундаментальная роль группы перестановок в физике

Кэли доказал, что любая конечная группа изоморфна группе перестановок с порядком группы, равным порядку анализируемой группы. Другими словами, группа перестановок имеет фундаментальное значение в теории конечных групп. Покажем, что группа перестановок фундаментальна для физической теории.

Изоморфизм Кэли базируется на конструкции, которая сопоставляет элементу исходной группы элемент группы перестановок. Исходная группа получает образ в группе перестановок. Произведению элементов исходной группы ставится в соответствие произведение элементов группы перестановок. В этом подходе элементы группы перестановок *нивелируют различие элементов* исходной группы, заменяя любой элемент группы перестановкой. Произведения элементов группы перестановок *нивелируют различие произведений*, которым подчинены элементы исходной группы.

Реальная конечная система объектов с уникальной структурой, владеющая механизмом взаимодействия в форме «своего» закона произведения заменяется конечной системой идеализированных объектов с одним, универсальным механизмом взаимодействия в форме перестановки элементов. Другими словами, не требуется учитывать структуру реальных объектов, а также специфику их взаимодействия. Реальные объекты могут быть оценены и представлены абстрактными, формальными объектами образами реальных объектов. Реальное взаимодействие не рассчитывается, а заменено формальной перестановкой в системе абстрактных элементов.

Достаточно очевидно, что по такому алгоритму происходит взаимодействие людей. Человек оценивает другого человека по совокупности формальных внешних признаков, сопоставляет ему свой образ, некий формальный, информационный объект. Затем идет взаимодействие в форме передачи информации, аналогичной перестановке элементов, имеющейся у них информации, специфической для данной пары взаимодействующих объектов. Следовательно, алгоритм Кэли «близок» к механизму деятельности Сознания, заменяющего реальные объекты их образами, а реальное взаимодействие заменяется обменом элементов информации. По этой причине требуется сконструировать модель Сознания, аналогичную модели группы перестановок. Поскольку группы образуют частный случай общего семейства многообразий, желательно найти более общую конструкцию, которая будет достаточна для единого описания любой совокупности реальных объектов с любым взаимодействием их между собой.

Проанализируем простой пример. Пусть даны три объекта, которые образуют группу. Обозначим их буквами, формально представляющими реальные объекты, дополнительно присвоим им номера. Пусть задана формальная система, не раскрывающая структуру объектов:

$E = X_1$	$a = X_2$	$b = X_3$
1	2	3

.

Зададим совокупность законов, которым подчинены реальные элементы, представленные буквами, (без указания структуры произведения элементов) с условием, что они образуют группу. Пусть эти законы будут таковы:

$$X_1 \cdot X_1 = X_1,$$

$$X_1 \cdot X_2 = X_2, X_1 \cdot X_3 = X_3, X_2 \cdot X_1 = X_2, X_3 \cdot X_1 = X_3,$$
$$X_2 \cdot X_3 = X_1, X_3 \cdot X_2 = X_1, X_2 \cdot X_2 = X_3, X_3 \cdot X_2 = X_1.$$

Есть единичный объект X_1, обратный себе, объекты $X_2.X_3$ взаимно обратны.

Запишем эти законы на группе перестановок из трех элементов. Естественно сопоставление

$$X_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перейдем ко второму элементу. Получим сопоставление

$$X_2 \cdot X_3 = X_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2,$$

$$X_2 \cdot X_2 = X_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_3,$$

$$X_2 \cdot X_3 = X_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1.$$

Легко проверить, что так продублированы законы для элементов исходной, реальной группы, рассматриваемой без указания структуры её элементов и правила их произведения.

Получены реальные элементы группы подстановок. Они достаточны для представления реальной группы, заданной символами и правилом формального соответствия, матрицами, подчиненными матричному произведению. Для этого применим запись подстановок матрицами, значимые элементы в которых равны единице. Расположим их в строках, соответствующих числам первой строки в перестановке, на местах, соответствующих числам во второй строке перестановки. Получим матричное представление знакопеременной группы A_3:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентно ему матричное представление в виде совокупности матриц, расположенных по диагонали.

Например, возможно объединение матриц по парам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одна группа описывает не только систему отдельных объектов. Она задает тот же закон для «линейно соединенных» изделий, составленных из базовых объектов: аналогов «нитей» конечной длины. По этой причине анализ симметричных свойств таких нитей можно свести к анализу системы их базовых объектов. Эта ситуация стандартна для электродинамики и массодинамики.

В рассматриваемом случае мы имеем дело с циклической группой. Элементы a, b равноправно генерируют все другие элементы на основе многократного «воздействия на себя». Это обстоятельство важно для физики, так как указывает механизм образования совокупности разных изделий из одного изделия. Получим цепочку «реакций», представленных в трех разных формах:

$$a \cdot a = a^2 = b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$a \cdot a^2 = a^3 = a \cdot b = E \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$b \cdot b = b^2 = a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b \cdot b^2 = b^3 = b \cdot a = E \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае легко найти перестановки, применяя пару циклов к начальному их набору. Получим, соответственно, номера

$$123 \to 312 \to 231,$$
$$312 \leftarrow 231 \leftarrow 123.$$

Они соответствуют указанным выше значениям. Этот прием позволяет упростить конструирование элементов перестановок для циклической группы: следует применять цикл по упорядоченному начальному набору.

Запишем матрицы в сигнатурном представлении. Получим

$$X_1 = \begin{array}{|c|} \hline 000 \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, X_2 = \begin{array}{|c|} \hline 111 \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, X_3 = \begin{array}{|c|} \hline -1-1-1 \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}.$$

Из суммирования сигнатур более простым способом получаем те же законы, которые следуют из матричного произведения: трехкратное изменение сигнатур дает единичную матрицу.

Сигнатурное произведение генерирует совокупность матриц, которые образуют группы по этому произведению.

В частности, группой по сигнатурному произведению будет множество, дополняющее знакопеременную группу A_3 до полной группы перестановок S_3. Получим

000	111	−1−1−1
$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Есть разнообразные другие возможности:

000	111	−1−1−1
$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,

000	111	−1−1−1
$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

000	111	−1−1−1
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$...

Во всех указанных случаях при суммировании матриц, задающих группу, обеспечивается полное заполнение матрицы значимыми элементами.

Назовем такую совокупность матрицей реализации:

$$\Lambda = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Её элементы перераспределяются по-разному в зависимости от того, какая операция будет применена к новым объектам, а также от того, какой набор элементов будет начальным.

Комбинаторное произведение матриц знакопеременной группы A_3 «владеет» парой свойств. Оно многократно косвенно генерирует элементы этой же группы, порождая их дополнение идеалами.

Проиллюстрируем этот механизм, которого нет ни у матричного произведения, ни у сигнатурного произведения. Рассмотрим комбинаторное произведение матриц знакопеременной группы A_3 на себя, умножая строки на строки.

Получим алгоритм вида

100	010	001
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Произведения одной матрицы на другие матрицы реализуется так, что косвенно генерируются исходные матрицы. Результат прямого комбинаторного произведения состоит в получении идеалов. Они образуют группу, изоморфную исходной группе, но с другими элементами и с другим произведением. Так действует любой элемент исходной группы. У комбинаторного произведения есть косвенное генерирование элементов группы, дополненное прямым генерированием новых элементов, не принадлежащих рассматриваемому множеству. Скрытность и генерация нового стандартна для развитого мышления. В рассматриваемом случае такие свойства проявляет операция. Следовательно, есть основания для гипотезы: *свойства Сознания ассоциированы со свойствами операций на множестве элементов.*

Указанные свойства имеют не только базовые объекты. Они есть у каждого «линейного изделия», составленного из базовых объектов.

Проанализируем свойства *логических операций*. Получим соотношения:

$$\left\{X_1=1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},X_2=2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},X_3=3=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$$

$\downarrow$

A_3	1^*	2^*	3^*
1^*	1	2	3
2^*	3	1	2
3^*	2	3	1

$$\rightarrow Y_1=1^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},Y_2=2^*=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},Y_3=3^*=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$Y_1=1^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},Y_2=2^*=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},Y_3=3^*=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$\downarrow$

B_3	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

$$\rightarrow X_1=1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},X_2=2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},X_3=3=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Алгоритм их конструирования состоит в том, что по структуре матриц постулируется закон произведения некоторых других матриц, ассоциированных с исходными матрицами.

В частности, закон логической операции может действовать на самом множестве, с которым ассоциирована эта операция.

Найдено *новое свойство* в теории групп. Оно состоит в *дополнительности системы логических операций:*

а) логическая операция, сконструированная на знакопеременной группе A_3, задает закон матричного произведения для элементов смежного класса B_3, генерирующих элементы группы A_3,

б) логическая операция, *сконструированная на элементах смежного класса* B_3, задает закон матричного произведения для элементов знакопеременной группы A_3.

Ранее была принята гипотеза, что совокупность объектов, имеющих структуру, генерирует совокупность операций, согласованную с этой структурой. Таковы нормальные подгруппы, таковы смежные классы. Другими словами, если есть система изделия, то есть ассоциированная с ее структурой система операций. Эти две стороны одной и той же системы объектов неотделимы друг от друга.

Одна и та же система объектов может быть получена разными системами объектов на разных логических операциях. В рассматриваемом случае так получаются элементы знакопеременной группы A_3.

Конечно, могут быть неполные структуры, которым ставятся в соответствие неполные логические произведения. Логическая система становится полной, если полна по структуре совокупность изделий. Структура становится полной, если есть полная логическая система операций.

Заметим, что пары объектов достаточно, чтобы по ним предсказать структуру третьего объекта, ассоциированного с ними по логической операции. Действительно, пусть известна неполная логическая операция

$\tilde{B}_3$	1	2	3
1	1	2	–
2	2	–	1
3	–	1	2

Тогда с парой объектов, которые образовали логическую операцию указанного вида, ассоциируется объект, который их дополняет.

Получим модель структурного дополнения логической операции:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\to\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Логическая модель становится кодом для конструирования объектов, подчиненных этой операции. Это может быть возможность конструирования, но это может быть также требование конструирования. Их выполнение имеет разные сценарии, но основным является условие подчинения логической операции, ассоциированной со структурой системы объектов.

По сути дела, с физической точки зрения, исходная система объектов является средством и условием для порождения новых объектов, ассоциированных с их структурой.

Изменение структуры означает изменение управления со стороны этой системы объектов. Так всегда происходит в реальной жизни. Однако до настоящего времени отсутствовали прямые математические методы учета и описания этого свойства Реальности.

Знакопеременная группа A_3 генерируется в форме циклической группы одним элементом, три раза влияющим на себя для получения системы, состоящей из тех объектов. Такому циклу соответствует изменение нормировки вершин правильного треугольника, которого можно задать плоским многогранником, симплексом. С физической точки зрения так описываются три дискретных поворота этого треугольника с отображением отношений элементов, расположенных в вершинах, с элементами стационарного треугольника. В этом варианте на каждом этапе движения места меняют все объекты системы.

С другой стороны, как известно, фундаментальные уравнения физической теории имеют циклическую форму. Естественно предположить, что указанные два вида циклов согласованы друг с другом. Замкнутый симплекс, цикл дискретных вращений, знакопеременная группа, уравнения физики в циклической форме имеют одно общее свойство: это циклы. По этой причине, принимая единую природу Тел и Сознаний, мы вправе надеяться, что уравнения для Сознаний могут иметь циклическую форму.

Другой тип физических движений общего вида состоит в том, что пара объектов может «поменяться местами», не оказывая влияния на положение остальных объектов. На языке перестановок это предложение дословно отражает смысл указанных движений. Так из свободных объектов генерируется второй тип структурных объектов:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to \begin{array}{|c|}\hline 01-1\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline -101\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1-10\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array}.$$

Во всех случаях структурные объекты формируются на основе движений, «следы» которых проявляются на новой системе отношений между объектами. Другими словами, отношения меняются движениями, которые учитываются по некоторому алгоритму. *Учитываемые движения структурируют материю*.

Принимая аналогию Сознаний и Тел, мы начинаем понимать, что информационные движения структурируют Сознание. Аналогично структурируются Чувства, рассматриваемые в форме «мостов», соединяющих Тела и Сознания.

Изделия и логические произведения, ассоциированные с ними, будут разными в зависимости от совокупности условий:

а) каковы исходные объекты,

б) в каких движениях они участвуют,

в) как учитывается структура объектов и их движения (каковы итоги этой деятельности),

г) как реализуется управление в системе объектов?

Физические модели задаются обычно в матричной форме. Ни группа перестановок в её явном виде, ни буквенный вид групп не применяется в теории. Возможно, мы пока не знаем, как этим пользоваться. При рассмотрении матричных моделей естественно проанализировать базовые элементы матриц, элементы матричной группы, матрицы которой содержат только один значимый элемент. Поскольку физические теории конструируются на матрицах, они всегда будут элементами матричной алгебры.

Заметим, что элементы матричной алгебры можно получить на основе групп, а также на основе смежных классов, которые не являются группами. Рассмотрим простую иллюстрацию этого факта.

Расширим смежный класс B группы перестановок S_4 посредством знаковой группы с элементами

$$\begin{Bmatrix} + & - & - & + \\ + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \end{Bmatrix}.$$

Получим 16 матриц:

$$a(\xi) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b(\xi) \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c(\xi) \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d(\xi) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждый столбец образует самостоятельную систему объектов, на основе которой можно записать элементы матричной алгебры. Для этого требуется применять конструкции вида

$$a(\xi)+b(\xi), a(\xi)+c(\xi), b(\xi)+d(\xi), c(\xi)+d(\xi),$$
$$a(\xi)-b(\xi), a(\xi)-c(\xi), b(\xi)-d(\xi), c(\xi)-d(\xi).$$

Например, получим

$$a(1)+b(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c(1)+d(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{4}\left(a(1)+b(1)+c(1)+d(1)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

Известно, что физические уравнения можно записать на кватернионах и антикватернионах, ассоциированных с группой Клейна, расширенной посредством знаковой группы. Однако их можно записать и на элементах любого смежного класса группы подстановок из 4 элементов.

Следовательно, матричное представление группы подстановок, расширенной на основе знаковой группы образует основу любой физической модели.

Получен *фундаментальный результат*: любую физическую модель можно представить, как элемент групповой алгебры на нормальной подгруппе и смежных классах группы, полученной расширением матричного представления группы перестановок на основе знаковой группы.

Группа перестановок фундаментальна не только для моделирования любых конечных групп, как это доказано Кэли. Матричные представления группы перестановок фундаментальны для любой физической теории при её расширении на основе знаковой группы.

Поскольку есть 6 самостоятельных «блоков» для конструирования физической теории, она имеет 6 различных матричных форм.

Операционное замыкание матричных множеств

Специфика данного этапа исследования симметрий и их приложений к физике состоит в том, что к одному набору матриц можно применять разные операции. Анализ показал, что есть некоторые новые закономерности, которым подчинены анализируемые множества. В частности, есть многообразия, которые замкнуты (остаются в себе) под действием разных операций. На этом свойстве можно конструировать топологию, которая характеризуется различием операционных замыканий, свойственных анализируемым множествам.

Рассмотрим совокупность матриц размерности 3, у которых значимые элементы равны единице, причем значимые элементы в одном экземпляре заполняют каждую строку матрицы.

Получим наборы матриц:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4 & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline\end{array},$$

6	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	,	7	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	,

8	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	,	9	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	.

Проанализируем их операционные свойства.

Во-первых, мы имеем набор групп по сигнатурной операции вида

$$(000),(111),(-1-1-1).$$

Каждый набор замкнут независимо от других наборов. Значимые элементы в сумме заполняют всю матрицу. Такие наборы широко распространены в физике. Они могут быть применены для анализа структуры объектов, заданных в трехмерном пространстве. На их основе можно описывать динамику двумерных объектов, добавляя к двум пространственным координатам одну временную координату.

Во-вторых, комбинаторное произведение элементов на себя у каждого набора одно и то же. Оно задается матрицами «электрического типа»

3	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	.

С физической точки зрения этот факт указывает на возможность генерирования электрических предзарядов системой разных объектов, если они подчинены комбинаторной операции.

Для набора под номером один получим, например, соответствия

100			010			001		
1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0

$$\to \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Комбинаторное произведение этих матриц справа на наборы номера 1 или номера 2 не меняет эти наборы. Эти множества замкнуты по такому комбинаторному произведению. При комбинаторном произведении слева наборы этого типа взаимно трансформируются. Правое и левое произведение замыкают разные множества. Указанное свойство имеет общий характер, оно пригодно для других наборов.

Набор матриц с номером 3 выполняет либо функцию сохранения набора из указанной совокупности, либо функцию его дополнения другим набором. Комбинаторная операция реализует расщепление совокупности матриц на 4 пары, управляемые единым набором матриц «электрического типа». Проиллюстрируем эту ситуацию на примере наборов с номерами 8 и 9. Матрицы, расположенные сверху, комбинаторно умножаются справа.

Матрицы, расположенные снизу, комбинаторно умножаются слева. Получим такой результат:

$$
\begin{array}{|ccc|ccc|ccc|}
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
\to
\left\{
\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}
\right.
$$

Другие пары компонуются в соответствии со своей структурой в блоки 4 и 5, 6 и 7.
Получим для блоков 6 и 7 таблицы:

6×6	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

,

7×7	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

.

В-третьих, при взаимном матричном произведении элементов немономиальных блоков получаются элементы всей тройки блоков, которая следует другим способом из комбинаторного произведения.
Матричное произведение генерирует по элементам одного блока все другие элементы, которые ассоциированы с ним по комбинаторному произведению.

В-четвертых, логические произведения взаимно соответствуют номерам элементов указанной тройки блоков.

Они таковы:

$6\overset{l}{\times}$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	1	2	3

,

$7\overset{l}{\times}$	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	1	2	3

.

Для группы Клейна структура логической операции аналогична структуре матричной операции. Для анализируемой пары групп на сигнатурной операции ситуация иная: во-первых, структурная операция объединяет правила произведения для разных объектов, во-вторых. Логические операции взаимны.

Следовательно, у логических операций есть система свойств. Они могут быть полезны для предсказания новых законов и технологий. Важнее всего то, что система операций ассоциирована со структурой системы матриц.

Проанализируем другую пару матриц. Получим таблицы:

$\overset{m}{4\times}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

,

$\overset{m}{5\times}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

.

Логические операции для анализируемых матриц таковы:

$\overset{l}{4\times}$	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	3	1	2

,

$\overset{l}{5\times}$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	2	3	1

.

Эта ситуация аналогична предыдущей. Есть логические операции на матрицах первого и второго типа:

$\overset{l}{1\times}$	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

,

$\overset{l}{2\times}$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	2	1	2

.

Произведения элементов таковы:

$\overset{m}{1}\times$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

,

$\overset{l}{2}\times$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

.

Здесь показаны новые свойства логической операции. Они взаимно согласованы со структурой своих элементов.

Многообразия для согласованного описания Тел, Сознаний, Чувств

Из системы разнообразных фактов естественно следует предположение, что каждое физическое изделие владеет не только структурой в форме физического Тела, но также и системой операций, обеспечивающих сохранение Тела и его развитие. Эта система операций может трактоваться как проявление Сознания данного Тела. Сознание также имеет свое Тело, следуя принципу софистатности Тел и Сознаний. Тело влияет на Сознание на основе Чувств. Обратно, Сознание влияет на Тело на основе, возможно, другой системы Чувств. По этой причине представляется необходимым нахождение некоторой математической модели, которая задает 4 математические множества, согласованные друг с другом. Каждое из таких множеств имеет и предоставляет возможности для конструирования моделей Тел, Сознаний, пары Чувств.

Понимание фундаментальной роли группы перестановок в физике, естественно попытаться решить такую задачу на основе некоторого алгоритма, ассоциированного с группой перестановок. С другой стороны, ранее принято фундаментальное предположение, что физические объекты конструируются из пары электрических предзарядов и пары гравитационных предзарядов. Соединяя два фундаментальных предположения, мы проанализируем возможность конструирования множеств для описания Тел, Сознаний, Чувств на основе расширения группы перестановок для 4 элементов. Применим для расширения группы перестановок из 4 элементов элементы группы трансляций, приняв за основу расширения 4 элемента нормальной подгруппы четверной группы Клейна и систему её смежных классов. Расширение группы перестановок из 4 элементов на секторе A выглядит так:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

Заметим, что элементы группы трансляций есть аналоги сигнатурной операции. Другими словами, действие элемента группы трансляций на некоторый исходный элемент генерирует группу на сигнатурной операции. Из 4 элементов смежного класса мы получаем набор матриц в форме 16 групп на сигнатурной операции. Поскольку элементы будут повторяться, дополнительно реализуется новое множество из 16 матриц.

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Матрицы типа A объединены с матрицами типа B и с матрицами немономиального типа. Аналогично матрица типа B объединены с матрицами типа A и с аналогичными матрицами немономиального типа.

Получим для матриц типа B расширение вида

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\=\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

В итоге расширения сектора A, B дополняются 8 немономиальными матрицами.

Расширение группы перестановок из 4 элементов на секторе E выглядит так:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\=\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1`&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Матрица типа E объединены с матрицами типа C и с матрицами немономиального типа.

Аналогично матрицы типа C объединены с матрицами типа E и с аналогичными матрицами немономиального типа. Получим для матриц типа C расширение вида

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&10\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

.

Матрицы типа E,C дополняются 8 немономиальных матриц.

Расширение группы перестановок из 4 элементов на секторе F выглядит так:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&10\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Матрица типа F объединены с матрицами типа D и с матрицами немономиального типа.

Аналогично матрицы типа D объединены с матрицами типа F и с аналогичными матрицами немономиального типа. Получим для матриц типа D расширение вида

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Сети групп на сигнатурной операции

Расширение группы перестановок из 4 элементов позволило объединить в одну систему матрицы разных типов. Мономиальные матрицы объединены с мономиальными матрицами, сформировав систему групп на сигнатурной операции. Немономиальные матрицы можно объединить таким образом, что они также образуют группы на сигнатурной операции. У полных наборов будут различны «продольные» и «поперечные» свойства. Проанализируем их.

Первый набор матриц типа A, B имеет такой вид:

$$(0000)\downarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\to(1-11-1),$$

$$(0202)\downarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to(1-11-1),$$

$$(0022)\downarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\to(1111),$$

$$(0220)\downarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to(1111).$$

Сигнатура матриц, указанная справа, обозначает последовательные смещения значимых элементов от начального элемента, расположенного в первом столбце.

«Продольная» структура системы матриц образована двумя типами групп на сигнатурной операции: есть «нити» двух видов. Одна пара «нитей» образована на основе последовательного сигнатурного сдвига $(1-11-1)$. Другая пара «нитей» образована на основе последовательного сигнатурного сдвига (1111). Элементы «нитей» расположены по строкам рассматриваемой системы матриц.

«Поперечная» структура системы матриц образована «нитями» одного типа. Они сконструированы из начальных элементов, расположенных в первой строке на основе системы сигнатур вида

$$(0202),(0022),(0220).$$

Структура главной диагонали задана последовательными сигнатурами

$$(0000),(1111),(11-1-1),(1-11-1).$$

Мы имеем некоторую «сеть», содержащую элементы с разными «продольными», «поперечными» и диагональными сигнатурами, играющими роль их связей между собой.

Есть еще две «сети». Вторая сеть образована элементами типа E,C. Она такова:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Третья «сеть» образована элементами типа $F.D$. Она имеет вид:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Свойства этих «сетей» аналогичны свойствам «сети», проанализированной ранее.

Получена система матриц, на основе которой возможно моделирование качественно новых систем уравнений. В них матрицы разных типов объединены по сигнатурной операции.

Дополним предыдущий анализ новыми следствиями.

Рассмотрим группу на сигнатурной операции, ассоциированную с поперечной структурой наборов E,C группы перестановок из 4 элементов. Пусть выбрано такое множество:

0000	0022	0220	0202
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Оно содержит три подгруппы. В нем есть аналог факторгрупп по каждой подгруппе. Все элементы расположены, в рамках геометрии с управлением, на одинаковом «расстоянии» от опорного объекта. Их расстояния не меняются при перемене управляющего объекта. Такие свойства имеют группы «мужского типа».

Рассмотрим другой набор матриц:

0000	1111	2222	3333
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

Он содержит одну подгруппу: $(0000),(2222)$. Элементы расположены на разном расстоянии от управляющего объекта. Такие свойства имеют группы «женского типа».

Следовательно, «сети» имеют «женские» свойства в «продольном» направлении. Они имеют «мужские» свойства в «поперечном» направлении.

Скрытые свойства групп на структурной операции

Группы на структурной операции устроены так, что бинарная операция ассоциирована со структурой опорной матрицы. Паре структурных сигнатур ставится в соответствие новая сигнатура. С каждой сигнатурой ассоциирована матрица определенного вида, индуцированного выбором опорной, управляющей матрицы. Такой подход аналогичен алгоритму, применяемому в модели *конструктивной группы*, согласно которому элементам некоторой группы ставятся в соответствие натуральные числа. Между двумя такими множествами устанавливается соответствие. Этот алгоритм был предложен Мальцевым А. И. и разрабатывался Ершовым Ю.Л. и его учениками. Алгоритм не доведен до уровня приложений в физике. Не обосновано его фундаментальное значение и прикладной смысл.

Принципиальное отличие групп на структурной операции в том, что на первом этапе по системе структурных сигнатур конструируется некоторое множество элементов, которое не обязано быть группой на какой-то бинарной операции. На втором этапе оно превращается в группу на основе изоморфизма этих элементов и элементов структурных сигнатур. На третьем этапе это множество элементов расширяется на основе знаковой группы с явным приложением к решению физических задач: в частности, для конструирования систем дифференциальных уравнений.

Проанализируем свойства совокупности элементов групп на структурной операции. Просуммируем матрицы, сопоставив последовательности матриц совокупность значимых элементов.

Пусть задана группа на структурной операции с элементами

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
(0000)	(1111)	(2222)	(3333)

У нас есть 4 матрицы, которые по-разному содержат элементы в столбцах. Укажем эти соответствия, располагая на первом месте значимый элемент в первом столбце, сопоставив ему номер матрицы, в которой он находится. Представим соответствия по каждой строке:

$1 \to 1$	$2 \to 2$	$3 \to 3$	$4 \to 4$
$1 \to 4$	$2 \to 1$	$3 \to 2$	$4 \to 3$
$1 \to 3$	$2 \to 4$	$3 \to 1$	$4 \to 2$
$1 \to 2$	$2 \to 3$	$3 \to 4$	$4 \to 1$

«Прочитаем» эти соответствия по каждой строке иначе, располагая первый, второй и т.д. значимые элементы на места в матрице, указанные стрелками. Получим 4 матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данное множество отличается от анализируемого множества только нумерацией матриц: четвертая и вторая матрицы поменялись местами. В этом варианте их суммирование «в столбец» генерирует опорные матрицы в каждом столбце.

Другими словами, группа на структурной операции есть также группа, ассоциированная с местами значимых элементов в совокупности матриц.

В данном случае эта система матриц есть группа на матричной операции. Структурные сигнатуры сопоставлены матрицами таким образом, что произведение сигнатур аналогично матричному произведению. Следовательно, нами рассмотрен вариант конструктивной группы.

Эта группа приобретает фундаментальное значение после её расширения знаковой группой, так как её групповая алгебра генерирует элементы матричной алгебры.

Другой тип соответствий ассоциирован с группой на сигнатурной операции вида

0000	0022	0220	0202
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Сконструируем соответствия так: зададим отношения между матрицами, значимые элементы на строках которой расположены одинаково. Получим

$1\to 2,3,4$	$2\to 3,4,1$	$3\to 4,1,2$	$4\to 1,2,3$
$1\to 2$	$2\to 1$	$3\to 4$	$4\to 3$
$1\to 4$	$2\to 3$	$3\to 2$	$4\to 1$
$1\to 3$	$2\to 4$	$3\to 1$	$4\to 2$

.

Расположим значимые элементы в матрицах согласно местам, указанным стрелками. Получим матрицы, представляющие четверную матричную группу Клейна:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

В этом варианте есть изоморфизм групп. Проанализируем модель с матрицами вида

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.
(0000)	(2200)	(2002)	(0202)

Изменена опорная матрица, принят другой набор структурных сигнатур. Однако осталась неизменной система отношений матриц по расположению значимых элементов, указанному выше.

Группа Клейна может рассматриваться как образ системы структурных групп с указанной системой сигнатур. Каждая группа на такой системе сигнатурных операций может трактоваться как группа, конструктивная по группе Клейна. Однако эти группы на сигнатурной операции не имеют указанного фундаментального значения для физики. Их сумма не заполняет все места матрицы. Поэтому с ними не могут быть ассоциированы элементы матричной алгебры, если не принять дополнительных условий. Более того, значимые элементы при их суммировании накладываются друг на друга. Однако возможен некий другой фундаментальный смысл групп такого типа. Важно другое, что они формально ассоциированы с широко применяемой четверной группой Клейна.

Начала геометрии отношений

Рассмотрим модель отношений в системе, состоящей из 4 объектов. Пусть это будут 2 женщины и 2 мужчины. Их отношения зададим матрицами, представляющими совокупность отношений в данной системе. Возможны, например, такие варианты:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to
\begin{array}{|c|c|c|}\hline f_2 & & f_1 \\ \hline & & \\ \hline m_2 & & m_1 \\ \hline \end{array},
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to
\begin{array}{|c|c|c|}\hline f_2 & & f_1 \\ \hline \uparrow & \searrow & \\ \hline m_2 & \leftarrow & m_1 \\ \hline \end{array},
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to
\begin{array}{|c|c|c|}\hline f_2 & & f_1 \\ \hline \updownarrow & & \updownarrow \\ \hline m_2 & & m_1 \\ \hline \end{array},
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to
\begin{array}{|c|c|c|}\hline f_2 & & f_1 \\ \hline & \nwarrow\!\searrow & \\ \hline m_2 & & m_1 \\ \hline \end{array},
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to
\begin{array}{|c|c|c|}\hline f_2 & \to & f_1 \\ \hline & & \updownarrow \\ \hline m_2 & \to & m_1 \\ \hline \end{array},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to
\begin{array}{|c|c|c|}\hline f_2 & \leftrightarrow & f_1 \\ \hline & & \\ \hline m_2 & \leftrightarrow & m_1 \\ \hline \end{array},\ldots
$$

Этих данных недостаточно для построения геометрии отношений. Расширим данные, приняв модель взаимной трансформации отношений в системе из 4 объектов:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to
\begin{array}{|c|c|c|}\hline f_2 & & f_1 \\ \hline \updownarrow & & \updownarrow \\ \hline m_2 & & m_1 \\ \hline \end{array},
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to
\begin{array}{|c|c|c|}\hline f_2 & & f_1 \\ \hline & \nwarrow\!\searrow & \\ \hline m_2 & & m_1 \\ \hline \end{array}.
$$

В таком варианте возможно построчное преобразование элементов динамического типа на основе вектора трансформации

$$\vec{\sigma} = \left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\right).$$

Оно имеет вид

$$
\begin{gathered}
\xi_1 = a_{12}\left(1-\sigma_1\right) + b_{11}\sigma_1 = \pi_{21}, \xi_2 = a_{21}\left(1-\sigma_2\right) + b_{24}\sigma_2 = \pi_{14}, \\
\xi_3 = a_{34}\left(1-\sigma_3\right) + b_{33}\sigma_3 = \pi_{43}, \xi_4 = a_{43}\left(1-\sigma_4\right) + b_{42}\sigma_4 = \pi_{32}.
\end{gathered}
$$

Все текущие значения переходных матриц задаются выражениями

$$
\begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & a_{34} \\ 0 & b_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \to
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.
$$

С элементами π_{ij} ассоциированы матрицы:

$$\pi^{lc}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\pi^{cl}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Система матриц, соответствующая частичному, итоговому изменению элементов, одинакова как для прямого, так и для обратного преобразования. Запишем её в совокупности с системой структурных сигнатур, приняв в качестве элемента с нулевой сигнатурой матрицу «пары семей». Они таковы:

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (1000)\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (0100)\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (0010)\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (0001)\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (1100)\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (1010)\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (1001)\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (0110)\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (0101)\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (0011)\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (1111)\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (1110)\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (1101)\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (1011)\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (0111)\\\hline\end{array}.$$

Матрицы представлены системой сигнатур:

$$(1000),(0100),(0010),(0001),$$
$$(1100),(1010),(1001),(0110),(0101),(0011),$$
$$(1110),(1101),(1011),(0111),(1111).$$

Получена система матриц, посредством которой выражается система состояний для пары «семей», ассоциированная с возможными изменениями их отношений в форме частичного или полного перехода начального состояния в конечное состояние.

Она идентична модели сигнатурного представления конечного поля Галуа. В этом расширении неприводимый многочлен имеет вид

$$f(x) = x^4 + x + 1.$$

Из канонического полинома

$$f(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$$

на основе комбинаторики соединения указанных слагаемых генерируются многочлены, которые индуцируют систему чисел поля $F_2 = [0,1]$. Ситуацию можно представить таблицей:

Многочлен	*Степень*	$1 \quad x \quad x^2 \quad x^3$
	α	0 1 0 0
	α^2	0 0 1 0
	α^3	0 0 0 1
$1+\alpha$	α^4	1 1 0 0
$\alpha+\alpha^2$	α^5	0 1 1 0
$\alpha^2+\alpha^3$	α^6	0 0 1 1
$\alpha+\alpha^3+1=\alpha^3+\alpha^4$	α^7	1 1 0 1
$1+\alpha^2=\alpha+1+\alpha^2+\alpha$	α^8	1 0 1 0
$\alpha+\alpha^3$	α^9	0 1 0 1
$1+\alpha+\alpha^2=\alpha^2+\alpha^4$	α^{10}	1 1 1 0
$\alpha+\alpha^2+\alpha^3$	α^{11}	0 1 1 1
$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$	α^{12}	1 1 1 1
$1+\alpha^2+\alpha^3=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$	α^{13}	1 0 1 1
$1+\alpha^3=\alpha+\alpha^3+\alpha^4$	α^{14}	1 0 0 1
$1+\alpha+\alpha^4$	α^{15}	1 0 0 0

.

Следовательно, есть *связь расширений конечных полей с динамикой в группе перестановок.*

Эта динамика состоит в том, что одна матрица из группы перестановок 4 элементов преобразуется в другую матрицу из этой же группы. Размерность неприводимого многочлена в данном случае совпадает с числом базовых объектов для группы перестановок. Сравнение моделей проводится по методу сопоставления матрицам системы сигнатур.

Легко проверить, что анализируемая система сигнатур задает группу по опорной матрице, сигнатура которой нулевая. Следовательно, конечному полю Галуа F_{2^4} соответствует группа на сигнатурной операции.

Поскольку это так, мы имеем алгоритм конструирования аналогов конечных полей для тех размерностей, которых выходят за пределы условия, что их порядок задается степенью простого числа. Это числа 6, 14 и т.д.

Поскольку есть динамика преобразования одних матриц в другие, можно ставить задачу анализа динамики конечного поля. В частности, она будет проявлять себя по динамике сигнатур анализируемых матриц.

Наличие системы структурных сигнатур позволяет установить систему отношений в этой системе матриц. Подчиним сложение сигнатур правилам, привычным для суммирования кодов. Пусть выполняются условия

$$0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0.$$

Тогда определена сумма структурных сигнатур. Например, получим

$$(1010)+(0110)=(1100).$$

В данном случае получена группа на структурной операции, так как есть единица, обратные элементы, а суммирование ассоциативно. Эти условия достаточны для конструирования аффинной геометрии отношений в аксиоматике Вейля.

Рассмотрим три матрицы A, B, C. Определим аффинные расстояния между ними выражениями

$$AB = A+B, BC = B+C, AC = A+C.$$

Согласно аксиомам аффинного пространства должно выполняться условие

$$AB + BC = AC.$$

В рассматриваемом случае оно очевидно, соответствуя условиям, которые реализованы в группе с операцией в форме структурной сигнатуры.

Проиллюстрируем частные случаи. Получим, например, выражения

$$A=(1000), B=(0010), C=(0101),$$

$$AB=(1010), BC=(0111), AB+BC=(1101)=AC,$$

$$A=(0110), B=(1011), C=(0001),$$

$$AB=(1101), BC=(1010), AB+BC=(0111)=AC, \ldots$$

Модель отношений, характеризующих систему переходных состояний в паре объектов, имеющих сигнатурное представление, имеет структуру аффинного пространства. Такую же структуру, согласно обнаруженной аналогии, имеет конечное поле.

Аффинная структура конечных полей инициирует проблему построения проективного пространства для конечных полей.

Следовательно, *с отношениями ассоциировано пространство*, свойства которого обусловлены структурой анализируемых объектов.

Указанный алгоритм конструирования аффинного пространства пригоден для каждой группы на структурной операции. У таких пространств есть свои характерные черты.

Проиллюстрируем этот тезис на группе со структурной операцией, которая получается из любой мономиальной матрицы перестановками значимых элементов в трех первых строках на единицу вправо и перестановкой влево в последней строке.

Получим, например, матрицы с сигнатурами:

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.
(0000)	$(111-1)$	$(222-2)$	$(333-3)$

Пусть

$$A=(111-1), B=(222-2), C=(333-3).$$

Для них получим

$$AB=(333-3)=(-1-1-11), BC=(111-1),$$
$$AB+BC=(0000)=AC.$$

С физической точки зрения это условие «подсказывает» возможность расположения элементов группы на вершинах некоторого симплекса, например, замкнутой струны. Мы фактически применяем модель конечной аффинной геометрии. У нас есть прямоугольник, в вершинах которого расположены элементы группы на структурной операции, которые соединены между собой линиями. Им соответствует рис.2.

		1		
	⤢	$\updownarrow$	⤡	
0	$\leftrightarrow$	+	$\leftrightarrow$	2
	⤡	$\updownarrow$	⤢	
		3		

Рис.2. Конечная геометрия группы на сигнатурной операции

Аналогично можно рассматривать конечную проективную геометрию, применяя диаграммы типа Фано. Для произведения некоторых октонионов можно применять рис.3.

		6		
4		$\downarrow$		1
$\uparrow$	$\nwarrow$		$\nearrow$	$\downarrow$
3		7		5
	$\nwarrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
		2		

Рис.3. Частичная таблица произведения октонионов

Мы имеем аналог модели проективной плоскости, дополненной системой ориентированных стрелок.

Группа на сигнатурной операции, ассоциированная с исключительной группой G_2

Компактная группа G_2 есть группа автоморфизмов алгебры октонионов (подгруппы $SO(7)$), оставляющая на месте 8-мерный спинор. Она была найдена Э.Картаном в 1914 году. Корневые вектора такой группы вещественны. Их можно разместить в 2-мерном пространстве. Более «симметрично» выглядит их представление тремя координатами. В этом случае сумма трех координат для каждого корневого вектора будет равна нулю.

Трехмерное представление корневых векторов имеет вид:

$$(1-10),(-110),(10-1),(-101),(01-1),(0-11),(2-1-1),$$
$$(-211),(1-21),(-12-1),(11-2),(-1-12),(01-1),(1-21).$$

Сопоставим этому набору матрицы размерности 3×3, рассматривая корневые векторы в качестве системы сигнатур относительно единичной матрицы. Получим соответствия:

$$\begin{array}{|c|}\hline (1-10)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-110)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (10-1)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-101)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (01-1)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (0-11)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (2-1-1)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (-211)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (1-21)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (11-2)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-1-12)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-12-1)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (01-1)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (1-21)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array}.$$

Выполним выборку из данной системы, учитывая тот факт, что некоторые корневые вектора дают одну и ту же матрицу при разных сигнатурах. Получим 9 матриц, учитывая опорную матрицу. Они таковы:

$$\begin{array}{|c|}\hline (000)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (1-10)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-110)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (10-1)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-101)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (01-1)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (0-11)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-1-1-1)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (111)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array}.$$

Покажем, что это группа на сигнатурной операции. Обратные элементы в данной системе расположены рядом друг с другом. В системе есть единичная матрица. Сигнатурная операция ассоциативна. Система образует группу, если при суммировании сигнатур мы остаемся в данной системе сигнатур. Этот факт легко проверить. Выполним суммирование сигнатур. Оно представлено табл. 1.

Таблица 1

	1−10	−110	10−1	−101	01−1	0−11	−1−1−1	111
1−10	−110	000	−1−1−1	0−11	10−1	111	01−1	−101
−110	000	1−10	01−1	111	−1−1−1	−101	10−1	0−11
10−1	−1−1−1	01−1	−101	000	111	1−10	0−11	−110
−101	0−11	111	000	10−1	−110	−1−1−1	1−10	01−1
01−1	10−1	−1−1−1	111	−110	0−11	01−1	−101	1−10
0−11	111	−101	1−10	−1−1−1	000	01−1	−110	10−1
−1−1−1	01−1	10−1	0−11	1−10	−101	−110	111	000
111	−101	0−11	−110	01−1	1−10	10−1	000	−1−1−1

.

Следовательно, есть группа автоморфизмов корней для группы G_2, базирующаяся на сигнатурной операции.

Эта группа имеет 4 подгруппы, состоящие из единичной матрицы и пары взаимно обратных матриц. Это обстоятельство обеспечивает возможность конструирования 4 разных моделей на одной группе.

Любая из указанных матриц по данной системе сигнатур генерирует одинаковую систему матриц. Например, получим

$$\begin{array}{|c|}\hline (000) \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (1-10) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (-110) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (10-1) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (-101) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (01-1) \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (0-11) \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (-1-1-1) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (111) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}.$$

Мы имеем новый вид инвариантности: структура системы матриц при заданной системе сигнатур не зависит от выбора опорной матрицы.

Аналог проективной геометрии для группы на сигнатурной операции

Анализируемая модель допускает физическую интерпретацию совокупности матриц в форме математических «изделий», иллюстрирующих разные возможности отношений в системе, состоящей из трех объектов любой природы. Эти отношения имеют 4 формы. Их удобно представить рис.4.

$$1\to\begin{array}{|c|}\hline (000)\\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},$$

$$2\to\begin{array}{|c|}\hline (-1-1-1)\\ \hline \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline (111)\\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},$$

$$3\to\begin{array}{|c|}\hline (01-1)\\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline (-101)\\ \hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline (1-10)\\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},$$

$$4\to\begin{array}{|c|}\hline (0-11)\\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline (10-1)\\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline (-110)\\ \hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}.$$

Рис.4. Формы отношений в системе, состоящей из трех объектов

Дадим им «физическую» интерпретацию. Тип 1 означает наличие системы свободных объектов. Тип 2 задает отношения в форме пары циклов, имеющих разную ориентацию. Тип 3 описывает ситуации, когда один из объектов свободен, а два других находятся в отношениях друг с другом. Тип 4 соответствует ситуациям, когда все объекты группируются у одного или у другого объекта.

Изменение типа, равно как изменения внутри типа, могут быть описаны на основе матриц, задающих новые системы стационарных состояний. В частном случае эта задача уже решалась ранее. Показано, что система матриц, ассоциированная с таким превращением, образует аффинное пространство на сигнатурной операции. В частности, переход внутри типа 4 задается матрицами вида

$$\begin{array}{|c|}\hline (0-11)\\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}\to\begin{array}{|c|}\hline (10-1)\\ \hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ldots\right\}.$$

Матрицы группы автоморфизмов корневых векторов группы G_2 не образуют модель аффинного пространства. Рассмотрим, например, вариант выбора точек, иллюстрирующий этот факт:

$$A=(1-10), B=(01-1), C=(111),$$
$$AB=(10-1), BC=(1-10), AB+BC=(-1-1-1)\neq AC=(-101).$$

Покажем, что мы имеем дело с аналогом проективного пространства. В стандартной модели проективного пространства принято рассматривать инвариант в форме отношения

$$(AB,CD)=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}.$$

Рассмотрим аналог такого выражения для матриц, суммируемых по системе сигнатур. Пусть выполняются условия

$$AC+BD=BC+AD,$$
$$AC=A+C, BD=B+D, BC=B+C, AD=A+D.$$

Они означают, что проверяется условие

$$A+C+B+D=B+C+A+D.$$

Его выполнение очевидно в силу определения сигнатур. Оно имеет также геометрический образ. Рассмотрим 4 точки евклидовой прямой:

...−	A	−	−	B	−	−	C	−	−	D	−...

.

Для евклидовых расстояний будет выполняться условие

$$AC+BD=BC+AD.$$

Мы исследуем совсем другой вариант: между собой сравниваются матрицы, анализируемые по их сигнатурам. Между ними есть система отношений, аналогичная системе точек в проективном пространстве.

Возможен другой выбор «расстояний» для пары матриц. Пусть, например, применяются условия

$$AC=C-A, BD=D-B, BC=C-B, AD=D-A.$$

Тогда

$$AC+BD=C-A+D-B=BC+AD=C-B+D-A.$$

В проективном пространстве на сигнатурной операции нет однозначности в выборе «расстояний» между точками.

Представляя матрицы векторами в пространстве, размерность которого равна размерности матриц, мы замечаем «странные» равенства между ними, которые не согласуются с «видимой» их геометрией. Мы имеем дело с новым пространством, своеобразно учитывающим внутренние свойства объектов вместо их внешних образов.

Операционная инвариантность группы автоморфизмов

Проанализируем изменение группы автоморфизмов корневых векторов группы G_2 при изменении операций, которым подчинены ее элементы.

Система матриц замкнута относительно сигнатурной операции. Таков первичный механизм ее генерации.

Простой анализ матричных произведений показал, что *система замкнута относительно матричного произведения*. Произведения 9 матриц на себя имеют неоднородное распределение. Генерируется по 15 матриц «электрического типа» (идеалов) и по 6 матриц «гравитационного» типа.

Система матриц замкнута относительно комбинаторного произведения строка на строку.

Система частично инвариантна относительно логических произведений. Они задаются на основе объединения элементов в «родственные» множества, сумма значимых элементов которых заполняет все матричное пространство. Получим три модели логических произведений:

$$1 \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline aa \to a & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, a \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$2 \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \alpha\alpha \to \beta & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}, \alpha \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$3 \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \beta\beta \to \alpha & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \beta \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Согласно первой модели произведения идеалов соответствуют логическому произведению, сконструированному по структуре этих матриц. Матричные произведения и структура матриц самосогласованы. Таков первый тип логических произведений.

Согласно второй модели произведения одного блока матриц на основе логического произведения, ассоциированного и их структурой, задают таблицу генерации элементов второго блока. Для второго блока ситуация аналогична. Таков второй тип логических произведений.

Данная группа автоморфизмов замкнута относительно сигнатурного, матричного, комбинаторного, логического произведений. С физической точки зрения так выражается устойчивость системы объектов по отношению к системе взаимодействий. Взаимодействия могут быть разные и в разных сочетаниях. Однако система «выдерживает» их, элементы сохраняют свой тип, свою структуру. Физические объекты с такими свойствами кажутся предпочтительными перед другими с точки зрения их устойчивости к деформациям, они «выживают» в разных условиях.

Какой системе логических операций подчинены матрицы на сигнатурной операции? Рассмотрим модель сигнатур вида

$$\begin{array}{c}(000)\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array},\ \begin{array}{c}(1-10)\\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array},\ \begin{array}{c}(-110)\\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array},\ \begin{array}{c}(10-1)\\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array},\ \begin{array}{c}(-101)\\ \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array},$$

$$\begin{array}{c}(01-1)\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array},\ \begin{array}{c}(0-11)\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array},\ \begin{array}{c}(-1-1-1)\\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array},\ \begin{array}{c}(111)\\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

На сигнатурной операции справедливы логические произведения одного типа. Получим

$aa \to a$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

,

$\alpha\alpha \to \beta$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

,

$\beta\beta \to \alpha$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

.

Они индуцированы элементами

$$\alpha \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Матричное и сигнатурное произведения генерируют систему матриц β. Комбинаторные произведения строк на строки и строк на столбцы они генерируют идеалы a.

Логическое произведение «передало управление» множеством системе матриц, которую не принято считать и называть главной системой матриц. Однако она естественно выступает генератором всего множества при подчинении элементов системе операций.

В силу указанных обстоятельств логическую операцию можно рассматривать как элемент конструирования новых объектов по аналогии со структурой доступных, известных объектов. Объекты формируют таблицу произведений. Если она не замкнута на элементы, которые ее «породили», такую таблицу следует заполнить на основе системы новых операций, применяемых к исходным объектам. Фактически речь идет об алгоритме преобразования известных объектов в систему новых объектов.

Мы замечаем, что если ограничиться матричными и комбинаторными произведениями строк на строки, получим совокупность матриц, замкнутую по этим произведениям.

У системы операций есть свойства генерирования новых объектов из совокупности исходных объектов. Так было всегда и везде. По этой причине актуальна задача конструирования полных систем уравнений, необходимых и достаточных для конструктивного решения практических задач.

Иначе действует логическая операция при выборе опорного элемента в форме единичной матрицы.

Тогда получим модель

$\alpha\alpha \to a$	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

,

$\beta\beta \to \beta$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

,

$aa \to \alpha$	1	2	3
1	1	2	3
2	1	2	3
3	1	2	3

.

Рассмотрим опорный объект из оставшегося класса. Получим набор матриц с сигнатурами

$$\begin{array}{c}(000)\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{c}(111)\\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{c}(-1-1-1)\\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array},$$

$$\begin{array}{c}(01-1)\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{c}(1-10)\\ \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{c}(-101)\\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array},$$

$$\begin{array}{c}(0-11)\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{c}(10-1)\\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{c}(-110)\\ \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

Эта система матриц подчиняется логическим операциям

$\alpha\alpha \to \alpha$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

,

$\beta\beta \to a$	1	2	3
1	1	2	3
2	1	2	3
3	1	2	3

,

$aa \to \beta$	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

.

При выборе опорных элементов из разных блоков матриц на одном и том же наборе сигнатур мы получаем один набор матриц. Однако их свойства различны с точки зрения логических операций. Есть три варианта применения этих операций, указанные выше.

Всегда есть одна логическая операция, согласно которой структура матриц согласована со структурой их произведения.

Естественно ожидать, что при изменении операций соотношение произведений и логических операций будет более сложным.

Матрицы на сигнатурной операции, согласно физическому подходу, ассоциированы со структурой физических объектов. Однако новые данные свидетельствуют о наличии элементов Сознания и Чувств у каждого физического объекта. На данной стадии анализа они так или иначе связаны с системой операций. Мы вправе рассматривать, и даже обязаны это делать, все варианты согласования структур и системы операций.

Геометрические аспекты Сознаний и Чувств

Указанное объединение слов кажется нелогичным. Геометрия исследует симметрии и некоторые их «шевеления». Оба эти аспекта геометрии имеют прямую и косвенную связь с моделями Сознаний и Чувств, выражаемыми октонионами. Есть физические тела, у них есть система свойств, часть из которых не исследована и пока недоступна нам. Задача состоит в том, чтобы раскрыть полную картину отношений и свойств. Мы знаем, что скрученная деформация физических моделей ассоциирована с октонионами. Покажем связь группы автоморфизмов октонионов со структурой куба в его сигнатурном представлении.

Рассмотрим модель евклидова куба с единичными размерами по осям координат. Расположим куб в четвертый квадрант системы координат. Получим координаты 8 вершин куба:

$$(000),(100),(101),(001),(0-10),(1-10),(1-11),(0-11).$$

Сопоставим им матрицы согласно указанным координатам, рассматривая координаты в качестве структурных сигнатур, применяя в качестве опорной матрицы единичную матрицу. Получим систему матриц:

(000)	100	101	001	$0-10$	$1-10$	$1-11$	$0-11$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Аналогично получим на этой основе другие матрицы:

(000)	100	101	001	$0-10$	$1-10$	$1-11$	$0-11$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,

(000)	100	101	001	$0-10$	$1-10$	$1-11$	$0-11$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,

(000)	100	101	001	$0-10$	$1-10$	$1-11$	$0-11$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$,

$$\begin{array}{|c|}\hline (000) \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 100 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 101 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 001 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0-10 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1-10 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1-11 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0-11 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (000) \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 100 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 101 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 001 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0-10 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1-10 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1-11 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0-11 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (000) \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 100 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 101 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 001 \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0-10 \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1-10 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1-11 \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0-11 \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}.$$

Таков *первый алгоритм* генерирования системы матриц: по матрицам первого набора конструируются другие системы матриц.

Применим *другой алгоритм*. Выполним перемещения единичного куба по квадрантам, образованным осями координат. На основании координат соответствующих вершин куба получим 8 систем матриц. Первые 4 системы матриц таковы:

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 1&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 1&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 1&1&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&1&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} -1&1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} -1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&1&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} -1&1&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} -1&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} -1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} -1&-1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&-1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} -1&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} -1&-1&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&-1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 1&-1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&-1&0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0&-1&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 1&0&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 1&-1&1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}.$$

Вершины единичного куба, расположенные ниже рассмотренных вершин, имеют координаты, отличающиеся только знаком минус у координаты z. По этой причине новые матрицы легко рассчитать. Они имеют вид

$$\begin{array}{|c|}\hline (0\ \ 0\ \ 0)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (0\ \ 0\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (1\ \ 0\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (1\ \ 1\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (0\ \ 1\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (-1\ \ 1\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-1\ \ 0\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-1\ \ -1\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (0\ \ -1\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (1\ \ -1\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array}.$$

Пара указанных алгоритмов независимо генерирует два одинаковых набора матриц.

Первый набор есть сигнатурная форма группы автоморфизмов октонионов, иллюстрирующая их связь с сигнатурной формой описания вершин единичного куба:

$$\begin{array}{|c|}\hline (000)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (111)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-1-1-1)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (01-1)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (0-11)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-101)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (10-1)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-110)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (1-10)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array}.$$

Другой набор матриц задает *скрытые свойства* симметрии куба:

$$\begin{array}{|c|}\hline (0\ \ 0\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (0\ \ 0\ \ 1)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (0\ \ 1\ \ 0)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (0\ \ -1\ \ 0)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (0\ \ -1\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (0\ \ 1\ \ 1)\\\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (1\ \ 1\ \ 0)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (1\ \ -1\ \ 1)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (1\ \ 1\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (1\ \ -1\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (1\ \ 0\ \ 1)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (1\ \ 0\ \ 0)\\\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (-1\ \ -1\ \ 0)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-1\ \ 1\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-1\ \ -1\ \ 1)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-1\ \ 1\ \ 1)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-1\ \ 0\ \ -1)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline (-1\ \ 0\ \ 0)\\\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array}.$$

Этот набор не замкнут относительно суммирования сигнатур.

Оба набора имеют общее свойство. В них одна система матриц компенсируется «внутренне», самостоятельно по набору сигнатур, Две других системы матриц компенсируются по сигнатурам взаимно.

Физика конечных геометрий

Примем новый вариант конструирования геометрий, соединяя структуру геометрии с количеством неэквивалентных базовых элементов. Ими являются, например, точки, отрезки линий, части плоских объектов, формируя, соответственно, геометрии с физической размерностью 1,2,3. Дополнительно можно применять объекты в форме «гор», «узлов», «дырок» и других объектов.

По этой причине меняются полиномиальные формулы, посредством которых задаются физические геометрии.

Проиллюстрируем сделанные предложения конкретными примерами. Размерности 1 соответствует выбор одного из базовых элементов с дополнением его математическими средствами для относительного или полного описания.

Размерности 2 ставится в соответствие пара физически различных элементов. Например, пусть это будут точки (точечные объекты) и прямые (физические нити). Разные количества n этих базовых элементов удобно задавать полиномиальными выражениями. Есть варианты физических изделий вида

$$\begin{cases} P = n^2, \\ Q = n^2 + n, \end{cases} \begin{cases} P = n^2 + n + 1, \\ Q = n^2 + n + 1, \end{cases} \begin{cases} P = n^2 + n + 2, \\ Q = 2(P+1)... \end{cases}$$

Выражение для величины P указывает количество элементов, рассматриваемых в качестве исходных базовых элементов. Например, это могут быть точки. Выражение для величины Q указывает количество других элементов, согласованных с базовыми элементами.

Например, мы желаем рассмотреть систему из 4 точек, соединенных 6 линиями. Получим стандартный вариант модели, относящейся к аффинной геометрии. Модель

$$\begin{cases} P = n^2, \\ Q = n^2 + n - r \end{cases}$$

задает физические изделия с количеством нитей, уменьшенных на число r. Аналогично можно «деформировать» модель проективной геометрии

$$\begin{cases} P = n^2 + n - p, \\ Q = n^2 + n - r. \end{cases}$$

Так формируется класс физических изделий, ассоциированных с моделью стандартной геометрии. Дополнение таких моделей новыми физическими элементами выглядит естественно. Более того, никак не исключается самостоятельное рассмотрение отдельных «деталей» геометрии. Поскольку они могут быть по-разному расположены в физическом изделии, допускается класс обобщенных моделей физических изделий. Понятно, что изменение структуры изделий будет согласовано с изменением их статических и динамических свойств. Такие изменения могут быть частично или полностью исследованы математическими методами. Однако существенно более важно выполнить реальное физическое исследование разных изделий, получить законы их поведения. Тогда появляется базис для конструирования математических моделей динамики физических изделий с разной структурой.

Скорее всего, в задачах такого типа будут объединены все аспекты математики: алгебра, геометрия, топология.

Группа с логическими операциями

Обычно в теории групп бинарная операция рассматривается безотносительно к некоторой логике, если саму операцию не рассматривать как форму такой операции. Применение сигнатурной операции в качестве бинарной операции предполагает внесение элементов внутренней логики в расчетную модель. Так происходит потому, что исследуемые объекты имеют дополнительные свойства. ассоциированные со структурой опорного, управляющего элемента модели. От него зависит реализация бинарной операции.

Обобщим сигнатурную операцию. Примем вариант разложения матрицы по сигнатурным слагаемым с последующим их сигнатурным произведением.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть сигнатурное разложение задается матрицами

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ \hline \end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}.$$

Выполним сигнатурное произведение матриц общего вида. Получим модель

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\overset{st}{\times}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a_{12} & 0\\ 0 & 0 & a_{23}\\ a_{31} & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & a_{13}\\ a_{21} & 0 & 0\\ 0 & a_{32} & 0\end{pmatrix}\right\}\overset{st}{\times}$$

$$\overset{st}{\times}\left\{\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & 0\\ 0 & 0 & b_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & b_{12} & 0\\ 0 & 0 & b_{23}\\ b_{31} & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & b_{11}\\ b_{11} & 0 & 0\\ 0 & b_{11} & 0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22}b_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33}b_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a_{11}b_{12} & 0\\ 0 & 0 & a_{23}b_{23}\\ a_{31}b_{33} & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & a_{11}b_{13}\\ a_{22}b_{21} & 0 & 0\\ 0 & a_{32}b_{32} & 0\end{pmatrix}+$$

$$=\begin{pmatrix}0 & a_{12}b_{11} & 0\\ 0 & 0 & a_{23}b_{22}\\ a_{31}b_{33} & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & a_{12}b_{12}\\ a_{23}b_{23} & 0 & 0\\ 0 & a_{31}b_{31} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{12}b_{13} & 0 & 0\\ 0 & a_{23}b_{21} & 0\\ 0 & 0 & a_{31}b_{32}\end{pmatrix}+$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & a_{13}b_{11}\\ a_{21}b_{22} & 0 & 0\\ 0 & a_{32}b_{33} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{13}b_{12} & 0 & 0\\ 0 & a_{21}b_{23} & 0\\ 0 & 0 & a_{32}b_{31}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a_{13}b_{13} & 0\\ 0 & 0 & a_{21}b_{21}\\ a_{32}b_{32} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\overset{st}{\times}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{13}+a_{13}b_{12} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{13}b_{13} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{11}\\ a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{23} & a_{21}b_{23}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{21} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{22}\\ a_{31}b_{33}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{33}+a_{31}b_{31} & a_{31}b_{32}+a_{32}b_{31}+a_{33}b_{33}\end{pmatrix}.$$

Произведение ассоциативно.

Например, получим

$$
\begin{aligned}
&\left(a_{21}b_{23}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{21}\right)c_{21}+\left(a_{21}b_{21}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{22}\right)c_{23}+\left(a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{23}\right)c_{22}=\\
&=a_{21}\left(b_{21}c_{23}+b_{22}c_{22}+b_{23}c_{21}\right)+a_{23}\left(b_{21}c_{21}+b_{22}c_{23}+b_{23}c_{22}\right)+a_{22}\left(b_{21}c_{22}+b_{22}c_{21}+b_{23}c_{23}\right).
\end{aligned}
$$

Запишем равенство в другой форме, иллюстрирующей его матричные соответствия:

$$
\begin{array}{|l|c|l|}
\hline
a_{21}b_{23}c_{21}+a_{22}b_{22}c_{21}+a_{23}b_{21}c_{21}+ & & a_{21}b_{21}c_{23}+a_{21}b_{22}c_{22}+a_{21}b_{23}c_{21}+\\
+a_{21}b_{21}c_{23}+a_{22}b_{23}c_{23}+a_{23}b_{22}c_{23}+ & = & +a_{23}b_{21}c_{21}+a_{23}b_{22}c_{23}+a_{23}b_{23}c_{22}+\\
+a_{21}b_{22}c_{22}+a_{22}b_{21}c_{22}+a_{23}b_{23}c_{22} & & +a_{22}b_{21}c_{22}+a_{22}b_{22}c_{21}+a_{22}b_{23}c_{23}\\
\hline
\end{array},
$$

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} & \leftrightarrow & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\
\hline
\end{array}.
$$

Рассмотрим другой пример. Пусть сигнатурное разложение задается матрицами

$$
\begin{array}{|c|}
\hline
\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}\\
\hline
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\
\hline
\end{array},
\begin{array}{|c|}
\hline
\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\\
\hline
\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
\hline
\end{array},
\begin{array}{|c|}
\hline
\begin{pmatrix}2&2&2\end{pmatrix}\\
\hline
\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\
\hline
\end{array}.
$$

Выполним в этом варианте сигнатурное произведение матриц общего вида. Получим модель

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\overset{st}{\times}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\0&0&a_{23}\\0&a_{32}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&a_{12}&0\\a_{21}&0&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&a_{13}\\0&a_{22}&0\\a_{31}&0&0\end{pmatrix}\right\}\overset{st}{\times}\\
&\overset{st}{\times}\left\{\begin{pmatrix}b_{11}&0&0\\0&0&b_{23}\\0&b_{32}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b_{12}&0\\b_{21}&0&0\\0&0&b_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&b_{13}\\0&b_{22}&0\\b_{31}&0&0\end{pmatrix}\right\}=\\
&=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}&0&0\\0&0&a_{23}b_{23}\\0&a_{32}b_{32}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&a_{11}b_{12}&0\\a_{23}b_{21}&0&0\\0&0&a_{32}b_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&a_{11}b_{13}\\0&a_{23}b_{22}&0\\a_{32}b_{31}&0&0\end{pmatrix}+\\
&+\begin{pmatrix}0&a_{12}b_{11}&0\\a_{21}b_{23}&0&0\\0&0&a_{33}b_{32}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&a_{12}b_{12}\\0&a_{21}b_{21}&0\\a_{33}b_{33}&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{12}b_{13}&0&0\\0&0&a_{21}b_{22}\\0&a_{33}b_{31}&0\end{pmatrix}+\\
&+\begin{pmatrix}0&0&a_{13}b_{11}\\0&a_{22}b_{23}&0\\a_{31}b_{32}&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{13}b_{12}&0&0\\0&0&a_{22}b_{21}\\0&a_{31}b_{33}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&a_{13}b_{13}&0\\a_{22}b_{22}&0&0\\0&0&a_{31}b_{31}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \overset{st}{\times} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{13}+a_{13}b_{12} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{13}b_{13} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{11} \\ a_{21}b_{23}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{21} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{22} & a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{23} \\ a_{31}b_{32}+a_{32}b_{31}+a_{33}b_{33} & a_{31}b_{33}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{33}+a_{33}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Из анализа этого произведения следует, что рассматриваемое произведение ассоциативно. Например, получим

$$\begin{aligned} & a_{11}\left(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{13}+b_{13}c_{12}\right)+a_{12}\left(b_{11}c_{13}+b_{12}c_{12}+b_{13}c_{11}\right)+a_{13}\left(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{11}+b_{13}c_{13}\right)= \\ & =\left(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{13}+a_{13}b_{12}\right)c_{11}+\left(a_{11}b_{13}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{11}\right)c_{12}+\left(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{13}b_{13}\right)c_{13}. \end{aligned}$$

Есть другая форма записи, иллюстрирующая матричные соответствия:

$$\begin{array}{|l|c|l|} \hline a_{11}b_{11}c_{11}+a_{11}b_{12}c_{13}+a_{11}b_{13}c_{12}+ & & a_{11}b_{11}c_{11}+a_{12}b_{13}c_{11}+a_{13}b_{12}c_{11}+ \\ +a_{12}b_{11}c_{13}+a_{12}b_{12}c_{12}+a_{12}b_{13}c_{11}+ & = & a_{11}b_{13}c_{12}+a_{12}b_{12}c_{12}+a_{13}b_{11}c_{12}+ \\ +a_{13}b_{11}c_{12}+a_{13}b_{12}c_{11}+a_{13}b_{13}c_{13} & & a_{11}b_{12}c_{13}+a_{12}b_{11}c_{13}+a_{13}b_{13}c_{13} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}.$$

Произведения трех матриц, рассматриваемое в прямом и обратном порядке одно и то же. Однако различны их матричные выражения. Это обстоятельство можно рассматривать как «подсказку». Тройка объектов, взаимодействующая в прямом и обратном порядке, может иметь одни и те же «внешние» проявления, за которыми скрыто различие «внутренних» структур данной совокупности объектов.

Рассмотрим произведение матриц размерности 4 на сигнатурной операции, ассоциированной с четверной группой Клейна.

Исходным пунктом анализа становится совокупность матриц с моделью сигнатур и законом их произведения:

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline 0\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline 1\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline 2\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline 3\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

.

Произведение пары матриц имеет такую структуру:

$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{14}+a_{13}b_{13}+a_{14}b_{12}$	$a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{13}b_{14}+a_{14}b_{13}$	$a_{11}b_{13}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{11}+a_{14}b_{14}$	$a_{11}b_{14}+a_{12}b_{13}+a_{13}b_{12}+a_{14}b_{11}$
$a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{24}+a_{24}b_{23}$	$a_{21}b_{23}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{21}+a_{24}b_{24}$	$a_{21}b_{24}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{22}+a_{24}b_{21}$	$a_{21}b_{21}+a_{22}b_{24}+a_{23}b_{23}+a_{24}b_{22}$
$a_{31}b_{33}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{34}$	$a_{31}b_{34}+a_{32}b_{33}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{31}$	$a_{31}b_{31}+a_{32}b_{34}+a_{33}b_{33}+a_{34}b_{32}$	$a_{31}b_{32}+a_{32}b_{31}+a_{33}b_{34}+a_{34}b_{33}$
$a_{41}b_{44}+a_{42}b_{43}+a_{43}b_{42}+a_{44}b_{41}$	$a_{41}b_{41}+a_{42}b_{44}+a_{43}b_{43}+a_{44}b_{42}$	$a_{41}b_{42}+a_{42}b_{41}+a_{43}b_{44}+a_{44}b_{43}$	$a_{41}b_{43}+a_{42}b_{42}+a_{43}b_{41}+a_{44}b_{44}$

.

Аспекты ассоциативности проиллюстрируем по этой таблице одним примером:

$$\begin{array}{|l|c|l|}\hline
\begin{aligned}&a_{31}b_{33}c_{34}+a_{32}b_{32}c_{34}+a_{33}b_{31}c_{34}+a_{34}b_{34}c_{34}+\\&+a_{31}b_{34}c_{33}+a_{32}b_{33}c_{33}+a_{33}b_{32}c_{33}+a_{34}b_{31}c_{33}+\\&+a_{31}b_{31}c_{32}+a_{32}b_{34}c_{32}+a_{33}b_{33}c_{32}+a_{34}b_{32}c_{32}+\\&+a_{31}b_{32}c_{31}+a_{32}b_{31}c_{31}+a_{33}b_{34}c_{31}+a_{34}b_{33}c_{31}\end{aligned} & = & \begin{aligned}&a_{31}b_{31}c_{32}+a_{31}b_{32}c_{31}+a_{31}b_{33}c_{34}+a_{31}b_{34}c_{33}+\\&+a_{32}b_{31}c_{31}+a_{32}b_{32}c_{34}+a_{32}b_{33}c_{33}+a_{32}b_{34}c_{32}+\\&+a_{33}b_{31}c_{34}+a_{33}b_{32}c_{33}+a_{33}b_{33}c_{32}+a_{33}b_{34}c_{31}+\\&+a_{34}b_{31}c_{33}+a_{34}b_{32}c_{32}+a_{34}b_{33}c_{31}+a_{34}b_{34}c_{34}\end{aligned}\\\hline\end{array}.$$

С ним ассоциирована пара систем матриц:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline
\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix} & \leftrightarrow & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\\hline\end{array}.$$

Ассоциативность на сигнатурной операции косвенно иллюстрирует единство мономиальных и немономиальных матриц. С физической точки зрения такой модели соответствует единство гравитации и электромагнетизма. Более того, как было указано ранее, одна тройка объектов может генерировать электромагнетизм, но может она же генерировать и гравитацию. Результат зависит от того, в каком порядке происходит взаимодействие. То, что результаты «неразличимы», может быть свидетельством достижения того уровня исследования, на котором эти два физических «поля» имеют «одно» лицо.

Анализируемые ситуации относились к такой выборке элементов матриц, при которой матрицы с разными сигнатурами изоморфны циклическим группам.

Что произойдет, если такая выборка реализуется «насильственно», когда распределение элементов и таблица произведения «формальных» сигнатур не ассоциирована с циклическими группами. Поскольку циклические группы и циклические условия мы относили к разряду равновесных, получим ли мы «неравновесные» состояния и процессы, формально меняя сигнатурное произведение?

Есть ли на таком пути средства для управления «неравновесностью»? Какими математическими средствами описывается трансформация «неравновесных» состояний в равновесные состояния? Не является ли неассоциативность «свидетельством» неравновесности?

Для частичного прояснения данной совокупности вопросов рассмотрим формальное заполнение матриц размерности 3. Зададим произвольным образом таблицу произведения сигнатур для таких матриц. Достаточно очевидно, что так получится некоторая «каша». Однако сам по себе такой алгоритм имеет смысл. В частности, так можно анализировать переходные процессы, когда реализуются изменения, соответствующие переходу систем от одного типа сигнатур к другому типу сигнатур.

Рассмотрим новую модель, приняв матрицы вида

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

и таблицу сигнатурных произведений

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

.

Получим разложения матриц общего вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{33} & 0 \end{pmatrix}.$$

Результат произведения матриц выглядит так:

$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{13}+a_{13}b_{12}$	$a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{13}b_{13}$	$a_{11}b_{13}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{11}$
$a_{21}b_{21}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{22}$	$a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{23}$	$a_{21}b_{23}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{21}$
$a_{31}b_{33}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{31}$	$a_{31}b_{31}+a_{32}b_{33}+a_{33}b_{32}$	$a_{31}b_{32}+a_{32}b_{31}+a_{33}b_{33}$

.

Произведение ассоциативно. В частном случае для одной «компоненты» получим равенство

$a_{21}b_{21}c_{21}+a_{22}b_{23}c_{21}+a_{23}b_{22}c_{21}+$ $+a_{21}b_{22}c_{23}+a_{22}b_{21}c_{23}+a_{23}b_{23}c_{23}+$ $+a_{21}b_{23}c_{22}+a_{22}b_{22}c_{22}+a_{23}b_{21}c_{22}$	$=$	$a_{21}b_{21}c_{21}+a_{21}b_{22}c_{23}+a_{21}b_{23}c_{22}+$ $+a_{22}b_{21}c_{23}+a_{22}b_{22}c_{22}+a_{22}b_{23}c_{21}+$ $+a_{23}b_{21}c_{22}+a_{23}b_{22}c_{21}+a_{23}b_{23}c_{23}$

с матричной иллюстрацией

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проективная геометрия отношений

Проективная геометрия исследует свойства и приложения конечной системы точек, соединенных системой линий. Речь идет о модели конечной геометрии, характеризующейся системой постулатов. Конечное пространство проективной геометрии над полем вычетов по модулю p построил итальянец Фано в 1892 году. Поле вычетов, проанализированное им, имело набор из 7 точек в проективной геометрии размерности 2 и 13 точек в проективной геометрии размерности 3. Рассматриваемые поля являются частными случаями конечного поля, которое, согласно теореме Элиахима Мура, доказанной в 1893 году, есть поля Галуа. В 1905 году Джозеф Веддербёрн доказал, что любое конечное тело является полем.

Поля Галуа конструируются согласно его идее расширения известных полей на основе анализа неприводимых многочленов, имеющих порядок, равный степени анализируемого простого числа. Так, простому числу 2 ставятся в соответствие числа 0,1 с таблицей суммирования по модулю 2 и обычному произведения чисел:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

,

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

.

Метод исследования, базирующийся на применении конечных полей такого типа, имеет истоки в работах Гаусса. Известно, что все конечные поля имеют порядок (количество базовых элементов) p^k. Простому числу 3 ставится в соответствие три числа 0,1,2 с таблицей суммирования и произведения по модулю 3:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

,

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

.

Конечное поле порядка 2^2 конструируется на основе многочлена, неприводимого над полем $F_2(0,1)$ вида

$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

Для него выполняются условия: $f(0) \neq 0, f(1) \neq 0$. Следуя идее Галуа, вводим воображаемый корень многочлена, требуя, чтобы

$$f(i) = i^2 + i + 1 = 0.$$

Отсюда следует выражение для квадрата воображаемого корня с учетом того факта, что в поле F_2 положительная единица равна единице с минусом. Поэтому

$$i^2 = i + 1.$$

Базовые числа поля F_{2^2} имеют вид

$$D = a + bi.$$

Числа a, b берутся из поля $F_2 \to 0,1$. Получим 4 элемента:

$$D_0 = 0 + 0i = 0, D_1 = 1 + 0i = 1, D_2 = 0 + 1i = i, D_3 = 1 + 1i = i + 1.$$

Согласно указанным условиям, на множестве D вводятся операции сложения и умножения. Получим

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i,$$
$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2) i.$$

Аналогичные действия применяются при построении других конечных полей.

Аксиоматическое определение поля дано в 1910 году Эрнстом Стейницем.

О.Веблен, Н.Г. Басси в 1906 году предложили общий метод построения проективных геометрий размерности больше 2. Их отличительной чертой является рассмотрение равного числа «точек» P и «прямых» Q, задаваемое формулой

$$\Delta_n = P = Q = n^2 + n + 1.$$

Здесь число n есть размерность проективного пространства. Взятые в кавычки слова свидетельствуют о том, что у этих объектов нет аналогии с привычными для практики понятиями и образами непрерывной евклидовой геометрии.

К разряду простейших проективных пространств относят пространства размерности 2 и 3. Для них, соответственно, получим

$$\Delta_2 = 7, \Delta_3 = 13.$$

Их впервые исследовал Фано. «Пирамида» с окружностью, которую он предложил в качестве модели проективной геометрии размерности 2 , приводится в большинстве учебников по проективной геометрии.

Приложений к физике эта модель не имела. Сравнительно недавно доказано, что при наделении «прямых» этой проективной плоскости ориентацией и при замене «точек» элементами базиса октониона «пирамида» Фано кодирует правила произведения этих элементов. Поскольку октонионы применяются в физике, мы получили косвенное подтверждение практической полезности проективной геометрии.

Алгебраический метод исследования проективных геометрий в 1943 году предложил М.Холл. Он развит Ширшовым А.И. и Никитиным А.А.

В стандартной проективной геометрии выполняется теорема Дезарга. С алгебраической точки зрения ей соответствует условие ассоциативности для элементов данной геометрии. Проективная геометрия с нарушением дезарговости впервые сконструирована Муфанг при рассмотрении элементов геометрии, не подчиненных групповым условиям. В настоящее время известны и исследованы многие типы таких геометрий. Известны 3 недезарговых плоскости порядка 9: трансляций, сдвигов, а также плоскости Хьюза.

Отдельное направление исследование ассоциировано с анализом групп коллинеаций: таких перестановок элементов, которые сохраняют инвариантность проективной геометрии. Его истоки можно найти в работах Андре 1955 года и Заппа 1957 года.

Конечные проективные плоскости активно анализировал Гонин Е.Г. и его ученики, особенно Васильков В.И.

Рассмотрим некоторые физические аспекты проективной геометрии размерности 2,3. Приблизим такие геометрии к физике.

На первом этапе укажем аналогию сложения и умножения по модулю простых чисел со стандартным произведением матриц.

Для проективной геометрии размерности 2 получим соответствия

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \times & 0\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & 1\to\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ \hline 0\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & 0 & 1\\ \hline 1\to\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & 1 & 0\\ \hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline +F_2 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 1 & 0\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline +F_2 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & 1\\ \hline\end{array} \leftarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline \times & 0\to\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & 1\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ \hline 0\to\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & 0 & 0\\ \hline 1\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & 0 & 1\\ \hline\end{array}.$$

Указанные матрицы могут иметь любую конечную размерность. Это обстоятельство обеспечивает нам возможность анализа реальных физических изделий, состоящих из 2,3,4 и более базовых объектов разной природы, подчиненных указанной в матрицах системе отношений. Сложение и умножение чисел по модулю свидетельствует о специфике предлагаемой модели: она не учитывает возможного различия свойств и поведения физических объектов, индуцированного изменением числа базовых объектов.

Для проективной геометрии размерности 3 получим соответствия

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \times_b & 0 & 1 & 2\\ \hline 0 & 0 & 1 & 2\\ \hline 1 & 1 & 2 & 0\\ \hline 2 & 2 & 0 & 1\\ \hline\end{array} : 0_b \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, 0_b \to \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, 0_b \to \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline +F_3 & 0 & 1 & 2\\ \hline 0 & 0 & 1 & 2\\ \hline 1 & 1 & 2 & 0\\ \hline 2 & 2 & 0 & 1\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \times_a & 0 & 1 & 2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & 1 & 2\\ \hline 2 & 0 & 2 & 1\\ \hline\end{array} : 0_a \to \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, 1_a \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, 2_a \to \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \times F_3 & 0 & 1 & 2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & 1 & 2\\ \hline 2 & 0 & 2 & 1\\ \hline\end{array}.$$

Сложению и умножению чисел по модулю 3 соответствует пара матричных произведений. Заметим, что в таблицах применяются разные наборы матриц.

Физический подход к проективной геометрии генерирует **первую фундаментальную гипотезой**: *физические объекты могут иметь разные свойства по сложению и умножению.*

Другими словами, есть два типа фундаментальных взаимодействий, в которых участвуют физические объекты. Один тип взаимодействия ассоциирован с математической операцией сложения. Другой тип взаимодействия ассоциирован с математической операцией умножения. Объект имеет возможность участвовать в каждом таком взаимодействии. В одном взаимодействии он «показывает» одни свои свойства. В другом взаимодействии он показывает другие свои свойства.

Физический подход к проективной геометрии генерирует **вторую фундаментальную гипотезу**: *объекты разных размеров и разной структуры могут иметь аналогичные свойства.*

Проективные геометрии размерности 2,3 одинаково описывают свойства структурно «малых» и структурно «больших» физических объектов, не связывая их с отношениями между базовыми объектами, из которых они сконструированы.

Сказанные общие слова, хотя они представляют интерес, не приближают нас к реальным задачам физического моделирования.

Расчетные физические модели имеют матричное представление. *Конструктивные связи проективной геометрии с физикой* могут получиться лишь тогда, когда будет найден алгоритм сопоставления данной проективной геометрии некоторой физически содержательной системы матриц.

Укажем алгоритм сопоставления с проективной геометрией системы матриц.

Примем определение обобщенной проективной плоскости.

Обобщенной проективной плоскостью называется множество «точек» P и множество «прямых» L, некоторые элементы которых связаны отношением инцидентности с тремя аксиомами:

а) для любых двух разных «точек» существует хотя бы одна инцидентная им «прямая»,

б) для любых двух разных «прямых» существует хотя бы одна инцидентная им «точка»,

в) существуют хотя бы 4 «точки», любые 3 «точки» из которых не инцидентны одной «прямой»,

г) некоторой «прямой» проективной плоскости могут быть инцидентны точно $n+1$ «точек».

Отличие предлагаемого обобщения состоит в расширении стандартной модели проективной геометрии новыми «линиями» и «точками», приняв за основу базовую модель, в которой требуется единственность инцидентности. По сути физического подхода это требование означает некий учет внутренних степеней свободы «точек» и «линий».

Следуя работам Василькова В. И., исследуем и обобщим модель проективной плоскости размерности 2.

Рассмотрим два множества:

а) множество $P=\{A,B,C,D,E,F,G\}$ «точек»,

б) множество $L=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ «прямых».

Примем условия инцидентности:

$$a=\{A,B,D\}, g=\{B,C,E\}, f=\{C,D,F\}, e=\{D,E,G\}, d=\{E,F,A\}, c=\{F,G,B\}, b=\{G,A,C\}.$$

Им соответствует таблица инцидентности:

L/P	A	B	C	D	E	F	G
a	*	*		*			
b	*		*				*
c		*				*	*
d	*				*	*	
e				*	*		*
f			*	*		*	
g		*	*		*		

.

На её основе легко доказать выполнение всех 4 аксиом конечной проективной геометрии.

Дополним 7 точек еще одной точкой H, учитывая тот факт, что одна точка проективной плоскости «удалена на бесконечность». Такой подход соответствует интуитивно понятной и реализуемой эмпирически модели проективной плоскости. Её 7 «точек» ассоциированы с вершинами куба. Они соединены линиями с началом координат, рассматриваемым в качестве восьмой «точки» этого куба.

Мы получаем модель пары квадратов, наложенных друг на друга согласно рис.5.

				$A,1,\alpha$				
		$H,4,\beta$			$\searrow$	$B,2,\beta$		
$G,3,\alpha$					$\nwarrow$	$\downarrow$		$C,3,\alpha$
		$F,2,\beta$				$D,4,\beta$		
				$E,1,\alpha$				

Рис.5. Система из 8 точек на евклидовой плоскости

Стрелками на этом рисунке указан первый вариант обобщенной инцидентности «точек» и «прямой». В нём отражено «замыкание» последней точки инцидентной системы на первую. Вариант имеет три отображения: графическое, морфологическое, матричное:

1	$\rightarrow$	2
$\uparrow$	$\swarrow$	
4		3

$$\Rightarrow \begin{matrix} AB(C)DA \\ 12(3)41 \\ \alpha\beta\beta\alpha \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2.$$

По этому алгоритму получим еще три соответствия аналогичного вида. Они генерируют матрицы

$$\begin{matrix} BC(D)EB \\ 23(4)12 \\ \beta\alpha\alpha\beta \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = f_2, \quad \begin{matrix} CD(E)FC \\ 34(1)23 \\ \alpha\beta\beta\alpha \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1, \quad \begin{matrix} DE(F)GD \\ 41(2)34 \\ \beta\alpha\alpha\beta \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = f_3.$$

Получены 4 матрицы группы перестановок.

Первый вариант замыкания инцидентности может быть «прочитан» в обратном порядке. Получим модель

$$\begin{matrix} D(C)BAD \\ 4(3)214 \\ \beta\beta\alpha\beta \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = f_4.$$

Эти матрицы принадлежат смежному классу четверной группы Клейна. Мы рассматриваем в данном случае не просто перестановки, а систему замкнутых и по-разному ориентированных отношений между объектами. В рассматриваемом варианте пара «пренебрегает» соседом, но инцидентна с последующим объектом. В обратном «прочтении» объект «пренебрегает» соседом и имеет отношения с последующей парой. Фактически, мы изменили в проективной геометрии концепцию «прямой», заменив её циклами с ориентацией и номерами объектов. Номера объектов формально описывают их иерархию: одни объекты имеют высокий статус, а другие объекты имеют низкий статус. Такие отношения известны в практике людей.

Однако рассматриваемые варианты имеет только частное значение. Есть другие возможности в анализируемой системе. По этой причине требуются обобщения конечных геометрий, необходимо расширение модели, достаточное для описания полной системы отношений между объектами, которые мы называем «точками». Место «прямых» проективной плоскости могут и должны занять сложные системы отношений между объектами, которые по форме и сути не могут быть выражены моделью условной линии. Более того, сами «точки» и «линии» могут быть подчинены согласованным динамическим уравнениям. Речь идет о необходимости, и, пожалуй, о потребности построения и анализа *динамической проективной геометрии*.

Выполним аналогичный расчет, двигаясь от точки A влево. Получим соответствия:

$$\begin{matrix} AH(G)FA \\ \alpha\beta\beta\alpha \\ 14(3)21 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} = f_4, \quad \begin{matrix} HG(F)EH \\ \beta\alpha\alpha\beta \\ 43(2)14 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} = e_4,$$

$$\begin{matrix} GF(E)DG \\ \alpha\beta\beta\alpha \\ 32(1)43 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} = f_1, \quad \begin{matrix} FE(D)CF \\ \beta\alpha\alpha\beta \\ 21(4)32 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} = e_3.$$

С моделью проективной геометрии ассоциирована система отношений между объектами. Она представлена «линиями» (связями»), а также «точками» (абстрактными образами объектов). Условие инцидентности, дополненное требованием её замыкания, достаточно для конструирования системы матриц. Так представлена *обобщенная инцидентность*.

Матричные произведения этой совокупности элементов генерируют четверную группу Клейна, образуя совместно с ней знакопеременную группу A_4.

Четверная группа Клейна в сочетании со знаковой группой генерирует пару кватернионов и тройку антикватернионов. Они достаточны для конструирования элементов матричной группы 4 порядка. На таких группах, в частности на кватернионах и антикватернионах моделируются все основные физические явления. В частности, таковы модели электромагнетизма и физическая модель гравитации. Следовательно, проективную геометрию можно трактовать как средство для получения фундаментальных элементов физической теории. По понятным причинам проективная модель недостаточна для полного моделирования. Однако её возможности расширяются, если обобщить концепцию и алгоритмы проективной геометрии. Заметим, что мы вправе теперь применять дополнительную, физическую интерпретацию проективной геометрии. Проективная геометрия выражает абстрактные, общие отношения между разными объектами. Проективная геометрия есть геометрия отношений для системы реальных объектов. На проективной плоскости возможны отношения, выходящие за пределы условия инцидентности. В первую очередь речь идет о системе аффинных отношений, когда «прямая» инцидентна паре «точек». Поскольку базовых точек 4, речь может идти о системе, в которой есть отношения одного типа. Тогда из рис.6

		1		
	4		2	
3				3
	2		4	
		1		

.

Рис.6. Карта для аффинных отношений

следует система «аффинных отношений». Получим четверную группу Клейна:

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline (1\leftrightarrow 1, 2\leftrightarrow 2...) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline (1\leftrightarrow 2, 3\leftrightarrow 4) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \\ \hline (1\leftrightarrow 3, 2\leftrightarrow 4) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \\ \hline (4\leftrightarrow 1, 2\leftrightarrow 3) \\ \hline \end{array}.$$

Проективная геометрия порядка 2, допуская аффинную геометрию, *дублирует генерацию* четверной группы Клейна. Алгоритм дублирования имеет место в разных разделах математики и техники. Он установлен теперь в проективной геометрии.

Возможны «аффинные отношения» второго типа: когда в системе из 4 «точек» отношения инцидентности имеют только 2 точки. Тогда отношения задаются матрицами

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline (1,2,3\leftrightarrow 4) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \\ \hline (1,3,2\leftrightarrow 4) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline (1,4,2\leftrightarrow 3) \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \\ \hline (2,3,1\leftrightarrow 4) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline (2,4,1\leftrightarrow 3) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline (3,4,1\leftrightarrow 2) \\ \hline \end{array}.$$

Кроме этого есть еще два типа аффинных отношений «точек» в проективной геометрии. Они задаются\ простыми и скрещенными циклами, утверждая инцидентность четырех точек. Назовем такой вариант обогащенной аффинной инцидентностью.

Конечно, все эти результаты можно рассматривать как анализ структуры подпространств отношений «точек» в проективном пространстве.

Инцидентность 4 точек в проективном пространстве задается структурами, которые имеют такие матричные представления:

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix} \\ \hline (1\to 2\to 3\to 4\to 1) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline (1\to 4\to 3\to 2\to 1) \\ \hline \end{array},$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$(1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1)$	$(1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1)$	$(1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1)$	$(1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1)$

Общие выводы таковы:

а) проективная геометрия порядка 2 ассоциирована с физической моделью пары одинаковых базовых систем, состоящих из 4 объектов, способных иметь систему отношений,

б) полная система отношений в совокупности базовых объектов задается группой перестановок S_4 этих объектов,

в) система внутренней инцидентности проективного пространства размерности 2 ассоциирована со смежным классом четверной группы Клейна.

Примем **третью фундаментальную гипотезу**: *группа отношений для проективного пространства есть группа перестановок системы базовых элементов*.

Тогда группа отношений для «точек» проективного пространства размерности 3 будет задаваться, по аналогии с предыдущим случаем, группой перестановок из 7 элементов. В этом случае, естественно, будут «богаче» аффинные и обогащенные аффинные инцидентности.

Заметим, что в развиваемом подходе не уделено внимание свойствам «точек», равно как и их влиянию на инцидентности. Так не может и не должно быть в реальных задачах. Однако до настоящего времени не было инструментов для решения задач такого типа. Наличие группы перестановок в качестве математического двигателя для проективной геометрии меняет ситуацию. Мы вправе учесть тот факт, что в реальном мире есть разные объекты. В проективной геометрии все «точки» как-бы одинаковы, равно как и «линии», которые им инцидентны. В реальности «точки» могут быть разными. В частности, они могут отличаться знаками. Тогда группа отношений будет выходить за пределы поля F_2, в котором $-1=1$. Фактически это условие означает отказ от учета знаков. При учете знаков группа перестановок расширяется до проективной группы с факторгруппой $Z_2=[-1,1]$. Мы получаем тогда возможность анализа системы «частиц» и «античастиц». Их связи, определяемые как инцидентности, тоже могут быть самыми разными.

На данной стадии ясно, что к первичным задачам теории конечных проективных геометрий относятся проблемы динамики системы инцидентностей при условии активного согласования «точек» и «линий».

Спектр носителей физических моделей

Физические модели всегда могут быть представлены элементами матричной алгебры. Они, в свою очередь, выводятся из системы матриц, заполняющей все элементы матрицы. В объединении со знаковой группой они дают носитель физических моделей.

Рассмотрим алгоритм конструирования носителей физических моделей. Применим для этого схему комбинаторного замещения одних элементов матриц другими элементами. Проиллюстрируем алгоритм на примере четверной группы Клейна. Выполним циклическую замену каждого элемента.

На первом шаге трансформации получим матрицы вида

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (1111)\\ \hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (0000)\\ \hline\end{array}:$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (1000)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (0100)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (0010)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0001)\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (1100)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (0110)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0011)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (1101)\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (1010)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0101)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (1110)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0111)\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (1111)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (1011)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (1001)\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (0000)\\ \hline\end{array}.$$

На втором шаге трансформации получим матрицы вида

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (1111)\\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (0000)\\\hline\end{array}:$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (1000)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (0100)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (0010)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (0001)\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (1100)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (0110)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (0011)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (1101)\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (1010)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (0101)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (1110)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (0111)\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (1111)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (1011)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline (1001)\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline (0000)\\\hline\end{array}.$$

На третьем шаге трансформации получим матрицы вида

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (1111) \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (0000) \\ \hline \end{array}:$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (1000) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (0100) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (0010) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (0001) \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (1100) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (0110) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (0011) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (1101) \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (1010) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (0101) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (1110) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (0111) \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (1111) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (1011) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (1001) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline (0000) \\ \hline \end{array}.$$

На четвертом шаге трансформации получим

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (1111)\\ \hline\end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0000)\\ \hline\end{array}:$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (1000)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0100)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0010)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (0001)\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (1100)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0110)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (0011)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (1101)\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (1010)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (0101)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (1110)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (0111)\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (1111)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (1011)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (1001)\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0000)\\ \hline\end{array}.$$

Исследуем свойства полученной совокупности матриц. 4 матрицы образовали множество, состоящее из 64 матриц. Их свойства не случайны.

Первое свойство состоит в том, что матрицы с одинаковой сигнатурой заполняют все пространство матрицы. Например, получим

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0110)\\ \hline\end{array}+\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (0110)\\ \hline\end{array}+\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (0110)\\ \hline\end{array}+\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (0110)\\ \hline\end{array}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, есть 16 наборов матриц, достаточных для конструирования элементов матричной алгебры при их соединении со знаковой группой. Применяя алгоритм моделирования, следующий из теории гравитации и электромагнетизма, мы получаем совокупность линейных моделей со сложным сочетанием производных и компонент величин. Поскольку каждый смежный класс генерирует такое же количество носителей физических моделей, их общее количество в четырехмерном пространстве равно $n=3\cdot 2^7$.

Второе свойство состоит в том, что они «наследуют» трансляционные свойства четверной группы Клейна. Принимая первую матрицу в качестве базовой матрицы, все остальные получаются перестановками единого вида, образуя цикл. По этой причине им можно приписать сигнатуры, превращая эту систему матриц в группу на сигнатурной операции. Её вид будет такой:

$$\sigma_1=\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline (0000)\\ \hline\end{array},\sigma_2=\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline (1-11-1)\\ \hline\end{array},\sigma_3=\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (2-22-2)\\ \hline\end{array},\sigma_4=\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline (-11-11)\\ \hline\end{array}.$$

Алгоритм взаимных трансформаций системы матриц, образующих носитель физических моделей генерирует наборы матриц в форме групп на сигнатурной операции. Набор сигнатур *наследуется* от начальной совокупности матриц. Если набор сигнатур рассматривать как аналог генетического кода, можно сказать, что все 16 наборов матриц «родственны» друг другу.

При такой интерпретации группа перестановок является носителем 3 типов генетических кодов, каждый из которых продублирован. Пары, имеющие одинаковый «генетический код», таковы

$$(A,B),(C,E),(D,F).$$

Третье свойство состоит в том, что каждый носитель физических моделей на основе комбинаторной операции строка на строку генерирует единый *индуцированный носитель*:

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\delta=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Например, этот результат следует из модели комбинаторного произведения анализируемых матриц:

$$\sigma_1 \overset{k}{\times} \sigma_j \left(j=1,2,3,4 \right) \Rightarrow \begin{array}{|cccc|cccc|cccc|cccc|} \hline 1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ \hline 1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\ \hline \end{array}.$$

Индуцированный носитель замкнут относительно данного комбинаторного произведения.

Набор носителей есть аналог совокупности смежных классов. Роль аналога нормальной подгруппы выполняет индуцированный носитель.

Произведения в смежных классах генерируют элементы «нормальной подгруппы». Произведения элементов смежного класса на элементы индуцированного носителя «перемешивают» элементы «смежного класса».

«Смежный класс» получается при комбинаторном произведении одно его элемента на элементы индуцированного носителя. Ранее рассматривался вариант выбора матрицы с первым значимым элементом в первой строке. Следуя ему, укажем конкретную реализацию:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|cccc|cccc|cccc|cccc|} \hline 1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ \hline 1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ \hline \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Комбинаторное произведение неассоциативно. Так, например, получим

$$\left(\sigma_1 \overset{k}{\times} \sigma_2 \right) \overset{k}{\times} \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \overset{k}{\times} \left(\sigma_2 \overset{k}{\times} \sigma_3 \right).$$

В силу указанных обстоятельств дополнение множества носителей индуцированным носителем формирует замкнутое неассоциативное множество на комбинаторной операции. Оно содержит правую единицу, роль которой играет матрица, в которой значимые элементы, равные единице, расположены в первом столбце. Каждая матрица обратна себе по комбинаторному произведению.

Четвертое свойство состоит в том, что *логическое произведение*, индуцированное четверной группой Клейна, генерирует на элементах индуцированного носителя элементы смежного класса B группы перестановок.

Этот смежный класс состоит из 4 элементов:

$$b_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},b_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Таблица логических произведений по группе Клейна элементов индуцированного носителя такова:

$\overset{l}{\times}$	α	β	γ	δ
α	b_1	b_2	b_3	b_4
β	b_2	b_3	b_4	b_1
γ	b_3	b_4	b_1	b_2
δ	b_4	b_1	b_2	b_3

Она совпадает с таблицей логических произведений и отличается от таблицы матричных произведений для элементов четверной группы Клейна:

$\overset{l}{\times}$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

,

$\overset{m}{\times}$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

.

Её элементы, номера которых соответствуют месту значимого элемента в первой строке, замкнуты по «своей» логической операции. Это свойство фундаментально. По этой причине известные свойства операционной замкнутости четверной группы Клейна дополняются еще одним свойством. Матрицы каждого носителя физической модели подчинены циклическим условиям вида

$$\sigma_i\overset{k}{\times}\left(\sigma_{i+1}\overset{k}{\times}\sigma_{i+2}\right)=\sigma_{i+1}.$$

Суммирование индексов выполняется по модулю 4. Циклическое правило перестановки значимых элементов в соответствии с законом, которому подчинена четверная группа Клейна находит выражение в циклическом законе на комбинаторном произведении. Это обстоятельство является косвенным свидетельством в пользу аргумента, что комбинаторное произведение имеет не только формальный смысл. У комбинаторного произведения есть свойства некоторого физического взаимодействия, форма и сущность которого пока не раскрыта.

Пятое свойство носителей физических моделей задает правило действия на них логической операции по группе Клейна. Суть его в том, что логическое произведение матриц смежного класса B генерирует *базовый носитель физической модели* в форме четверной группы Клейна.

Таблица логических произведений имеет вид:

$\overset{l}{\times}$	b_1	b_2	b_3	b_4
b_1	a	b	c	d
b_2	b	c	d	a
b_3	c	d	a	b
b_4	d	a	b	c

.

Буквами a,b,c,d обозначены матрицы Клейна, соответствующие расположению значимых элементов в первой строке.

На матричном произведении таблица дублирует структуру перемножаемых матриц:

$\overset{m}{\times}$	b_1	b_2	b_3	b_4
b_1	a	b	c	d
b_2	d	c	b	a
b_3	c	d	a	b
b_4	b	a	d	c

.

Таков второй вариант генерирования базового носителя физической модели на основе смежного класса B. Сами элементы смежного класса B могут быть выражены через комбинаторное и логическое произведение, дополнительно проявляя свойства дублирования в механизмах генерирования «объектов». Формальные формулы таковы:

$$b_\xi = \left(\sigma_i \overset{k}{\times} \sigma_j\right) \overset{l}{\times} \left(\sigma_k \overset{k}{\times} \sigma_l\right).$$

Матричный квадрат логического произведения этих элементов есть единичная матрица, потому что таковы элементы группы Клейна.

Следовательно, множество носителей физических моделей ассоциировано с алгебраическим законом

$$\left(\sigma_i \overset{k}{\times} \sigma_j\right) \overset{l}{\times} \left(\sigma_k \overset{k}{\times} \sigma_l\right) \overset{m}{\times} \left(\sigma_i \overset{k}{\times} \sigma_j\right) \overset{l}{\times} \left(\sigma_k \overset{k}{\times} \sigma_l\right) = E = b_\xi \overset{l}{\times} b_\xi.$$

Закон базируется на *трехуровневой системе* операций.

Выясним, как согласованы рассматриваемые носители физических моделей между собой. В теории групп произведения смежных классов генерируют элементы других смежных классов.

Анализ показал, что элементы смежных классов объединены между собой системой операций. У каждой операции есть свое место в множестве.

Свойства матричной, комбинаторной, логической, структурной операции сложно согласованы между собой. Для понимания и применения системы операций требуется дополнительная и специальная математическая и физическая практика. Понятно, что при этом следует использовать совокупность дополнительных инструментов и алгоритмов.

Законы для индуцированных множеств

Есть два класса индуцированных множеств. Каждый из них подчинен своим законам. *Первый класс* генерируется выбором элементов множества по некоторому признаку. Например, можно рассмотреть множество матриц, у которых пара значимых элементов расположена в первых строках первого столбца. Выберем, например, матрицы

$$1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Таблица матричных произведений в данном случае выглядит так:

$\overset{m}{\times}$	1	2	3	4
1	4	2	3	1
2	3	2	3	2
3	2	2	3	3
4	1	2	3	4

.

Мы имеем моноид, подчиненный закону

$$\xi(a+b+c+d)=f(\xi)(a+b+c+d),$$
$$f(\xi)=\begin{cases}1\leftrightarrow 4,\\2\leftrightarrow 3.\end{cases}$$

Рассмотрим другой пример, объединив матрицы

$$1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

На матричной операции они подчинены таблице

$\overset{m}{\times}$	1	2	3
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3

.

Спектр генерации элементов есть «плато». Множество подчинено закону

$$abba=a.$$

Есть *второй класс* индуцированных множеств, когда к начальным матрицам добавляются новые матрицы, полученные, например, на основании произведения начальных матриц. Можно объединить начальные матрицы

$$1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},5=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

с матрицами, которые получаются при их матричном произведении:

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Эти 9 матриц замкнуты на матричном произведении и генерируют таблицу произведений:

$\overset{m}{\times}$	1	2	3	4	5	a	b	c	d
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	a	a	1	1	d
3	1	1	3	b	3	1	b	c	1
4	c	4	c	4	5	5	c	c	d
5	d	d	5	4	5	d	4	c	d
a	d	d	a	2	a	d	2	1	d
b	c	b	c	b	3	3	c	1	1
c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d	d	d	d	d

.

Данное множество подчинено ассоциативному закону. Его можно рассматривать в топологии Зарисского. Спектр генерации элементов задан таблицей:

ξ	1	2	3	4	5	a	b	c	d
n	20	4	4	4	4	4	4	18	19

.

Он зависит от расположения элементов и напоминает потенциальную яму в физической теории.

Систему операций следует рассматривать и применять как *систему возможностей* для объектов, которые им подчинены. В зависимости от того, какие есть операции и как они применяются, будет получен разный результат, реализованы разные возможности.

В стандартной практике операции и другие элементы теории рассматриваются как дополнительные условия моделирования. Можно принять другую точку зрения, что они неразрывно связаны с матрицами, образуют с ними единое целое, образуя «живой организм». На матричной операции он сохраняет себя. *Вес генерации* элементов разный.

Проанализируем произведения элементов множества справа на все другие элементы. Назовем совокупность генерируемых матриц спектром «реализаций». Получим три спектра:

$$\alpha=\sum_i \xi_i \overset{m}{\times}\begin{pmatrix}1\\ c\\ d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & c & d\end{pmatrix},$$

$$\beta=\sum_i \xi_i \overset{m}{\times}\begin{pmatrix}2\\ 4\\ b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & c & d\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}2 & 4 & b\end{pmatrix},\sum_i \xi_i \overset{m}{\times}\begin{pmatrix}3\\ 5\\ a\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & c & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & 5 & a\end{pmatrix}.$$

9 матриц разбиты на 3 «блока», каждый элемент из которых при произведении справа генерирует элементы $1,c,d$, а также элементы «родственного» ему блока.

При произведении классов элементов справа получим таблицу:

$\times$	α	β	γ
α	α	α	α
β	α	β	γ
γ	α	β	γ

.

Согласно таблице данное разбиение элементов на классы доказывает, что структура анализируемого множества имеет косвенную аналогию со структурой факторгруппы. Поскольку спектр генерации данной системы матриц напоминает «потенциальную яму» в физике, примем предположение, что реальные физические задачи могут не укладываться в рамки модели групп и их представлений. Из таблицы следует закон для классов элементов:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=3\alpha+2(\alpha+\beta+\gamma).$$

При произведении слева спектр генерации меняется. Объекты разбиваются на единичные элементы и пары, их генерации согласованы с главной тройкой элементов $1,c,d$. Получим соответствия

$$1\overset{m}{\times}\left(\sum_i \xi_i\right)\Rightarrow 1, c\overset{m}{\times}\left(\sum_i \xi_i\right)\Rightarrow c, d\overset{m}{\times}\left(\sum_i \xi_i\right)\Rightarrow d,$$

$$\begin{pmatrix}2\\ a\end{pmatrix}\overset{m}{\times}\left(\sum_i \xi_i\right)\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & (2 \quad a) & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\ b\end{pmatrix}\overset{m}{\times}\left(\sum_i \xi_i\right)\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & c & (3 \quad b)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}\overset{m}{\times}\left(\sum_i \xi_i\right)\Rightarrow\begin{pmatrix}(4 \quad 5) & c & d\end{pmatrix}.$$

Согласованность продольных и поперечных законов по структуре их спектра генерации можно использовать для классификации анализируемых множеств.

Спектр генерации, с физической точки зрения, прямо или косвенно «показывает» на основе системы матриц свойства объектов по их структуре и взаимодействию заданного типа.

Спектр генерации элементов для произведения элементов четверной группы Клейна изотропен по матричному и логическому произведениям: он одинаков при умножении слева и справа.

Рассмотрим дополнение предыдущей тройки матриц четырьмя новыми матрицами. Пусть

$$1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},5=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},6=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},7=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Все матрицы относятся к одному структурному типу по расположению значимых элементов в первой и второй строках матриц. Таблица их матричных произведений такова:

$\overset{m}{\times}$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	3	2	3	4	4	6	6
5	1	2	1	5	5	7	7
6	2	2	3	4	2	6	2
7	2	2	1	5	2	7	2

.

Спектр генерации элементов задается таблицей

ξ	1	2	3	4	5	6	7
n	10	17	10	3	3	3	3

.

Его графическое представление зависит от комбинаторики расположения «объектов»:

17							*
15							
12							
10	*					*	
9							
6							
3		*	*	*	*		
0							
	3	4	5	6	7	1	2

,

17		*					
15							
12							
10	*		*				
9							
6							
3				*	*	*	*
0							
	1	2	3	4	5	6	7

,

17				*			
15							
12							
10			*		*		
9							
6							
3	*	*				*	*
0							
	4	5	1	2	3	6	7

,…

«Родственные» объекты имеют разные условия генерации при взаимном произведении. Преимущество здесь имеет объект с максимальным отклонением от мономиальности.

Операционная деформация спектра генерации элементов множества

Представим спектр генерации элементов множества, рассмотренного выше, рис. 6 согласно таблице спектра

ξ	1	2	3	4	5	a	b	c	d
n	20	4	4	4	4	4	4	18	19

.

Он аналогичен образу потенциальной ямы в физической теории.

20	*								*
18								*	
16									
14									
12									
10									
8									
6									
4		*	*	*	*	*	*		
	1	2	3	4	5	$a(0)$	$b(6)$	$c(7)$	$d(8)$

.

Рис.7. Спектр генерации элементов множества

Выполним двойное произведение элементов множества. Пусть на первом этапе они группируются на основе суммирования по модулю 9 приписанных им номеров. На втором этапе рассмотрим их матричные произведения на себя. Получим таблицу произведений

$\times\times$	a	1	2	3	4	5	b	c	d
a	d	1	2	3	4	5	c	c	d
1	1	2	3	4	5	c	c	d	d
2	2	3	4	5	c	c	d	d	1
3	3	4	5	c	c	d	d	1	2
4	4	5	c	c	d	d	1	2	3
5	5	c	c	d	d	1	2	3	4
$b(6)$	c	c	d	d	1	2	3	4	5
$c(7)$	c	d	d	1	2	3	4	5	c
$d(8)$	d	d	1	2	3	4	5	c	c

.

Выполнена операционная деформация спектра элементов. Новый спектр элементов соответствует рис.8.

18	*								*
15									
12									
9		*	*	*			*	*	
6									
3									
0					*	*			
	c	1	2	3	a	b	4	5	d

.

Рис.8. Операционно деформированный спектр элементов

Новые операции на четверной группе Клейна

Четверная группа Клейна удобна к применению в разных разделах физики. Специфика её структуры в том, что она задана мономиальными матрицами. Следуя принятому физическому подходу, так могут описываться гравитационные предзаряды. Для электрических предзарядов характерно иное, немономиальное расположение значимых элементов в матрицах. Такой вариант может быть реализован при комбинаторном произведении мономиальных матриц. Непонятно, как такой алгоритм обеспечить в технологических установках. Об этом нужно думать. Однако есть и другой вариант: следует рассмотреть другие возможности трансформации мономиальных матриц в немономиальные. Для этого естественно ввести новые операции.

Рассмотрим пару новых операций на системе канонических мономиальных матриц. Примем точку зрения, что «произведению» соответствует результат выборки значимых элементов после наложения их друг на друга. Согласно первой операции, из пары элементов в каждой строке сохраняется либо совпадающий элемент, либо тот элемент, который находится далее от первого столбца. Согласно второй операции, из пары элементов в каждой строке сохраняется либо совпадающий элемент, либо тот элемент, который находится ближе к первому столбцу.

Получим на первом шаге две таблицы.

Табл.2. Позитивное условное произведение

$\overset{I(+)}{\times}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

.

Табл.3. Негативное условное произведение

$\overset{I(-)}{\times}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

.

Из 4 элементов произведение генерирует 12 новых элементов, сохраняя исходные элементы. С физической точки зрения было бы очень желательно получить такую «машину», которая может так действовать. Рассмотрим новые элементы:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\+\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\+\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\-\\-\\+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

12 новых элементов объединены в три «блока», каждый из которых получается из некоторого исходного элемента на основе операции трансляции значимых элементов.

Замыканию действия знаковой группы соответствуют разные наборы матриц. В частности, возможен вариант

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\\+\\-\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Каждый из указанных блоков заполняет все матричное пространство. По этой причине его можно применять в сочетании со знаковой группой для моделирования физических явлений, конструируя на их основе элементы матричной алгебры.

Поскольку матрицы получены на основе операции трансляции значимых элементов в матрицах, мы получили группы на сигнатурной операции. Следовательно, указанные наборы элементов имеют систему внутренних свойств.

Произведение исходных элементов на новые элементы усиливает отклонение от мономиальности. Например, получим

$\underset{\times}{l(+)}\ \underset{\times}{l(+)}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

.

Мы вправе предположить, что есть множество операций, которых мы не знаем. Для физики и для решения технологических задач требуется найти условия, при которых система доступных объектов подчинена практически полезной операции.

Проанализируем группу на матричном произведении, состоящую из пары элементов группы Клейна и пары элементов её смежного класса. Она имеет вид

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Покажем, что эта система множеств образует группу на логическом произведении, ассоциированном с группой Клейна, изоморфную данной группе. Доказательство основано на таблице произведения элементов с применением логической операции. Получим

$\overset{l}{\times}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$
$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$
$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

Такая же таблица получается при матричном произведении. Есть система матриц, которая на разных произведениях дает один результат. Эта ситуация довольно странная. Обычно изоморфизм имеет место для разных операций на разных системах матриц.

Математические операции, с физической точки зрения, есть проявление некоторого взаимодействия между объектами. Взаимодействия могут быть не только разными. Они могут образовывать согласованную динамическую систему. Если две операции генерируют один и тот же результат, динамику их соответствий на разных этапах взаимодействия будет сложно проявить. Более того, в каком смысле это нужно делать? Математика также «подсказывает» физикам, что физические потенциалы могут зависеть от спектра элементов, генерируемых реальной системой объектов, спектр меняется при изменении условий взаимодействия.

Специфика двойного произведения элементов группы Клейна

Дополним стандартное матричное произведение матриц логическим произведением, ассоциированным с группой Клейна. Для матриц размерности 4 ранее получены условия произведения для пары матриц:

$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{14}+a_{13}b_{13}+a_{14}b_{12}$	$a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{13}b_{14}+a_{14}b_{13}$	$a_{11}b_{13}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{11}+a_{14}b_{14}$	$a_{11}b_{14}+a_{12}b_{13}+a_{13}b_{12}+a_{14}b_{11}$
$a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{24}+a_{24}b_{23}$	$a_{21}b_{23}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{21}+a_{24}b_{24}$	$a_{21}b_{24}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{22}+a_{24}b_{21}$	$a_{21}b_{21}+a_{22}b_{24}+a_{23}b_{23}+a_{24}b_{22}$
$a_{31}b_{33}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{34}$	$a_{31}b_{34}+a_{32}b_{33}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{31}$	$a_{31}b_{31}+a_{32}b_{34}+a_{33}b_{33}+a_{34}b_{32}$	$a_{31}b_{32}+a_{32}b_{31}+a_{33}b_{34}+a_{34}b_{33}$
$a_{41}b_{44}+a_{42}b_{43}+a_{43}b_{42}+a_{44}b_{41}$	$a_{41}b_{41}+a_{42}b_{44}+a_{43}b_{43}+a_{44}b_{42}$	$a_{41}b_{42}+a_{42}b_{41}+a_{43}b_{44}+a_{44}b_{43}$	$a_{41}b_{43}+a_{42}b_{42}+a_{43}b_{41}+a_{44}b_{44}$

.

Рассмотрим двойное произведение, реализуемое в два «шага». На первом шаге присоединим к паре анализируемых матриц x, y управляющую («теневую») матрицу ξ. Например, остановимся на таком выборе:

$$x=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \xi=\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

На втором шаге введем двойное произведение:

$$x*y=x\times\times y=x\overset{m}{\times}y^{*}=x\overset{m}{\times}\left(y\overset{l}{\times}\xi\right).$$

Сначала выполним логические произведения, а затем выполним матричные произведения.

В рассматриваемом случае согласно таблице логических произведений получим

$$x^{*}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{l}{\times}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a&0&0\\b&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$y^{*}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\overset{l}{\times}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&a\\0&0&b&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Выполним матричные произведения. Получим

$$y*x=y\overset{m}{\times}x^{*}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix}0&a&0&0\\b&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\b&0&0&0\\0&a&0&0\end{pmatrix},$$

$$x*y=x\overset{m}{\times}y^*=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix}0&0&0&a\\0&0&b&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&b&0\\0&0&0&a\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, произведения согласованы между собой согласно закону, применяемому в моделях квантовых групп:

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\b&0&0&0\\0&a&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b^{-1}&0&0&0\\0&a^{-1}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix}0&0&b&0\\0&0&0&a\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow y*x=q\overset{m}{\times}(x*y).$$

Это выражение можно записать на основе двойного произведения. Получим

$$y*x=q*(x*y)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\b&0&0&0\\0&a&0&0\end{pmatrix}=q\overset{m}{\times}\left(\begin{pmatrix}0&0&b&0\\0&0&0&a\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{l}{\times}\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q\overset{m}{\times}\begin{pmatrix}0&0&ab&0\\0&0&0&ab\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(ab)^{-1}&0&0&0\\0&(ab)^{-1}&0&0\\0&0&b&0\\0&0&0&a\end{pmatrix}\overset{m}{\times}\begin{pmatrix}0&0&ab&0\\0&0&0&ab\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\b&0&0&0\\0&a&0&0\end{pmatrix}.$$

Преобразуем полученное выражение. Пусть

$$x'=a*x+b*y,\ y'=c*x+d*y.$$

Тогда

$$\begin{aligned}y'*x'&=(c*x)*(a*x)+(c*x)*(b*y)+(d*y)*(a*x)+(d*y)*(b*y)=\\&=q*\big((a*x)*(c*x)+(a*x)*(d*y)+(b*y)*(c*x)+(b*y)*(d*y)\big)=q*(x*y).\end{aligned}$$

Отсюда следуют *обобщенные квантовые условия* вида

$$q*(a*x)*(c*x)=(c*x)*(a*x),\ q*(b*y)*(d*y)=(d*y)*(b*y),$$

так как

$$q*(b*y)*(c*x)=(c*x)*(b*y)=0,\ q*(a*x)*(d*y)-(d*y)*(a*x)=0.$$

Следовательно, *применение многократных операций* может стать инструментом для анализа дискретных, «квантовых» явлений и эффектов.

Концепция физических групп и их связи с конечными геометриями

Истоки базовых математических конструкций есть в каждом конечном многообразии. Проиллюстрируем этот тезис на простом примере. Рассмотрим конечное множество любых объектов, пронумеровав их. Пусть, например, есть сопоставление

a	b	c	d	e	f	g	h
0	1	2	3	4	5	6	7

.

Придадим системе элементов свойства *физической группы*. Примем в качестве операции на физической группе правило сложения номеров объектов по модулю 8. Тогда число ноль есть единичный элемент. Ему соответствует некоторый опорный объект с указанным номером. У каждого числа из принятой нумерации есть обратное число. По этой причине у каждого физического объекта есть объект, обратный ему. Сложение чисел по модулю числа ассоциативно. По этой причине имеет место формальная ассоциативность для совокупности физических объектов: один и тот же набор «предметов». Следовательно, пронумерованное конечное множество есть группы. Назовем такую группу физической группой.

Аналогично в системе чисел можно придать свойства группы на «блоках», состоящих из пары пронумерованных чисел. Числа могут быть любые, более важна в данном подходе их нумерация. Операция суммирования номеров по модулю количества номеров задает группу, ассоциированную с системой пронумерованных чисел.

Такова группа на многообразии чисел. Её смысл на начальной стадии анализа кажется неясным. Ситуация проясняется, если мы примем во внимание специфические свойства «выборки сознания», согласно которой предпочтение отдается иерархическим свойствам системы объектов. Важно не то, какой объект, а то, какое место он занимает в нумерации, выступающей в роли простейшего критерия иерархической системы.

При анализе «блоков» из трех чисел мы получаем не только образ группы. Дополнительные условия позволяют сформировать модель проективной геометрии. Она выглядит, например, так: есть 8 точек, точка ноль «отделена» от остальных 7 точек. Все точки расположены по вершинам квадрата и на серединах линий, которые их соединяют:

				0				
		7				1		
	↗		↘		↙		↘	
6				↙				2
	↖		↙		↘		↙	
		5				3		
			↖		↙			
				4				

.

Рассмотрим «блоки», состоящие из трех точек, имеющих разные свойства по суммированию и по разности сумм их индексов. Получим два класса элементов:

ijk	123	234	345	456	567
$\sum ijk$	6	9	12	15	18

$\to \Delta = 3,$

ijk	156	723
$\sum ijk$	12	12

$\to \Delta = 0.$

Мы имеем аналог проективной плоскости размерности 2. В единую систему объединены 7 точек и семь линий.

Модель отличается от стандартных моделей. Во-первых, она представляет собой ориентированный симплекс, полученный на основе проектирования куба на плоскость. Вершины куба пронумерованы. Принят порядок их объединения в тройки. Во-вторых, наборы характеризуются разными суммами индексов и относительными разностями. На этой основе можно ввести топологию, принимая в качестве условия замыкания величину разности сумм индексов. К замкнутому семейству относятся наборы с одинаковой величиной разности в сумме индексов.

Мы имеем «цветок» и пару «листьев» в качестве модели проективного пространства. Такая модель «ближе» к приложениям в физике. Ей можно поставить в соответствие систему объектов, соединенных силовыми линиями.

Рассмотрим пример физической группы. Пусть пронумерована совокупность матриц

$$1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},5=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},6=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},7=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},8=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

В ней содержится элемент с нулевым номером и 8 других элементов. Суммирование номеров по модулю числа 9 придает множеству матриц свойства группы. В ней есть обратные элементы:

$$1\leftrightarrow 8, 2\leftrightarrow 7, 3\leftrightarrow 6, 4\leftrightarrow 5, 0\leftrightarrow 0.$$

Такое соответствие нетривиально. Оно меняется при выборе другого нулевого элемента и при изменении нумерации. Воздействие на себя аналогично конвективным потокам: нижние объекты поднимаются вверх, верхние объекты опускаются вниз. Получим модель

$$1+1=2, 2+2=4, 3+3=6, 4+4=8, 5+5=1, 6+6=3, 7+7=5, 8+8=7.$$

Примем условие структурного топологического замыкания для системы матриц. Пусть замыкание первого типа соответствует наличию в одном столбце только двух значимых цифр. Таких матриц 6. Пусть замыкание второго типа соответствует наличию более 2 элементов в одном столбце. Таких элементов 2. Пусть замыкание третьего типа соответствует наличию пары столбцов с парой элементов в столбце. Есть один такой элемент. В зависимости от того, какой вариант замыкания принят, мы вправе рассматривать три вида топологий на конечной системе матриц. Указанные варианты образуют некоторую базу топологии для других систем множеств.

Заметим, что топологическое различие проявляет себя в свойствах спектра генерации. Однако оно нивелируется в модели физической группы.

Влияния и реакции в формализме физических групп

Концепция физической группы базируется на идее, что есть различие между физическим объектом и его математическим образом. Изучая объекты и явления по их «образам», мы получаем образную картину объектов и явлений. У другого объекта эти образы и картины могут быть другими, хотя исследуется один и тот же физический объект и его свойства. Аналогичное замечание справедливо для воздействия объекта на себя.

В силу сделанного замечания минимальное количество элементов, на основе которых можно анализировать проблему влияния и реакции для пары систем объектов, равно трём. Есть «пульт» воздействия на систему реальных объектов и есть итог этого воздействия в форме $A-$алгоритма произведения. Есть «пульт» реакции объекта на воздействие и его итог в форме $B-$алгоритма произведения. Задача состоит в том, чтобы согласовать между собой эту пару «итогов». Если согласование имеет место, мы говорим об эффективности расчетной модели. Если согласования нет или оно нарушено, нужно искать средства и алгоритмы для устранения этого несоответствия. Проиллюстрируем рассуждения рис.9.

A	0	1	2	3	4	5	6	7		$\tilde{A}$	1	3	5	0	2	4	6	7
Q	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	$\to$	$\tilde{Q}$	m_2	m_4	m_3	m_7	m_5	m_6	m_1	m_4
B	a	b	c	d	e	f	g	h		$\tilde{B}$	f	h	g	b	c	d	a	e

Рис.9. Базовое и деформированное состояние системы объектов

Следуя $A-$алгоритму в форме суммирования номеров этой строки по модулю числа 8, мы паре номеров ставим в соответствие объект, соответствующий полученному номеру. Например, получим

$$2+5=7 \to m_3+m_6=m_8, \tilde{2}+\tilde{5}=\tilde{7} \to m_5+m_3=m_4,...$$

Следуя $B-$алгоритму, паре букв поставим в соответствие букву, удаленную от второй буквы на интервал, равный пробелу между взятыми буквами. Например, получим

$$b+d=f \Rightarrow m_2+m_4=m_6, \tilde{b}+\tilde{d}=\tilde{e} \Rightarrow m_7+m_6=m_4,...$$

Примем согласование между числами и номерами. Получим, например, соответствия:

$$2+5=7 \to m_3+m_6=m_8, \tilde{2}+\tilde{5}=\tilde{7} \to m_5+m_3=m_4,...$$
$$c+f=a \to m_3+m_6=m_1, c+g=f \to m_5+m_3=m_2,...$$

Базовые соответствия получатся, если $A-$алгоритм идентичен $B-$алгоритму. Обычно расчет основан на таком допущении. Оно принимается неявно. В деформированном состоянии этого условия недостаточно, так как нет базового соответствия чисел и букв.

Если рассматривать суммирование чисел как влияние, то влияющий объект, согласно принятому алгоритму, будет уверен в получении определенного физического результата, например, сопоставления паре матриц конкретной матрицы. Это может быть реализация новых отношений на основе пары исходных отношений. Реагирующий объект в силу присущего ему алгоритма «суммирования» аналогично уверенно генерирует «свой» объект. Эти результаты вполне могут либо совпадать, либо не совпадать, они могут либо не искажать, либо искажать эксперимент.

Связь симметрий с латинским квадратом

Латинским квадратом называют совокупность чисел в квадратной матрице, расположенных однократно в каждом столбце и каждой строке. Латинские квадраты называют ортогональными, если паре разных чисел в двух матрицах можно сопоставить одинаковые места. Известен латинский квадрат

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\3&4&1&2\\4&3&2&1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

В таком виде с ним ассоциирована четверная группа Клейна. Аналогично можно записать известную пару других латинских квадратов:

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&3&2&1\\2&1&4&3\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\2&1&4&3\\3&4&1&2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Три данные латинские квадраты взаимно ортогональны. Указанные матрицы задают смежные классы по группе Клейна для группы перестановок из 4 элементов, обозначенные буквами E, F. Данные 12 матриц образуют группу по матричному произведению.

Можно принять другой вариант. Примем перестановку строк матриц Клейна согласно паре алгоритмов:

$$1\to 1, 4\to 2, 2\to 3, 3\to 4,$$
$$1\to 1, 3\to 2, 4\to 3, 2\to 4.$$

Тогда, например, получим соответствие

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ldots$$

Аналогичные матрицы получены другим способом при анализе проективной геометрии размерности 3.

Данные матрицы сами по себе далеки от физических приложений. Ситуация меняется при объединении каждой из указанных совокупностей со знаковой группой. Такой синтез позволяет на указанной основе сконструировать элементы матричной алгебры. Их достаточно, чтобы записать в матричной форме любую физическую модель.

Группы сопоставления

Множества матриц, рассматриваемых выше, образуют семейства, сконструированные таким образом, что в каждой строке есть один значимый элемент. Элементы имеют свои места, которым можно приписать координаты, ассоциированные с некоторой исходной, опорной матрицей. Проанализируем этот вариант подробнее. Рассмотрим, например, несколько матриц:

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ ...
$E(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$	$a(-1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$	$b(0\ \ 0\ \ -1\ \ 1)$	$c(0\ \ 1\ \ -1\ \ 1)$

Координаты значимых элементов по отношению к элементам в единичной матрице, указанные ниже матриц, применим для сопоставления матриц друг с другом. Будем вычитать координаты матриц по модулю числа, равного размерности матриц. Тогда выполняется условие *аффинного сложения* «векторов» для пар матриц:

$$(a-b)+(b-a)=ab+bc=ac=(a-c),$$

В рассматриваемом случае есть другая возможность; координаты значимых элементов матриц можно складывать по модулю числа, равного размерности матриц. Получим группу сопоставления матриц. Множество имеет единицу, роль которой выполняет опорная матрица. Она может быть отличной от единичной матрицы. Более того, любая матрица, у которой в каждой строке есть значимый элемент, может играть роль опорной матрицы. Суммирование ненулевых координат с нулевыми координатами даст те же координаты. Произведение опорной матрицы на любую другую матрицу в алгоритме суммирования координат не меняет другую матрицу. Каждая матрица имеет обратную матрицу, координаты значимых элементов в которой отличаются от координат рассматриваемой матрицы умножением на минус единицу. Произведение матриц в форме суммирования координат ассоциативно, так как суммирование дистрибутивно

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Следовательно, мы имеем модель конечных групп, произведение в которых задается суммированием координат значимых элементов матриц по модулю числа, равного размерности матриц. Назовем такую модель группой сопоставления. Сопоставления будут меняться при изменении опорной матрицы. По этой причине модель содержит в себе элемент управления, ассоциированный со структурой опорной матрицы. Опорная матрица управляет сопоставлением матриц.

Аналог алгоритма сопоставления матриц мы обнаруживаем при *матричном произведении* матриц, которое можно выполнять по индексному суммированию значимых элементов. Для этого сопоставим значимому элементу каждой строки пару индексов, указывающих номер строки и номер столбца. При произведении матриц сначала присоединяем ко второму индексу рассматриваемого элемента первый индекс некоторого другого элемента и «компенсируем» их. В итоге остается пара индексов, задающая место нового элемента. Алгоритм содержит единицу в форме единичной матрицы. Каждая матрица имеет обратную матрицу. Суммирование ассоциативно.

$$ij \hat{+} jk = ik.$$

Мы получили еще одну группу сопоставления. С ней просто работать, если значимые элементы равны единице. Легко провести обобщение при замене единиц другими числами.

Иную структуру имеет комбинаторное произведение. В этой модели произведение значимых элементов одной строки на значимые элементы другой строки конструируется по числу шагов, необходимых для того, чтобы значимый элемент второй строки совпал по положению со значимым элементом в первой строке. Введем величину ξ, задающую разность координат значимых элементов в первой и второй м\строках. Зададим для неё закон, который ставит в соответствие величине ξ номер столбца с итоговым значимым элементом. В рассматриваемом случае закон имеет вид:

$$f(\xi) = \begin{cases} 5+\xi, \xi \prec 0, \\ 1, \xi = 0, \\ 1+\xi, \xi \succ 0. \end{cases}$$

Следствием этого закона является таблица произведения мест значимых элементов матриц, Она имеет вид латинского квадрата:

	1	2	3	4
1	1	4	3	2
2	2	1	4	3
3	3	2	1	4
4	4	3	2	1

.

Специфика этого латинского квадрата в том, что для него не существует ортогонального латинского квадрата. Это условие выделяет данную таблицу произведений из системы других таблиц произведений.

С таблицей произведений ассоциирована система матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она образует группу по матричному произведению. Эта система матриц состоит из нормальной подгруппы H

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и смежного класса из 2 элементов. Указанная таблица произведений получается при перемене номеров для элементов смежного класса.

Многократные операции, их свойства и приложения

Физикам хорошо известно, что изменения структуры и свойств объектов зависят от того, в какой последовательности и в какой мере применяется к ним система взаимодействий. В частности, результат может быть разным при однократном и многократном взаимодействии. Стремление приблизить математику к решению реальных практических задач инициирует проблему анализа многократных операций. Их можно определить по-разному. Ограничимся вариантом, при котором многократная операция применяется к паре чисел. На первом этапе они умножаются в соответствии с выбором операции, на втором этапе полученный результат повторно умножается на число, находящееся справа. Например, двойная матричная операция имеет такую структуру:

$$a \overset{m}{\times}\overset{m}{\times} b = \left(a \overset{m}{\times} b\right)\overset{m}{\times} b.$$

Применим её к матрицам четверной группы Клейна. Получим соответствие

$A =$

$\overset{m}{\times}$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

$\Rightarrow A^2 =$

$\overset{m}{\times}\overset{m}{\times}$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

.

С физической точки зрения такой вариант соответствует алгоритму генерирования объектов одного типа при «взаимодействии» с другими объектами согласно закону

$$a \overset{m}{\times}\overset{m}{\times} b = a.$$

Проанализируем многократные операции для латинских квадратов, ассоциированных с таблицей матричных произведений элементов четверной группы Клейна. Получим соответствия

$B =$

$\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	1	2
3	4	3	2	1
4	2	1	4	3

$\Rightarrow B^2 =$

$\times\times$	1	2	3	4
1	1	4	2	3
2	4	1	3	2
3	2	3	1	4
4	3	2	4	1

$\Rightarrow B^4 =$

$(\times\times)^2$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	1	2
3	4	3	2	1
4	2	1	4	3

,

$C =$

$\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	3	2	1
3	2	1	4	3
4	3	4	1	2

$\Rightarrow C^2 =$

$\times\times$	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	3	1	2	4
3	4	2	1	3
4	2	4	3	1

$\Rightarrow C^4 =$

$(\times\times)^2$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	3	2	1
3	2	1	4	3
4	3	4	1	2

.

Повторная многократная операция «возвращает» эти латинские квадраты в исходное состояние. Следовательно, есть цикл деформации латинских квадратов.

Рассмотрим более сложную задачу. Применим многократные операции к группе на матричной операции вида

$$1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},4=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Эти матрицы получаются из единичной матрицы при последовательной трансляции значимых элементов на единицу вправо. По этой причине, естественно, мы имеем группу на сигнатурной операции. Сконструируем на основе этих матриц таблицу произведений для структурной операции и для логической операции. Таблица структурных произведений конструируется в соответствии со структурой рассматриваемых матриц. Таблица логических произведений конструируется по данным матрицам на основе логического произведения, ассоциированного с группой Клейна. Получим две таблицы:

$$a=\begin{array}{|c|cccc|}\hline \overset{st}{\times} & 1 & 2 & 3 & 4\\\hline 1&1&4&3&2\\2&2&1&4&3\\3&3&2&1&4\\4&4&3&2&1\\\hline\end{array},b=\begin{array}{|c|cccc|}\hline \overset{l}{\times} & 1 & 2 & 3 & 4\\\hline 1&1&2&3&4\\2&2&3&4&1\\3&3&4&1&2\\4&4&1&2&3\\\hline\end{array}.$$

Смешанные произведения генерируют одинаковые выражения:

$$a\times(st,l)a=\begin{array}{|c|cccc|}\hline \times(st,l) & 1 & 2 & 3 & 4\\\hline 1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4\\\hline\end{array}\equiv\begin{array}{|c|cccc|}\hline \times(l,st) & 1 & 2 & 3 & 4\\\hline 1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4\\\hline\end{array}=b\times(l,st)b.$$

Он аналогичен результату, полученному для четверной группы Клейна на других матрицах. Одинаковые многократные операции ведут себя иначе:

$$a\times(st,st)a=\sigma^2=\begin{array}{|c|cccc|}\hline \times(st,st) & 1 & 2 & 3 & 4\\\hline 1&1&3&1&3\\2&2&4&2&4\\3&3&1&3&1\\4&4&2&4&2\\\hline\end{array}\Rightarrow\sigma^4=\begin{array}{|c|cccc|}\hline \times(st,st) & 1 & 2 & 3 & 4\\\hline 1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4\\\hline\end{array},$$

$$b\times(l,l)b=\eta^2=\begin{array}{|c|cccc|}\hline \times(l,l) & 1 & 2 & 3 & 4\\\hline 1&1&3&1&3\\2&2&4&2&4\\3&3&1&3&1\\4&4&2&4&2\\\hline\end{array}\Rightarrow\eta^4=\begin{array}{|c|cccc|}\hline \times(l,l) & 1 & 2 & 3 & 4\\\hline 1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4\\\hline\end{array}.$$

Группа с наследственной операцией

Структура четверной группы Клейна генерирует латинский квадрат:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\3&4&1&2\\4&3&2&1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Элементам группы можно сопоставить сигнатуры, двигая значимые элементы:

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&-1&1&-1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&-2&2&-2\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}-1&1&-1&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}.$$

Тогда данную совокупность можно рассматривать как группу на сигнатурной операции.

Выполним деформацию этих матриц, сохранив их сигнатуры:

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&-1&1&-1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&-2&2&-2\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}-1&1&-1&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}.$$

Эту совокупность матриц также можно рассматривать как группу на сигнатурной операции.

Отличие от предыдущего случая в том, что в первом варианте сигнатура согласована с реальной трансляцией значимых элементов матриц по отношению к выделенной, опорной матрице. Во втором случае такого соответствия нет. Матрицы изменились, реализовался обмен значимыми элементами с их концентрацией на одной матрице. Однако это обстоятельство не препятствует «сохранению» сигнатур матриц. Примем точку зрения, что операция для деформированных матриц соответствует сигнатуре недеформированных, исходных матриц. Матрицы, рассматриваемые как аналог физических объектов, «наследуют» сигнатуру.

Заметим, что деформированные матрицы не случайны, они соответствуют структуре произведения чисел 1,2,3,4 по модулю числа 4:

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	2	4
3	3	2	1	4
4	4	4	4	4

$$\Rightarrow 1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Группа с операцией по расположению

Операции суммирования и умножения по модулю числа 1 могут быть ассоциированы с матрицами:

$\times$	$0\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$1\to\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$0\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	0	1
$1\to\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	1	0

$\to$

$+F_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

,

$+F_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\leftarrow$

$\times$	$0\to\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$1\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
$0\to\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	0	0
$1\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	0	1

.

По этой причине мы вправе дополнить свойства рассматриваемых совокупностей объектов. Расположим их на евклидовой плоскости с координатами (x,y). Тогда четверке любых объектов можно поставить в соответствие их координаты. Например, рассмотрим модель вида

$$a(0,0), b(0,1), c(1,1), d(1,0).$$

Сейчас возможна операция суммирования координат по модулю числа 1. Мы имеем единицу $a(0,0)$. Каждый элемент обратен себе. Операция аддитивна, что гарантирует ассоциативность. Выполнены все условия, соответствующие аксиоматике группы. Мы получили группу с операцией по расположению объектов.

Совокупность любых объектов, которым присущи внутренние свойства в форме наличия пары канонических «координат», можно спроектировать на группу с операцией суммирования координат по модулю числа 1.

На этом этапе анализа возможен переход к задачам психологии. Примем координату x для описания состояния Сознания, а координата y пусть соответствует состоянию Чувств. Если значение координаты равно нулю, будем говорить о пассивном состоянии Сознания и Чувств. Если значение координаты равно единице, будем говорить об активном состоянии Сознания и Чувств. Координаты объектов, указанные выше, задают каноническую систему состояний, базис для описания Сознаний и Чувств. Группа по расположению «свидетельствует» о том, что мы рассматриваем систему объектов, имеющих пару свойств. Они способны перевести себя в пассивное состояние при воздействии на себя. Они способны также изменить состояние других объектов: ослабить или усилить активность Сознания и Чувств.

Аналогично можно рассматривать и интерпретировать другие свойства объектов, не согласовывая их со структурой самих объектов. Структура объектов может быть подчинена принципиально другим законам. Например, операция для изменения структуры объектов может основываться на произведении координат. В таком варианте мы получаем полугруппу. В этом случае важная роль принадлежит «пассивному» объекту. Он «гасит» физиологическую активность любых объектов, которые попали под его влияние. Специфика ситуации в том, что объект, имеющий двойную активность, «поддерживает» только аналогичный объект.

Операторная генерация отношений

Система объектов, как известно из физики, имеет разные свойства в зависимости от того, какие это объекты, а также от того, в каких взаимодействиях они участвуют. Математические объекты, заданные, например, матрицами, имеют аналогичные свойства: есть зависимость законов от структуры матриц, а также от операций, которым они подчинены. Одна система матриц генерирует разные законы в зависимости от того, какие применяются операции. Рассматривая закон как форму отношений между объектами, мы вправе говорить об операторной генерации отношений.

Рассмотрим систему матриц

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Матричное произведение генерирует элементы и «свой» закон для них:

$$b\overset{m}{\times}d=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},c\overset{m}{\times}a=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},c\overset{m}{\times}d=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},b\overset{m}{\times}a=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\left(b\overset{m}{\times}d\right)\overset{m}{\times}\left(c\overset{m}{\times}a\right)=\left(c\overset{m}{\times}d\right)\overset{m}{\times}\left(b\overset{m}{\times}a\right).$$

Комбинаторное произведение строк на столбцы генерирует иные элементы и новый закон:

$$d\overset{k}{\times}a=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},b\overset{k}{\times}c=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},b\overset{k}{\times}a=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},d\overset{k}{\times}c=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\left(d\overset{k}{\times}a\right)\overset{k}{\times}\left(b\overset{k}{\times}c\right)=\left(b\overset{k}{\times}a\right)\overset{k}{\times}\left(d\overset{k}{\times}c\right).$$

Логическое произведение на четверной группе Клейна генерирует закон иного вида:

$$a\overset{l}{\times}b=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},b\overset{l}{\times}c=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},a\overset{l}{\times}d=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},d\overset{l}{\times}c=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left(a\overset{l}{\times}b\right)\overset{l}{\times}\left(b\overset{l}{\times}c\right)=\left(a\overset{l}{\times}d\right)\overset{l}{\times}\left(d\overset{l}{\times}c\right).$$

Каждой операции соответствует «свой» закон. Поэтому для полного понимания анализируемой системы требуется исследовать роль и место всей системы операций в данной модели. Это обстоятельство важно для физического моделирования. Ведь для каждой операции могут потребоваться «свои» измерительные методики и «свои» алгоритмы» верификации данных опыта.

Операторный симплекс

Проанализируем законы операторных отношений с геометрической точки зрения. Для этого сопоставим системе объектов систему «точек», а произведениям элементам сопоставим ориентированные стрелки. Тогда каждому закону будет поставлен в соответствие симплекс: граф закона операторных отношений. Симплекс для матричного произведения с законом

$$\left(b\overset{m}{\times}d\right)\overset{m}{\times}\left(c\overset{m}{\times}a\right)=\left(c\overset{m}{\times}d\right)\overset{m}{\times}\left(b\overset{m}{\times}a\right)$$

имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline d & & a \\ \hline \uparrow & \overset{m}{\times} & \uparrow \\ \hline b & & c \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline d & & a \\ \hline \uparrow & \overset{m}{\times} & \uparrow \\ \hline c & & b \\ \hline\end{array}.$$

На комбинаторном произведении согласно закону

$$\left(d\overset{k}{\times}a\right)\overset{k}{\times}\left(b\overset{k}{\times}c\right)=\left(b\overset{k}{\times}a\right)\overset{k}{\times}\left(d\overset{k}{\times}c\right)$$

симплекс выглядит иначе:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline d & & c \\ \hline \downarrow & \overset{k}{\times} & \uparrow \\ \hline a & & b \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & & c \\ \hline \uparrow & \overset{k}{\times} & \uparrow \\ \hline b & & d \\ \hline\end{array}.$$

Логическое произведение на основе закона

$$\left(a\overset{l}{\times}b\right)\overset{l}{\times}\left(b\overset{l}{\times}c\right)=\left(a\overset{l}{\times}d\right)\overset{l}{\times}\left(d\overset{l}{\times}c\right)$$

генерирует новый симплекс:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline b & & c \\ \hline \uparrow & \overset{l}{\times} & \uparrow \\ \hline a & & b \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline d & & c \\ \hline \uparrow & \overset{l}{\times} & \uparrow \\ \hline a & & d \\ \hline\end{array}.$$

Легко видеть, что первая пара симплексов ассоциирована с проективной плоскостью размерности 2. Есть 4 «точки» и два варианта объединения пары линий (прямых) прямоугольника с другими прямыми. Один вариант объединяет пару других сторон прямоугольника. Второй вариант объединяет прямые линии, соответствующие диагоналям прямоугольника. Это замечание важно в качестве нового аргумента о дополнительности матричного и комбинаторного произведений.

Принципиально иначе «ведет себя» логическое произведение: оно объединяет пары прямых, которые последовательно дополняют друг друга. Есть система отношений:

$$ab\cdot bc=ad\cdot dc=a, bc\cdot cd=ba\cdot ad=a, cb\cdot ba=cd\cdot da=a, da\cdot ab=dc\cdot cb=a.$$

Для каждой «точки» симплекса произведения согласованных пар «прямых» одинаковы.

Действия логических операций

Применим логическую операцию на четверной группе Клейна к элементам этой группы

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\mathrm{b}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\mathrm{c}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\mathrm{d}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Логическая и матричная операции в этом случае дают одинаковые результаты: и произведения, и законы. В частности, получим

$$a\overset{m}{\times}b=b=a\overset{k}{\times}b,...(a\overset{m}{\times}b)\overset{m}{\times}(b\overset{m}{\times}c)-(a\overset{m}{\times}d)\overset{m}{\times}(d\overset{m}{\times}c)=0=(a\overset{k}{\times}b)\overset{k}{\times}(b\overset{k}{\times}c)-(a\overset{k}{\times}d)\overset{k}{\times}(d\overset{k}{\times}c),...$$

Результаты произведений дают элементы исходного множества при «продольных» и «поперечных» произведениях. Таков первый тип действия логической операции.

Применим логическую операцию на четверной группе Клейна к элементам смежного класса E группы Клейна:

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\mathrm{b}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\mathrm{c}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\mathrm{d}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

В этом варианте расчета произведения на логической и матричной операции дают разные результаты. Логическая операция генерирует элементы группы Клейна. Матричная операция генерирует элементы смежного класса F. Их произведения с элементами смежного класса E генерируют элементы группы Клейна.

$$a\overset{m}{\times}b=b\neq a\overset{k}{\times}b,...$$

$$(a\overset{l}{\times}b)\overset{l}{\times}(b\overset{l}{\times}c)-(a\overset{l}{\times}d)\overset{l}{\times}(d\overset{l}{\times}c)=0,(a\overset{m}{\times}b)\overset{m}{\times}(b\overset{m}{\times}c)-(a\overset{m}{\times}d)\overset{m}{\times}(d\overset{m}{\times}c)\neq 0...$$

Свойства «продольных» и «поперечных» произведений различны. Таков другой тип действий логической операции.

Применим логическую операцию на четверной группе Клейна к системе элементов, совокупность которых заполняет все элементы матрицы:

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\mathrm{b}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\mathrm{c}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\mathrm{d}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

У этой системы матриц другие свойства. Логическая и матричная операции действуют частично согласованно. Законы для пар произведений различны

$$(a\overset{l}{\times}b)\overset{l}{\times}(b\overset{l}{\times}c)-(a\overset{l}{\times}d)\overset{l}{\times}(d\overset{l}{\times}c)=0,(a\overset{m}{\times}b)\overset{m}{\times}(b\overset{m}{\times}c)-(a\overset{m}{\times}d)\overset{m}{\times}(d\overset{m}{\times}c)\neq 0...$$

Взаимные произведения частично совпадают:

$$a\overset{l}{\times}b=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=a\overset{m}{\times}b,\,b\overset{m}{\times}c=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=b\overset{l}{\times}c,\ldots$$

Продольные и поперечные произведения имеют разные свойства по генерированию элементов. Таков третий тип действий логической операции.

Объединим рассмотренные свойства в таблице. Обозначим их буквами:

$\alpha-$ логическая и матричная операция дают одинаковые результаты,

$\beta-$ произведения исходных матриц дают эти же или «близкие» матрицы,

$\gamma-$ свойства «продольных» и «поперечных» произведений одинаковы.

Получим таблицу:

Свойства	*A*	*B*	*C*
α	$+$	$-$	$+,-$
β	$+$	$+$	$+,-$
γ	$-$	$-$	$-$

.

Другим законам подчинены совокупности матриц, имеющие совпадающие значимые элементы. Рассмотрим, например, матрицы

$$a=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\mathrm{b}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\mathrm{c}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\mathrm{d}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

В этом наборе матриц логическая и комбинаторная операции дают разные результаты. Не выполняется также закон соответствия произведения пар элементов. Получим, в частности

$$\left(a\overset{l}{\times}b\right)\overset{l}{\times}\left(b\overset{l}{\times}c\right)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\left(a\overset{l}{\times}d\right)\overset{l}{\times}\left(d\overset{l}{\times}c\right).$$

Произведения элементов на матричной и логической операции не соответствуют исходной системе элементов.

Мы рассмотрели действия логической операции, сконструированной по четверной группе Клейна на матричной операции, на нескольких системах матриц. Анализ показал различие действий логических операций. Выполнено сравнение этих произведений с действиями матричной операции. Система логических операций может быть сконструирована по другой совокупности матриц. В частности, это можно сделать на любом смежном классе для группы Клейна. По этой причине мы вправе применять в математике и физике систему логических операций. Их свойства многообразны.

Соотношение действий координатной и логической операций

Идея координатной операции включает два элемента. Во-первых, сопоставим месту значимого элемента матрицы число, образовав последовательность чисел. Во-вторых, применим суммирование координат по модулю числа, равного размерности матриц.

Проиллюстрируем координатную операцию на примере четверной группы Клейна. Получим координатное представление матриц:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сложение координат:

$$\begin{aligned} ab = a + b = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, bc = b + c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, ab + bc = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \\ ad = a + d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, dc = d + c = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, ad + dc = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получим закон «геометрического типа»

$$ab + bc = ad + dc.$$

Он получен особенно просто и совпадает с аналогичным законом, следующим из логической и матричной операции для четверной группы Клейна.

Аналогичный закон ранее был получен для логической операции на элементах смежного класса. Проанализируем такую возможность на комбинаторной операции. Получим

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сложение координат:

$$\begin{aligned} ab = a + b = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, bc = b + c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, ab + bc = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \\ ad = a + d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, dc = d + c = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, ad + dc = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получим аналогичный закон «геометрического типа»

$$ab + bc = ad + dc.$$

Для других смежных классов группы перестановок из 4 элементов ситуация аналогична.

Проанализируем обнаруженную аналогию между свойствами координатной и логической операции на примере совокупности немономиальных матриц, когда значимые элементы не заполняют все матричное пространство.

Потребность в таком анализе вытекает из относительной сложности таких математических объектов. Кажется, что они не имеют и не могут иметь «геометрических» свойств, аналогичных указанным выше. На самом деле это не так. Геометрические свойства изделий могут и должны быть дополнены геометрическими свойствами операций. Не обязательно они «копируют» известные свойства. Их принципиальная новизна согласуется с принятым постулатом о наличии трансфинитных свойств Реальности: она допускает многообразие сторон и свойств, а потому и многообразие геометрий.

Пусть задана совокупность матриц:

$$a=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\mathrm{b}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\mathrm{c}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\mathrm{d}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Получим

$$a=\begin{pmatrix}2&4&1&2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}3&1&1&2\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}3&4&4&2\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}3&4&1&3\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сложение координат:

$$ab=a+b=\begin{pmatrix}1&1&2&4\end{pmatrix},cd=b+c=\begin{pmatrix}2&4&1&1\end{pmatrix},ab+cd=\begin{pmatrix}3&1&3&1\end{pmatrix},$$
$$ad=a+d=\begin{pmatrix}1&4&2&1\end{pmatrix},\mathrm{b}c=d+c=\begin{pmatrix}2&1&1&4\end{pmatrix},ad+dc=\begin{pmatrix}3&1&3&1\end{pmatrix}.$$

Получим аналогичный закон «геометрического типа»

$$ab+cd=ad+bc.$$

Такой закон получается на аддитивной координатной операции.

Проанализируем систему матриц на логической мультипликативной операции. Получим

$$ab=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},cd=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},(ab)(cd)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$ad=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},bc=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},(ad)(bc)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Получим аналогичный закон «геометрического типа»

$$(ab)(cd)=(ad)(bc).$$

Рассмотрим совокупность матриц

$$a=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}d=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

На логической операции получим

$$ab=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},cd=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},(ab)(cd)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$ad=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},bc=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},(ad)(bc)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Получим закон «геометрического типа»

$$(ab)(cd)=(ad)(bc).$$

Он аналогично следует на основе координатной операции. Получим

$$a=\begin{pmatrix}4&3&3&4\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1&3&2&4\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}1&2&2&1\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}4&3&3&1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}&ab=\begin{pmatrix}1&2&1&4\end{pmatrix},cd=\begin{pmatrix}1&1&1&2\end{pmatrix},ab+cd=\begin{pmatrix}2&3&2&2\end{pmatrix},\\&ad=\begin{pmatrix}4&2&2&1\end{pmatrix},bc=\begin{pmatrix}2&1&4&1\end{pmatrix},ad+bc=\begin{pmatrix}2&3&2&2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Эти законы не выполняются для рассматриваемой совокупности матриц на комбинаторной операции. На матричной операции для указанной совокупности матриц выполняется закон

$$ab\cdot cd=bd\cdot ca.$$

Есть система операций. Их применение к одной совокупности матриц предъявляет разные законы. Есть система законов. Они проявляются в разных условиях, так как операции выражают различные условия взаимодействия одних и тех же объектов.

Представим эти результаты графически. Получим два типа законов:

$$(ab)(cd)=(ad)(bc)\to\begin{array}{|c|c|c|}\hline d&\leftarrow&a\\\hline \uparrow&&\downarrow\\\hline c&\leftarrow&b\\\hline\end{array},$$

$$ab+bc=ad+dc\to\begin{array}{|c|c|c|}\hline d&\leftarrow&a\\\hline \downarrow&&\downarrow\\\hline c&\leftarrow&b\\\hline\end{array}.$$

Следовательно, система матриц имеет геометрическое выражение, которое зависит от типа применяемой операции. В рассматриваемом варианте операции «доступны» каждой матрице.

Такой подход нельзя признать корректным. Из физики известно, что взаимодействие зависит от тех зарядов, которые имеет исследуемый объект.

Принимая возможность применения любых операций к матрицам, мы придаем им наличие любой системы зарядов. Обычно так не бывает. По этой при чине следует найти алгоритмы согласования структуры матриц и структуры операций, которым они могут быть подчинены. Реальной практике, скорее всего, соответствует согласование системы матриц с системой операций. Ситуация усложняется, если согласованы между собой системы матриц и системы операций.

Законы для системы матриц на координатной операции

Системы матриц, рассматриваемые нами, планируется применять для моделирования физических явлений. Естественно проанализировать их свойства на основе применения системы операций. Особенно просто это сделать на координатной операции. Этот вариант кажется приближенным к процедуре взаимодействия реальных объектов, меняющих свои состояния и свойства без использования привычных для нашей практики матричных операций.

Проанализируем систему матриц, указав их координатное представление:

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.
$a=\begin{pmatrix}1&3&3&4\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}2&1&3&3\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}3&4&2&1\end{pmatrix}$	$d=\begin{pmatrix}4&4&1&2\end{pmatrix}$

Координатная операция суммирует координаты по модулю числа, равного размерности матриц. Аналогично применяется произведение координат. На этой основе получим

$$a^2=\begin{pmatrix}1&1&1&4\end{pmatrix}, \mathrm{b}^2=\begin{pmatrix}4&1&1&1\end{pmatrix}, \mathrm{c}^2=\begin{pmatrix}1&4&4&1\end{pmatrix}, d^2=\begin{pmatrix}4&4&1&4\end{pmatrix},$$
$$ab=(a+b)=\begin{pmatrix}3&4&2&3\end{pmatrix}, ac=(a+c)=\begin{pmatrix}4&3&1&1\end{pmatrix}, ad=(a+d)=\begin{pmatrix}1&3&4&2\end{pmatrix},$$
$$bc=(b+c)=\begin{pmatrix}1&1&1&4\end{pmatrix}, bd=(b+d)=\begin{pmatrix}2&1&4&1\end{pmatrix}, \mathrm{c}d=(c+d)=\begin{pmatrix}3&4&3&3\end{pmatrix}.$$

На этой основе получим закон, который рассматривался ранее в форме представления элементов проективной плоскости:

$$a+b+c+d=ab+cd=ad+b\mathrm{c}=ac+db.$$

У этого закона есть нелинейное продолжение

$$4(a+b+c+d)=4d^2=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2.$$

Выполним суммирование пар. Получим

$$ab+ac=3334, ab+ad=4321, ab+bc=4133, ab=bd=1124, ab+cd=2412,$$
$$ac+ad=1213, ac+bc=1421, ac+ad=2412, ac+cd=3344, ad+bc=2412,$$
$$ad+bd=3443, ad+cd=4331, bc+bd=3211, bc+cd=4143, bd+cd=1134.$$

Объединение пар имеет свои законы:

$$\left(bd+cd\right)^2=\left(ab+ac\right)^2=a^2,$$
$$(ab+bc)^2=\left(ad+cd\right)^2=b^2,$$
$$\left(ac+bc\right)^2=\left(ad+bd\right)^2=c^2,$$
$$\left(ac+bd\right)^2=\left(ab+cd\right)^2=\left(ad+bc\right)^2=d^2.$$

Следовательно, координатная операция генерирует на системе матриц систему индивидуальных законов.

Модель структурной геометрии

Система матриц, применяемая для моделирования физических явлений, имеет самостоятельные свойства. Рассмотрим модель геометрии, ассоциированной с системой матриц. Выполним модификацию матриц такого вида

$$\sigma_i A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}\to A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\sigma_i\xi_1&0&0&0\\0&\sigma_i\xi_2&0&0\\0&0&0&\sigma_i\xi_4\\0&0&\sigma_i\xi_3&0\end{pmatrix},\ldots$$

Системе матриц

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

по этому алгоритму при суммировании деформированных матриц ставится в соответствие объект

$$\sigma_1\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0&0\\0&\alpha_2&0&0\\0&0&0&\alpha_4\\0&0&\alpha_3&0\end{pmatrix}+\sigma_2\begin{pmatrix}0&\beta_2&0&0\\0&\beta_2&0&0\\0&0&\beta_3&0\\0&0&\beta_3&0\end{pmatrix}+\sigma_3\begin{pmatrix}0&\gamma_2&0&0\\\gamma_1&0&0&0\\0&0&\gamma_3&0\\0&0&0&\gamma_4\end{pmatrix}+\sigma_4\begin{pmatrix}\delta_1&0&0&0\\0&\delta_2&0&0\\0&0&0&\delta_4\\0&0&0&\delta_4\end{pmatrix}=g_{ij}.$$

Применим его в качестве метрического тензора, характеризующего влияние пары «полей» на систему объектов. Его компоненты имеют вид

$$g_{11}=\sigma_1\alpha_1+\sigma_4\delta_1,g_{22}=\sigma_1\alpha_2+\sigma_2\beta_2+\sigma_4\delta_2,g_{33}=\sigma_2\beta_3+\sigma_3\gamma_3,g_{44}=\sigma_3\gamma_4+\sigma_4\delta_4,\ldots$$

Метрические свойства в рассматриваемом случае имеет каждая матрица, равно как и их совокупность. Другой системе матриц соответствует «своя» геометрия. По этой причине есть возможность рассматривать индивидуальную реакцию разных систем матриц на одно и то же воздействие. Понятно, что геометрические свойства зависят от структуры рассматриваемых матриц. По этой причине мы имеем дело со структурной геометрией.

Алгоритм позволяет ввести динамику для системы из 5 «полей». В зависимости от структуры рассматриваемых матриц мы получим разные геометрии. Динамика «полей» согласована с динамикой геометрических свойств.

Возможен и другой вариант; общему метрическому тензору ставится в соответствие часть этого тензора, согласованная с системой матриц, представляющих реагирующее физическое тело. Понятно, что так можно анализировать не только физические тела, но и тела Сознаний и Чувств. Если каждый из указанных элементов задан «своей» системой матриц, то у них будет разная реакция на одно и то же воздействие.

Ситуация усложняется, если на каждое «тело» влияет своя система «полей» и эти «поля» структурно и динамически согласованы друг с другом. Физические условия и обстоятельства могут и должны быть учтены таким образом, чтобы было достигнуто оптимальное соответствие между экспериментальными фактами и математическими их реализациями.

Связь координатной операции с другими операциями

Проанализируем возможность генерирования групп по координатной операции на основе одной матрицы.

Суммируя координаты исходной матрицы, получим 4 матрицы, которые аналогичны циклической группе. Так, например, получим

$$\alpha = a == \boxed{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}}, \beta = 2a = \boxed{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}},$$

$$\gamma = 3a = \boxed{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array}}, E = 4a = \boxed{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}}.$$

Получим таблицу «произведений» на координатной операции:

$$\begin{array}{c|cccc} \hat{\times} & E & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline E & E & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \alpha & \beta & \gamma & E \\ \beta & \beta & \gamma & E & \alpha \\ \gamma & \gamma & E & \alpha & \beta \end{array}.$$

Аналогично получим наборы матриц:

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\mathrm{E}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\mathrm{E}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

По указанному алгоритму можно конструировать другие наборы матриц. Они могут рассматриваться в качестве основы для моделирования физических моделей.

Комбинаторные произведения первого блока матриц генерируют набор матриц

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

С физической точки зрения так описывается система предзарядов электрического типа.

Из анализа таблицы произведений следуют матрицы структурной операции:

$$E\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\alpha\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\beta\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\gamma\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Их комбинаторные произведения генерируют скрытые матрицы:

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\end{pmatrix}$
$e=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\sigma=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\kappa=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\rho=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

.

Две совокупности матриц образуют систему, состоящую из 8 матриц: четверной группы Клейны и смежного класса B. Эти же матрицы следуют из матричного произведения исходных матриц.

Получим таблицу:

$\overset{m}{\times}$	E	α	β	γ
E	e	ρ	κ	σ
α	σ	e	ρ	κ
β	κ	σ	e	ρ
γ	ρ	κ	σ	e

.

Мы обнаружили согласование системы операций: координатной, комбинаторной, структурной, матричной.

Однако только координатная операция генерирует по одной матрице систему матриц. Она достаточна для базового моделирования физических явлений. Дополнив её знаковой группой, мы получим возможность генерирования элементов матричной алгебры.

Каждая операция имеет свои свойства. Они дополняют друг друга. По этой причине можно предполагать, что физическая модель, сконструированная на отдельной операции, имеет скрытые свойства, дополняющая свойства этой операции. Для полноты исследования необходимо изучить структуру и действия всей системы операций.

Поперечная координатная операция

Назовем координатную операцию, введенную и анализируемую ранее, продольной координатной операцией. В этом варианте «координаты» значимых элементов задавались в соответствии с их расположением в строках матриц. Введем поперечную координатную операцию. Зададим координаты значимых элементов согласно их расположению в столбцах матриц. Ситуация формально выглядит аналогично предыдущему случаю. Однако, с физической точки зрения, ситуации различаются, так как операции генерируют разные системы объектов. Получим, например, группы

$$A \to \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}1&2&2&4\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}2&4&4&4\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}3&2&2&4\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}4&4&4&4\end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$B \to \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}2&4&2&4\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}3&2&1&4\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}4&4&4&4\end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$C \to \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}2&3&4&1\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}4&2&4&2\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}2&1&4&3\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}4&4&4&4\end{pmatrix} \\ \hline \end{array}$$

Объединим начальные элементы групп B,C и сгруппируем их иначе для выполнения продольных координатных операций.

Получим две новые группы:

$$B^* \to \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&1&3&3\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&2&2&2\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}3&3&1&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4&4&4&4\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},$$

$$C^* \to \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4&2&2&4\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4&4&4&4\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}.$$

Спектр логических операций

Ранее была введена логическая операция, ассоциированная с группой Клейна. Произведения элементов матриц задаются таблицей

$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{14}+a_{13}b_{13}+a_{14}b_{12}$	$a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{13}b_{14}+a_{14}b_{13}$	$a_{11}b_{13}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{11}+a_{14}b_{14}$	$a_{11}b_{14}+a_{12}b_{13}+a_{13}b_{12}+a_{14}b_{11}$
$a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{24}+a_{24}b_{23}$	$a_{21}b_{23}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{21}+a_{24}b_{24}$	$a_{21}b_{24}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{22}+a_{24}b_{21}$	$a_{21}b_{21}+a_{22}b_{24}+a_{23}b_{23}+a_{24}b_{22}$
$a_{31}b_{33}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{34}$	$a_{31}b_{34}+a_{32}b_{33}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{31}$	$a_{31}b_{31}+a_{32}b_{34}+a_{33}b_{33}+a_{34}b_{32}$	$a_{31}b_{32}+a_{32}b_{31}+a_{33}b_{34}+a_{34}b_{33}$
$a_{41}b_{44}+a_{42}b_{43}+a_{43}b_{42}+a_{44}b_{41}$	$a_{41}b_{41}+a_{42}b_{44}+a_{43}b_{43}+a_{44}b_{42}$	$a_{41}b_{42}+a_{42}b_{41}+a_{43}b_{44}+a_{44}b_{43}$	$a_{41}b_{43}+a_{42}b_{42}+a_{43}b_{41}+a_{44}b_{44}$

.

Запишем каждую строку по-новому:

$$\begin{array}{|cccc|}\hline a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\ \hline b_{11}&b_{14}&b_{13}&b_{12}\\ b_{12}&b_{11}&b_{14}&b_{13}\\ b_{13}&b_{12}&b_{11}&b_{14}\\ b_{14}&b_{13}&b_{12}&b_{11}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|cccc|}\hline a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\ \hline b_{22}&b_{21}&b_{24}&b_{23}\\ b_{23}&b_{22}&b_{21}&b_{24}\\ b_{24}&b_{23}&b_{22}&b_{21}\\ b_{21}&b_{24}&b_{23}&b_{22}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|cccc|}\hline a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\ \hline b_{33}&b_{32}&b_{31}&b_{34}\\ b_{34}&b_{33}&b_{32}&b_{31}\\ b_{31}&b_{34}&b_{33}&b_{32}\\ b_{32}&b_{31}&b_{34}&b_{33}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|cccc|}\hline a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\\ \hline b_{44}&b_{43}&b_{42}&b_{41}\\ b_{41}&b_{44}&b_{43}&b_{42}\\ b_{42}&b_{41}&b_{44}&b_{43}\\ b_{43}&b_{42}&b_{41}&b_{44}\\ \hline\end{array}.$$

Элементы получаются суммированием произведений, ассоциированных с указанными строками. Мы имеем вариант продольного логического произведения. Поперечное логическое произведение получается при произведении элемента в строке не сумму элементов в столбце. Например, получим простую модель с компонентами

$$\sigma_{11}=a_{11}\left(b_{11}+b_{12}+b_{13}+b_{14}\right),\sigma_{12}=a_{12}\left(b_{11}+b_{12}+b_{13}+b_{14}\right),...$$

Продольное логическое произведение базируется на матрицах

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Эти матрицы могут рассматриваться как система, генерируемая из единичной матрицы на основе последовательной трансляции значимых элементов согласно сигнатуре $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. С ними согласовано размещение значимых элементов второй матрицы. Система сконструирована из пары матриц, принадлежащих четверной группе Клейна и пары матриц, принадлежащих её смежному классу B

Аналогично можно рассмотреть другие возможности. Например, получим систему матриц для конструирования логического произведения, состоящую из пар матриц смежных классов E, C четверной группы Клейна. Она имеет вид

$$e_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{c}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \mathrm{c}_4 \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Компонуя по данной системе матриц элементы второй матрицы, получим новый вариант логического произведения. Следовательно, мы имеем спектр логических операций, структура и свойства которых могут быть полезны для физического моделирования.

Спектр геометрий для системы отношений

Каждую матрицу можно рассматривать как аналог метрического тензора римановой геометрии. Пару матриц можно рассматривать «источник» системы отношений, генерируя по дополнительному алгоритму матрицу, ассоциированную с парой. Эта «итоговая» матрица может рассматриваться как элемент геометрии того или другого типа.

В простом случае имеет место сложение компонент матриц. Например, получим матрицу

$$g_{ij} \to \begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & a_{14}+b_{14}\\a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24}\\a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & a_{34}+b_{34}\\a_{41}+b_{41} & a_{42}+b_{42} & a_{43}+b_{43} & a_{44}+b_{44}\end{pmatrix}.$$

Другая модель получается при распределении элементов матриц вида

$$\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0 & 0\\0 & a_{22} & 0 & 0\\0 & 0 & a_{33} & 0\\0 & 0 & 0 & a_{44}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & a_{12} & 0 & 0\\a_{21} & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & a_{34}\\0 & 0 & a_{43} & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & a_{13} & 0\\0 & 0 & 0 & a_{24}\\a_{31} & 0 & 0 & 0\\0 & a_{42} & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & a_{14}\\0 & 0 & a_{23} & 0\\0 & a_{32} & 0 & 0\\a_{41} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

с применением к ним координатной операции. Получим

$$\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0 & 0\\0 & a_{22} & 0 & 0\\0 & 0 & a_{33} & 0\\0 & 0 & 0 & a_{44}\end{pmatrix} \overset{q}{\times} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & a_{14}\\0 & 0 & a_{23} & 0\\0 & a_{32} & 0 & 0\\a_{41} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}a_{14} & 0 & 0 & 0\\a_{22}a_{23} & 0 & 0 & 0\\a_{33}a_{32} & 0 & 0 & 0\\a_{44}a_{41} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \overset{q}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{11}a_{13} \\ 0 & a_{22}a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{33}a_{31} \\ 0 & a_{44}a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

Ситуация выглядит иначе на основе сигнатурной операции. Сигнатура базовых матриц такова:

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}.$$

Произведения на сигнатурной операции генерируют новые матриц. Их сумма задает новый «метрический тензор». В частности, так получаются величины, характеризующие отношения пары матриц (объектов). С системой операций ассоциирована система геометрий.

Пересечение группы и полугруппы

Рассмотрим систему групп на координатной операции, ассоциированную с выборкой элементов по четверной группе Клейна.

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{14} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array},$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{44} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$.
$(4 \quad 3 \quad 2 \quad 1)$	$(4 \quad 2 \quad 4 \quad 2)$	$(4 \quad 1 \quad 2 \quad 3)$	$(4 \quad 4 \quad 4 \quad 4)$

Эти элементы можно рассматривать, отвлекаясь от указанных значений, как матричные произведения элементов первого столбца на элементы первой строки. Первый столбец с дополнением его единичной матрицей есть группа Клейна. Первая строка есть полугруппа: произведение её элементов ассоциативно, однако нет обратных элементов и единичной матрицы.

Мы имеем произведение группы на полугруппу. Группы на координатной операции есть полугруппы на матричном произведении. Специфика их в том, что первая строка выделена в системе полугрупп. Последующие строки получаются из первой строки при умножении на первый соответствующий элемент первого столбца. Мы имеем смежные классы по полугруппе.

Взаимные произведения элементов каждой группы на координатной операции на себя генерируют элементы первого столбца и первой строки, а также систему левых идеалов и несколько дополнительных элементов. Согласно принятой терминологии, строки генерируют скрытые элементы.

Первый и второй столбец есть аналог группы, которая получается при объединении четверной группы Клейна и ее смежного класса B.

Скрытые элементы генерируются также при взаимном произведении элементов второго столбца.

Геометрия мест значимых элементов

Группа на координатной операции базируется на структуре мест значимых элементов анализируемых матриц. Поскольку места задаются положительными числами, матрице можно поставить в соответствие многогранник. Для этого нужно рассмотреть несколько нормированных прямых, выходящих из одной точки, отметив на них координаты значимых элементов по строкам. Получим геометрическое представление матрицы. Для матриц с размерностью 4 удобно задать площадь полученной фигуры. Она будет равна сумме последовательных произведений мест значимых элементов матрицы. В таком варианте набор матриц характеризуется своими геометрическими фигурами и своими «площадями».

Рассмотрим конкретный пример. Представим рисунком единичную матрицу и найдем соответствующую ей «площадь». Получим

					ξ					
		F			G	H				
z		E			0	A				x
		D			C	B				
					y					

,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{|c|c|} \hline \xi = 4 & x = 1 \\ \hline z = 3 & y = 2 \\ \hline \end{array},$$

$$S_{OABC} = 1 \cdot 2 = 2, S_{OCDE} = 2 \cdot 3 = 6, S_{OEFG} = 3 \cdot 4 = 12, S_{OGHA} = 1 \cdot 4 = 4,$$
$$Q = S_{OABC} + S_{OCDE} + S_{OEFG} + S_{OGHA} = 24.$$

Совокупность матриц, рассматриваемая выше, имеет геометрическое и числовое представление. Получим соответствия

$$Q = 12 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}, Q = 32 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}, Q = 12 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, Q = 64 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array},$$

$$Q = 12 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}, Q = 32 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array}, Q = 12 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array}, Q = 64 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array},$$

$$Q = 12 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}, Q = 32 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}, Q = 12 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, Q = 64 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array},$$

$$Q = 12 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, Q = 32 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array}, Q = 12 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}, Q = 64 \to \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Группы и смежный класс имеют одинаковые числовые параметры.

Геометрия знаковой группы

Из анализа физических моделей следует факт, что чаще всего они сконструированы на основе синтеза группы перестановок и знаковой группы. Структура знаковой группы для системы, состоящей из 4 объектов, включает такие элементы

$$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \\ + \end{pmatrix}.$$

Единицей такой группы является столбец, содержащий плюсы. Произведение элементов задается на основе произведения знаков.

Материализуем знаковую группу. Заменим каждый её элемент матрицей по определенному алгоритму: переставим значимые элементы на единицу вправо или влево от значимых элементов исходной матрицы. Получим систему, состоящую из 8 матриц. Перестановкам значимых элементов соответствует набор чисел $(-1, 0, 1)$. Параллельно им соответствует набор координат значимых элементов матриц.

Первый набор чисел можно применить для конструирования операции, которая превращает систему матриц в группу.

Например, получим

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}\\ a\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}1&-1&1&-1\end{pmatrix}\\ b\begin{pmatrix}2&1&4&3\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}1&1&-1&-1\end{pmatrix}\\ c\begin{pmatrix}2&3&2&3\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}1&-1&-1&1\end{pmatrix}\\ d\begin{pmatrix}2&1&2&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\\ e\begin{pmatrix}4&1&2&3\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}-1&1&1&-1\end{pmatrix}\\ f\begin{pmatrix}4&3&4&3\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}-1&-1&1&1\end{pmatrix}\\ g\begin{pmatrix}4&1&4&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}-1&1&-1&1\end{pmatrix}\\ h\begin{pmatrix}4&3&2&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array}.$$

Произведение матриц зададим на основе суммирования индексов матриц вида

+	−1	0	1
−1	1	−1	−1
0	−1	0	1
1	−1	1	1

.

Единичная матрица выполняет функцию единицы группы. У каждой матрицы есть обратная матрица. Произведение матриц ассоциативно. Найдем разности между координатами рассматриваемых матриц и исходной матрицы. Они таковы:

ξ_i	$a(1234)$	$b(2143)$	$c(2323)$	$d(2121)$	$e(4123)$	$f(4343)$	$g(4141)$	$h(4321)$
δ_i	0000	1−11−1	11−1−1	1−1−1−3	3−1−1−1	311−1	3−11−3	31−1−3

.

Евклидово расстояние между базовой матрицей и другими матрицами можно представить графически:

	f				d	
		↖		↗		
	c	←	a	→	b	
		↙	↓	↘		
	↙		↓		↘	
h			e			g

.

Мы имеем группу матриц. Она имеет геометрическое представление.

Рассмотрим вариант «мужской» опорной модели. Получим, например, систему матриц

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}\\ a\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&-1&1&-1\end{pmatrix}\\ b\begin{bmatrix}2&4&2&4\end{bmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&1&-1&-1\end{pmatrix}\\ c\begin{bmatrix}2&2&4&4\end{bmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&-1&-1&1\end{pmatrix}\\ d\begin{bmatrix}2&4&4&2\end{bmatrix}\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\\ e\begin{bmatrix}4&4&4&4\end{bmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}-1&1&1&-1\end{pmatrix}\\ f\begin{bmatrix}4&2&4&2\end{bmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}-1&-1&1&1\end{pmatrix}\\ g\begin{bmatrix}4&4&2&2\end{bmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}-1&1&-1&1\end{pmatrix}\\ h\begin{bmatrix}4&2&4&2\end{bmatrix}\\ \hline\end{array}.$$

Ей соответствует таблица расстояний:

α	a	b	c	d	e	f	g	h
r	0	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	6	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$

.

Представим расстояния графически:

		e		
g		$\uparrow$		h
	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	
f	$\leftarrow$	a	$\rightarrow$	b
	$\swarrow$		$\searrow$	
d				c

.

Предварительный анализ свидетельствует, что указанные два типа геометрий типичны для большинства матриц. Можно говорить о геометриях, ассоциированных со знаковой группой, «женского» и «мужского» типа.

Для конструирования физических моделей желательно иметь наборы матриц, у которых заполнены все значимые места. Применяя к такому набору знаковую группу, получим элементы матричной алгебры. По этому алгоритму любая физическая модель может быть записана на основе матриц исходного набора. С другой стороны, данный набор достаточен для конструирования уравнений физики в соответствии с набором дифференциальных операторов и волновых функций. Поскольку желательно описывать не только физические тела, но и тела Сознаний и Чувств, таких согласованных между собой исходных наборов должно быть четыре в четырехмерном пространстве.

Геометрия системы сигнатурных групп

Естественно задать набор сигнатурных групп на основе одной опорной матрицы, выполнив расширение на основе трансляций, ассоциированных со знаковой группой. В этом случае получим логическую диаграмму

			1			
			1			
			1			
1	−1	−1	[1]	−1	1	−1
			1			
			−1			
			−1			

.

Есть четыре возможности трансляций. Реализуем их на конкретном примере:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&3&4&2\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&4&1&3\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}3&1&2&4\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4&2&3&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&3&4&2\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&2&1&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}3&1&2&4\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4&4&3&3\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&3&4&2\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&4&3&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}3&1&2&4\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4&2&1&3\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&3&4&2\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&2&3&3\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}3&1&2&4\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4&4&1&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}.$$

Квадраты координат, указанных ниже матриц, образуют два набора: $\begin{pmatrix}0&4&16&20\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&12&16&12\end{pmatrix}$. Им можно поставить в соответствие круг и эллипс:

$$c^2 = a^2 + b^2, c^2 = a^2 + \sigma b^2.$$

Рассмотрим другую модель, когда опорная матрица есть единичная матрица. По указанному алгоритму получим систему матриц:

$$1111\to \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$1{-}11{-}1\to \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$11{-}1{-}1\to \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$1{-}1{-}11\to \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Выполним матричные произведения, мы обнаружим, что группу образует система матриц;

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что мы имеем дело с факторгруппой, у которой есть нормальная подгруппа

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы первой строки образуют четверную группу Клейна. Другая группа получается при объединении элементов первой и второй строк. Третья строка вместе с указанной нормальной подгруппой есть самостоятельная группа. Аналогично получается группа на четвертой строке матриц. Матричное произведение элементов исходного множества в форме групп на координатной операции расширено до семейства групп на матричной операции. На полученной системе матриц можно моделировать четыре типа физических моделей: для Тела, Сознания и пары Чувств. Все матрицы получены из единого начала в форме системы свободных объектов, обладающих свойством вступления в отношения. Группа трансляций генерирует часть полной совокупности матриц, которая обладает свойством заполнения всех значимых мест в матрице. Она «держится» на паре матриц, образующих нормальную группу на матричной операции. Дополнительные матрицы, указанные выше, образуют еще один набор матриц, заполняющих все значимые места. Такая реализация «отделена» от нормальной подгруппы. Другими словами, кроме «явных» уравнений для Сознаний и Чувств есть еще «скрытые», «теневые» уравнения для Сознаний и Чувств. Эта возможность может быть реализована лишь при расширении рассматриваемой группы на основе знаковой группы. Поэтому порядок группы для частной модели Тел, Сознаний, Чувств выражается формулой

$$N = 16 \cdot 8 = 128.$$

Данное семейство матриц есть алгебра. Оно подчинено операции

$$a * b = \left(a \overset{m}{\times} b \right) \hat{+} \left(a \hat{+} b \right).$$

Например, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{+} \left(4141 \hat{+} 4321 \right) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 4 & 1 & 4 \\ \hline + & 4 & 4 & 2 & 2 \\ \hline = & 1 & 4 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Между собой согласованы матричная операция и координатная операция суммирования по модулю числа, равного размерности матриц. Следовательно, единство Тел, Сознаний, Чувств базируется на алгебре отношений.

Есть и другие возможности и варианты. В частности, рассмотрим операцию вида

$$a \oplus b = a \hat{+} b \hat{+} a, b \oplus a = b \hat{+} a \hat{+} b.$$

Она согласована со структурой элементов рассматриваемого множества. Например, получим

$$
\begin{aligned}
a \oplus b &= 1414 \oplus 3434 = 1414 \hat{+} 3434 \hat{+} 1414 = 1414,\\
b \oplus a &= 3434 \oplus 1414 = 3434 \hat{+} 1414 \hat{+} 3434 = 3434....
\end{aligned}
$$

Принятое «повторное сложение» некоммутативно

$$a \oplus b \neq b \oplus a.$$

Коммутативная операция на паре элементов становится некоммутативной при повторении элементов суммирования. Операция генерирует дополнительную систему матриц:

$$
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}1&3&3&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}1&3&1&3\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}1&1&3&3\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
$$

$$
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}2&2&2&2\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}2&4&4&2\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}2&2&4&4\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}2&4&2&4\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
$$

$$
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}3&3&3&3\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}3&1&3&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}3&1&1&3\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}3&3&1&1\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
$$

$$
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}4&4&4&4\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}4&4&2&2\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}4&2&2&4\end{pmatrix}\\\hline\end{array},
\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}4&2&4&2\end{pmatrix}\\\hline\end{array}.
$$

Получен набор «теневых» матриц. Их свойства «ближе» к электрическим предзарядам. Мы вправе предположить, что электрическая часть фундаментальной материи является операционным продуктом, ассоциированным с гравитационными предзарядами. Так снова на первом месте в смысле генерации материи и её свойств стоит гравитация.

Можно ввести еще одну операцию. Сопоставим матрице «вектор» с весовыми коэффициентами, согласованными с положением значимых элементов.

Рассмотрим модель

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 1 & 2 & 3 \\ \hline x & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline z & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{l} x = a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13}, \\ y = a_{21} + 2a_{22} + 3a_{23}, \\ z = a_{31} + 2a_{32} + 3a_{33}. \end{array}$$

При суммировании матриц в рамках указанной модели мы можем нормирующие коэффициенты складывать по модулю числа, равного размерности рассматриваемых матриц. Тогда, например, получим по первой строке

$$\left((a+b)+c\right)_x = a_{11} + b_{11} + c_{12} + 2(a_{12} + b_{12} + c_{11}) + 3(a_{13} + b_{13} + c_{13}),$$
$$\left(a+(b+c)\right)_x = a_{12} + b_{11} + c_{11} + 2(a_{11} + b_{12} + c_{12}) + 3(a_{13} + b_{13} + c_{13}).$$

Множество с такой операцией неассоциативно:

$$(a+b)+c \neq a+(b+c).$$

Ассоциативное множество превратилось в неассоциативное на основе введения новой операции. Этот вариант аналогичен вариантам, исследованным ранее. Есть основания говорить о фундаментальной роли операций (взаимодействий) в эволюции физических изделий и их свойств. Есть система объектов и система операций. Обе эти системы имеют свои законы изменений и согласования друг с другом. Поскольку операциям, так или иначе, свойственна логика, мы имеем дело с изделиями в некотором логическом пространстве. Визуальное пространство и логическое (невидимое) пространство образуют фундаментальную пару пространств. Их динамика и эволюция обеспечивает изменчивость и разнообразие Реальности. Для оценки изменений структуры и эволюции совокупностей матриц можно применить спектр координатных расстояний. Они соответствуют сумме квадратов координат значимых элементов. Так, например, этот спектр меняется при переходе от системы «теневых» матриц к полной системе матриц:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline n & 8 & 8 \\ \hline r^2 & 20 & 40 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline n & 2 & 2 & 2 & 8 & 2 \\ \hline r^2 & 10 & 18 & 26 & 30 & 40 \\ \hline \end{array}.$$

Наличие 4 систем уравнений, «вытекающих» из системы, ассоциированной с единичной матрицей, если уравнения согласованы друг с другом, имеет аналогию с «пирамидой», в основании которой находится прямоугольник.

Гипотеза о наличии у каждого изделия не только физического тела, но и тел Сознаний и Чувст естественна для каждого исследователя, который принял идею единства Реальности. Принимая наличие и функционирование Сознания и Чувств у себя, вряд ли корректно отрицать наличие аналогичных свойств и сторон у других изделий материального мира. При таком подходе нет оснований принимать своё Созание и Чувства в качестве высшего уровня Сознаний и Чувст. Есть как учиться и чему учиться.

Связь матричного произведения групп и групп на сигнатурной операции

На первый взгляд кажется, что группы на матричной операции и на сигнатурной операции не согласованы друг с другом. Анализ показывает, что это не так. Одно согласование известно: есть группы, элементы которой одинаковы, но они подчинены разным операциям. Группы эти неизоморфны, их таблицы произведений различны. Другое согласование в том, что система сигнатурных групп может быть получена на основе матричного произведения групп, основанных на матричной операции. Этому варианту соответствует таблица:

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

.

Первый столбец сконструирован на основе симметрической группы S_4. Первая строка есть известная система элементов, образующая группу на матричной, а также на сигнатурной операции. Группы на матричной операции и на комбинаторной операции согласуются между собой. По этой причине их применение в физике может давать похожие или разные результаты. Нужны конкретные приложения.

Геометрии матриц

Геометрия физических объектов ассоциирована обычно с их визуальным представлением. Однако геометрию можно связать также и с матрицами. Проще всего эту возможность проиллюстрировать на конкретном примере. Проанализируем вариант

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}.$$

Согласно введенным обозначениям получим пару геометрий:

$$AB + BC = AC \to (2-1) + (3-2) = (3-1),$$
$$AC + BD = AD + BC \to (3-1) + (4-2) = (4-1) + (3-2).$$

Аналогично можно складывать матрицы:

$$AB + BC = AC \to (B - A) + (C - B) = (C - A),$$
$$AC + BD = AD + BC \to (C - A) + (D - B) = (D - A) + (C - B).$$

Есть другая сторона геометрии. Морфологической формуле можно поставить в соответствие матрицы, приняв новое их прочтение. Например, «читаем» формулы

$$AB + CD = CD + AB, A + B + C + D = D + C + B + A$$

так: на A находится «место» B, на B находится «место» A и т.д. Сопоставив числа, равные единице, получим четыре матрицы, формируя четверную группу Клейна:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь координатную операцию. Сопоставим строкам координаты пространства, размерность которого равна размерности матриц. Координаты запишем на основании мест, которые значимый элемент занимает в строке. При суммировании матриц на основе координатной операции будем суммировать соответствующие координаты по модулю числа, равного размерности квадратных матриц. По этому алгоритму системе матриц, имеющих одно значимое место в строке, сопоставится при суммировании другая система матриц. Координатная операция способна расширить группу.

Координатная операция на матричной группе перестановок из трех элементов

Применим единичную группу трансляции значимых элементов к паре диагональных матриц со значимыми элементами, равными единице. Получим такие наборы матриц:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Аналогичные системы матриц получаются при перестановке элементов в обратную сторону. Следовательно, разные алгоритмы трансляций способны генерировать одинаковые наборы матриц. Приведенный алгоритм можно рассматривать как алгоритм расширения группы на матричной операции, состоящей из двух матриц с диагональными элементами.

Выполним координатное суммирование этих матриц. Получим таблицы:

$\overset{c}{\times}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

,

$\overset{c}{\times}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

.

Координатное суммирование элементов нормальной подгруппы симметрической группы S_3 генерирует её смежный класс. Аналогично из координатного суммирования элементов смежного класса следуют элементы нормальной подгруппы. Координатная операция выполняет функцию инструмента расширения группы. Координатная операция обладает тем свойством, что многократное суммирование генерирует вырождение множества. В рассматриваемой модели справедлив закон

$$3\left(a_i \hat{+} b_j\right)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Представим элементы симметрической группы S_3 геометрически. Для этого найдем для каждой матрицы корни характеристического полинома

$$Det\left(A-\lambda E\right)=f\left(\gamma\right)=0.$$

Получим соответствия:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow f\left(\gamma\right)=\left(1-\lambda\right)^3,\gamma_1=1,\gamma_2=1,\gamma_3=1\Rightarrow$$

-1_λ	0_λ	1_γ
		*
		*
		*

,

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\rightarrow f\left(\gamma\right)=(-\lambda)^3,\gamma_1=0,\gamma_2=0,\gamma_3=0\Rightarrow$$

-1_λ	0_λ	1_γ
	*	
	*	
	*	

,

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\rightarrow f\left(\gamma\right)=\lambda^2\left(1-\lambda\right),\gamma_1=0,\gamma_2=0,\gamma_3=1\Rightarrow$$

-1_λ	0_λ	1_γ
	*	
	*	
		*

,

-1_λ	0_λ	1_γ
*		
	*	
*		

,

-1_λ	0_λ	1_γ
		*
	*	
	*	

,

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\rightarrow f\left(\gamma\right)=\left(1-\lambda\right)\left(\lambda^2-1\right),\gamma_1=1,\gamma_2=1,\gamma_3=-1\Rightarrow$$

$\Rightarrow$

-1_λ	0_λ	1_γ
		*
		*
*		

,

-1_λ	0_λ	1_γ
		*
*		
		*

,

-1_λ	0_λ	1_γ
*		
		*
		*

.

Структурное расположение корней характеристических полиномов для подгруппы аналогично модели электрических предзарядов. У элементов смежного класса это распределение деформировано. Оно сочетает структурные черты электрического и гравитационного типа. На уровне структуры исходных матриц распределение элементов мономиально, мы соотносим эту ситуацию с гравитационным полем. Следовательно, мы опять получили аргумент, что электрические свойства скрытны и производны от гравитационных свойств.

Заметим, что у системы матриц есть новое общее «топологическое» свойство. Рассмотрим в качестве критерия класса элементов совпадение одного места значимых элементов. Тогда любой элемента такого класса дополняется еще тремя элементами.

Система операций на множестве матриц

Базовая идея объединения в одну систему уравнений для Тел, Сознаний, Чувств состоит в том, что для реализации такого плана есть *две общие возможности*. Одна возможность обеспечивается на основе 4 систем матриц, полученных единым образом и одной системе операций, которой они подчинены. Такова «пирамида» единых законов.

Другая возможность обеспечивается на основе одной системы матриц и 4 операций, которые могут быть как-то согласованы между собой. Проанализируем вторую возможность на множестве пронумерованных матриц вида

(1)	(2)	(3)
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,

(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Таблицы их матричных и комбинаторных произведений таковы:

$\overset{m}{\times}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&8&9\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&5&6\\6&4&5\\5&6&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&8&9\\7&8&9\\7&8&9\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&5&6\\5&6&4\\6&4&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&8&0\\7&8&9\\7&8&9\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&8&9\\8&9&7\\9&7&8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&8&9\\9&7&8\\8&9&7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&8&9\\7&8&9\\7&8&9\end{pmatrix}$

,

$\overset{k}{\times}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&8&9\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&8&9\\8&7&9\\9&8&7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&6&5\\5&4&6\\6&5&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&9&8\\8&7&9\\9&8&7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&6&5\\5&4&6\\6&5&4\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&6&5\\5&4&6\\6&5&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&9&8\\8&7&9\\9&8&7\end{pmatrix}$

.

Таблицы их координатных и ассоциированных произведений (пары групп) таковы:

$\overset{c}{\times}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&8&9\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&6&4\\6&4&5\\4&5&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8&9&7\\9&7&8\\7&8&9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8&9&7\\9&7&8\\7&8&9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&6&4\\6&4&5\\4&5&6\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&6&4\\6&4&5\\4&5&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8&9&7\\9&7&8\\7&8&9\end{pmatrix}$

,

$\overset{s}{\times}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&8&9\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&5&6\\7&3&8\\8&4&9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&8&9\\9&1&5\\1&5&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&7&8\\5&3&4\\6&8&9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9&6&1\\6&2&7\\1&7&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&2&3\\8&9&1\\2&3&4\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7&9&1\\8&1&5\\9&5&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&8&2\\2&9&3\\3&1&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&4&6\\4&6&7\\6&7&8\end{pmatrix}$

.

Законы взаимного соответствия матриц зависят от операции и допускают эволюцию.

Группа на координатной операции, полученная нами имеет специфику: она не только разрешима, каждый её элемент нильпотентен на координатной операции со степенью нильпотентности, равной размерности матриц.

Мы понимаем, что наличие системы операций ассоциировано с вариантами и возможностями реального взаимодействия объектов. Его проявления на практике косвенно связаны с математическими образами. Достаточно трудно понять такую связь.

Обратим внимание на «творческие» возможности операций. Для одной системы математических объектов они генерируют разные совокупности матриц (объектов и отношений). Рассмотрим, например, координатную операцию для 5 матриц:

$\overset{c}{\times}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

.

Операция генерирует 21 новую матрицу на основе начальных 5 матриц. На таком этапе «эволюции» в практические отношения вступают 26 матриц. Они реализуют дальнейшее развитие и обеспечивают дальнейшую динамику. Принципиальное отличие группы на координатной операции в том, что роль единицы выполняет матрица, которая на матричном произведении есть левый идеал. В рассматриваемом случае идеалу соответствует физика «конденсации»: несколько объектов объединены в единый объект, занимают одинаковое значимое место в матрицах. Но именно этот механизм рассматривается как основной механизм образования объектов из «пыли» в форме свободных объектов. Группы на матричной операции содержат единицу в математической модели системы свободных объектов. Так поддерживается идеология отсутствия влияния на объекты и отношения системы свободных объектов.

Теперь мы имеем алгоритмы описания двух основных механизмов взаимодействия: без влияния и с «конденсацией». Понятно, что они могут действовать на разных этапах динамики и эволюции. Поэтому возможны разные сценарии развития. Они зависят от того, какой операции или системе операций подчинена данная совокупность матриц.

Таблица комбинаторных произведений такова:

$\overset{k}{\times}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

.

Она генерирует 16 новых объектов. Матричное произведение генерирует в данной ситуации 8 новых объектов. Ассоциативное произведение, по своей сути и форме новых объектов не генерирует. Следовательно, операции можно оценивать по спектру генерации новых элементов. В рассматриваемом случае имеем таблицу:

Операция	$\overset{c}{\times}$	$\overset{k}{\times}$	$\overset{m}{\times}$	$\overset{a}{\times}$
Элементы	21	16	8	0

.

Рассматриваемые множества допускают *структурную топологию*. В качестве открытых множеств можно рассматривать совокупности, у которых есть значимый диагональный элемент в первой, второй, третьей строке. Их объединение имеет указанные свойства. Их дополнения конечны.

По этой причине структурная топология есть аналог топологии Зарисского, в которой дополнения к открытым множествам конечны.

Разрешимые и нильпотентные группы для физики

Основные фундаментальные уравнения физики можно легко записать на группе перестановок S_3, расширив её посредством знаковой группы. По этой причине общие свойства группы S_3 фиксируют общие свойства физической реальности. Отметим их в рамках общей теории групп. Рассмотрим представление группы S_3 вида

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Имеем таблицу произведений:

$\overset{m}{\times}$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	6	4	5
3	3	1	2	5	6	4
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	4	3	1	2
6	6	4	5	2	3	1

Анализ группы предполагает рассмотрение системы коммутаторов

$$[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}.$$

В данном случае коммутант: группа, порожденная множеством всех коммутаторов, образован тройкой элементов 1,2,3. В этом варианте

$$D_2(G)=[[g,g],[g,g]]=1,$$
$$C_2(G)=[[g,g],g]=[g,g].$$

Согласно первому условию группа S_3 разрешима, однако она не является нильпотентной. Дополним группу S_3 матрицами

(7)	(8)	(9)
$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

и применим к полной системе координатную операцию. В итоге мы генерируем коммутативную группу порядка 9 на координатной операции. Коммутатор в данном случае есть совокупность единичных матриц. Эта группа разрешима и нильпотентна.

Активные деформации четырехметрик

Мы рассматриваем моделирование физических и психологических явлений, базирующееся на матрицах размерности четыре. Этот вариант допускает алгебраическое представление. Для этого введем функцию

$$\Pi = \alpha \det \| XI - A \| + \beta S_p \| XI - A \| .$$

Получим полином $\Pi = a_1 x^4 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1$. Назовем его потенциальной функцией деформации четырехметрик, ассоциированных с явлением. Преобразуя, получим потенциальную функцию катастрофы сборки:

$$V(x, a, b) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} a x^2 + bx .$$

Многообразие катастрофы сборки имеет вид:

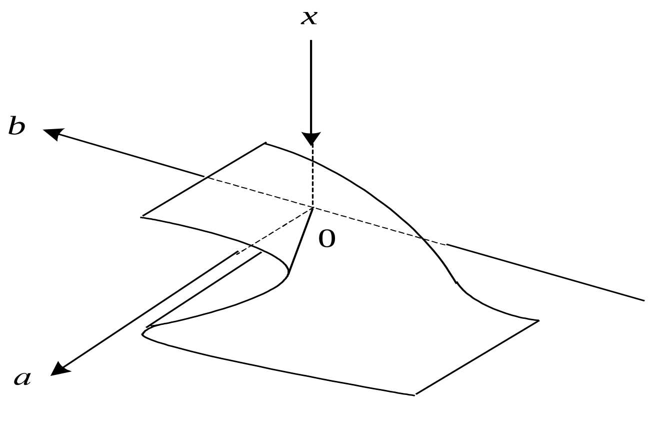
$$M_3 = \{ (x, a, b) \mid x^3 + ax + b = 0 \} .$$

Есть особое множество $\Delta = \{ (x, a, b) | \in M_3 \mid 3x^2 + a = 0 \}$ и бифуркационное множество $D = \{ (x, a, b) \mid 4a^3 = 27b^2 \}$. Точка сборки $\{ (a, b)_\xi \mid 6a = 0 \}$ трижды вырождена. Сепаратриса пространства управления состоит из точки сборки $\{0\}$ и бифуркационного множества в форме линии складок, описываемой уравнением

$$\left(\frac{a}{3} \right)^3 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 = 0 .$$

Эта полукубическая парабола делит пространство управления на три области:

- область, которая находится за линией складок, такова, что ее точки имеют единственный локальный минимум;
- область внутри линии складок имеет точки с двумя локальными минимумами и одним максимумом;
- область, параметризованная точками бифуркационного множества с одним локальным вырожденным минимумом и одним локальным максимумом.



•

Рис. 10. Катастрофа сборки

Характеристические полиномы для разных значений параметров (a, b) задаются рис. 11.

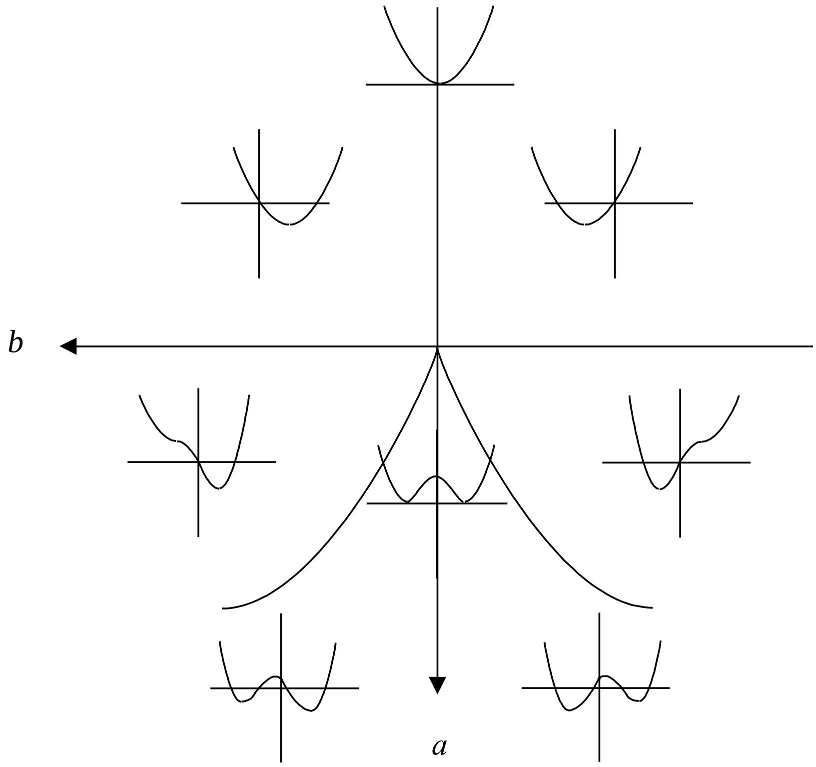


Рис. 11. Характеристические полиномы для разных значений (a, b)

Предложенный алгоритм позволяет "увидеть" механизмы изменения метрик событий r^{ij}_{SE}, допускаемые группой $G_z = SL(4, R)$. На оси b=0 мы получаем пару метрик Ньютона, одна из которых устойчива, а вторая – неустойчива к изменению параметра b. При b>0 метрика Ньютона соответствует $\lambda \neq 0 > 0$, при b<0 получим $\lambda \neq 0 < 0$. При b>0 минимум, соответствующий g^{ij}, больше, чем минимум, соответствующий r^{ij}, при b<0 ситуация обратная. По этой причине физические явления по-разному зависят от досветового и сверхсветового секторов теории. Заметим, что характеристические полиномы не меняются при преобразованиях эквивалентности для генераторов симметрии A_s по типу $\widetilde{A}_s = Q A_s Q^{-1}$. Симметрии, которым подчинены решения уравнений, зависят от Q.

Возможна ситуация, когда "ветер симметрий" срывает плоды, но "не ломает" деревьев: решения получаются разные, зависимые от показателя отношения w, а метрики r^{ij}, $n^{ij}(\pm 0)$, g^{ij}, которые входят в уравнения, остаются, хотя бы частично, неизменными.

В рассмотренном случае анализ основан на свойствах функций, ассоциированных с матрицами. Другими словами, отношения, зафиксированные матрицами, дополняются другими свойствами, прямо или косвенно фиксирующими другие отношения.

Алгоритм расширения модели отношений и соотношения неопределенности

Мы приняли точку зрения, что матрицы выражают систему отношений между объектами. По этой причине они выражают также систему свойств этих объектов. Материализацию связи свойств удобно обеспечить на основе присоединения к матрицам дополнительных величин и операторов. Рассмотрим такую возможность. Введем оператор

$$B_i\left(\gamma_i,\partial_i,x^i\right)\xi_i=0\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline \hat{*} & \partial_x & \partial_y\\ \hline x & \alpha & \beta\\ \hline y & \gamma & \delta\\ \hline\end{array}=0=(x\alpha\partial_x+x\beta\partial_y+y\gamma\partial_x+y\delta\partial_y)\xi_i=0.$$

Получим следующие *геометрические модели* комбинированных отношений:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\to(x\partial_x+y\partial_y)\xi_1\left(x,y\right)=0\to\xi_1\left(x,y\right)=\frac{x}{y}+c_1,$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\to(x\partial_y+y\partial_x)\xi_2\left(x,y\right)=0\to\xi_2\left(x,y\right)=x^2-y^2+c_2,$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\to(x\partial_x-y\partial_y)\xi_3\left(x,y\right)=0\to\xi_3\left(x,y\right)=xy+c_3,$$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\to(-y\partial_x+x\partial_y)\xi_4\left(x,y\right)=0\to\xi_4\left(x,y\right)=x^2+y^2+c_4.$$

Модель конических сечений ассоциирована с введенным оператором. Ситуация становится «ближе» к физике при замене координаты x конечной разностью координат, а координаты y конечной разностью для импульса. По указанному алгоритму получим аналог соотношений неопределенности:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\to\xi_1\left(\Delta x,\Delta p\right)=\frac{\Delta x}{\Delta y}+c_1,$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\to\xi_2\left(\Delta x,\Delta p\right)=\Delta x^2-\Delta p^2+c_2,$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\to\xi_3\left(\Delta x,\Delta p\right)=\Delta x\Delta p+c_3,$$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\to\xi_4\left(\Delta x,\Delta p\right)=\Delta x^2+\Delta p^2+c_4.$$

Система комбинированных отношений генерирует не только стандартное соотношение неопределенности вида

$$\Delta x\Delta p\geq\hbar.$$

Есть новые соотношения. Они возможны для других переменных, в частности, между координатами и ускорениями, между импульсами и ускорениями.

Комбинаторика отношений и истоки генетики

Известно, что генетический код клеток и макроорганизмов состоит из кодонов в форме упорядоченной последовательности трех оснований ДНК. Классификация оснований базируется на выборе представлений группы $SU(2)\times SU(2)$. Собственным значениям алгебры этой группы (аналогу знаковой группы) соответствуют основания ДНК:

$$C(+,+),U(-,+),G(+,-),A(-,-).$$

Модели частиц света в настоящее время базируются на идее о наличии 4 предзарядов. Есть два электрических предзаряда a,b с разными знаками, есть два гравитационных предзаряда c,d с разными знаками. Данные предзаряды образуют базовый объект в форме атома света. Соединение атомов света друг с другом генерирует молекулы света. Характерные размеры предзарядов согласно предварительным оценкам порядка длины Планка. Мы имеем дело с ядерным уровнем ядерной материи. Наличие системы объектов предполагает возможность их объединения в комплексы. В данном случае 4 предзаряда способны образовывать кодоны субъядерных размеров. Так получается совокупность, состоящая из 64 субъядерных кодонов:

aaa	*aab*	*aad*	*aac*
baa	*bab*	*bad*	*bac*
aba	*abb*	*abd*	*abc*
bba	*bbb*	*bbd*	*bbc*
ada	*adb*	*add*	*adc*
bda	*bdb*	*bdd*	*bdc*
aca	*acb*	*acd*	*acc*
bca	*bcb*	*bcd*	*bac*
daa	*dab*	*dad*	*dac*
caa	*cab*	*cad*	*cac*
dba	*dbb*	*dbd*	*dbc*
cba	*cbb*	*cbd*	*cbc*
dda	*ddb*	*ddd*	*ddc*
cda	*cdb*	*cdd*	*cdc*
dca	*dcb*	*dcd*	*dcc*
cca	*ccb*	*ccd*	*ccc*

.

Данный подход становится конструктивным с пониманием и принятием факта, что такие «кодоны» возможны на разных уровнях материи. Возможно соединение между собой объектов «электрического» и «гравитационного» типа в «кодоны» с последующим созданием разных Тел, Сознаний, Чувств.

Композитные отношения в модели идеальной жидкости

Запишем уравнения динамики Ньютона для идеальной жидкости, используя группу матриц, задающих отношения между 4 объектами, дифференциальные операторы $\partial/\partial x^i$ и систему величин. В форме Эйлера имеем векторные уравнения

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\,\nabla)\vec{v}=\frac{1}{\rho}\vec{F}\,.$$

Они допускают компактную запись в четырехмерном виде $\rho v^{\alpha}\,\partial_{\alpha}\,v^{\chi}=f^{\chi}$, где (v^{α},f^{χ}) - компоненты скорости и силы соответственно, ρ - плотность массы, ∂_α - частные производные. Запишем их иначе

$$\begin{pmatrix} v^1\partial_1 v^1 & v^2\partial_2 v^1 & v^3\partial_3 v^1 & v^0\partial_0 v^1 \\ v^1\partial_1 v^2 & v^2\partial_2 v^2 & v^3\partial_3 v^2 & v^0\partial_0 v^2 \\ v^1\partial_1 v^3 & v^2\partial_2 v^3 & v^3\partial_3 v^3 & v^0\partial_0 v^3 \\ v^1\partial_1 v^0 & v^2\partial_2 v^0 & v^3\partial_3 v^0 & v^0\partial_0 v^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f^1\\f^2\\f^3\\f^0\end{pmatrix}.$$

Выразим уравнения в матричной форме, используя подгруппу $(e^i)\in V(4)$:

$$\begin{pmatrix}f^1\\f^2\\f^3\\f^0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&v^1\partial_1\\0&0&v^1\partial_1&0\\0&v^1\partial_1&0&0\\v^1\partial_1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^0&0&0&0\\v^3&0&0&0\\v^2&0&0&0\\v^1&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&v^2\partial_2&0\\0&0&0&v^2\partial_2\\v^2\partial_2&0&0&0\\0&v^2\partial_2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&v^3&0&0\\0&v^0&0&0\\0&v^1&0&0\\0&v^2&0&0\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix}0&v^3\partial_3&0&0\\v^3\partial_3&0&0&0\\0&0&0&v^3\partial_3\\0&0&v^3\partial_3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&v^2&0\\0&0&v^1&0\\0&0&v^0&0\\0&0&v^3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v^0\partial_0&0&0&0\\0&v^0\partial_0&0&0\\0&0&v^0\partial_0&0\\0&0&0&v^0\partial_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&v^1\\0&0&0&v^2\\0&0&0&v^3\\0&0&0&v^0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Получим

$$\left(e_i\omega^{\,i}+e_0\omega^{\,0}\right)P=F\,.$$

Из него следует, что *модель явления* есть симметрия в форме спинорно спроектированного представления группы $V(4)$. Уравнениям соответствует "волновая функция"

$$\Psi=e_p\,v^p=\begin{pmatrix}v^0&v^3&v^2&v^1\\v^3&v^0&v^1&v^2\\v^2&v^1&v^0&v^3\\v^1&v^2&v^3&v^0\end{pmatrix}$$

и аналитический вид

$$\varepsilon^{ij}_{klrs}\,g^{kl}\,v^r\,e_i\,\partial_j\left(g^{st}e_p\,v^p\,\Pi_t\right)P=F\,.$$

Здесь используются символ Кронекера ε^{ij}_{klrs} и четырехметрика $g^{kl} = diag(1,1,1,1)$, а также матрицы

$$\Pi_t = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

и величина $P = столбец(1,1,1,1)$. Аналогично получим

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -v^1\partial_1 \\ 0 & 0 & v^1\partial_1 & 0 \\ 0 & v^1\partial_1 & 0 & 0 \\ -v^1\partial_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 & 0 & 0 & 0 \\ v^3 & 0 & 0 & 0 \\ v^2 & 0 & 0 & 0 \\ -v^1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^2\partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v^2\partial_2 \\ v^2\partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v^2\partial_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & v^3 & 0 & 0 \\ 0 & v^0 & 0 & 0 \\ 0 & v^1 & 0 & 0 \\ 0 & -v^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v^3\partial_3 & 0 & 0 \\ v^3\partial_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v^3\partial_3 \\ 0 & 0 & -v^3\partial_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & v^1 & 0 \\ 0 & 0 & v^0 & 0 \\ 0 & 0 & -v^3 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\left. \begin{pmatrix} -v^0\partial_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v^0\partial_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v^0\partial_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v^0\partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -v^1 \\ 0 & 0 & 0 & -v^2 \\ 0 & 0 & 0 & -v^3 \\ 0 & 0 & 0 & v^0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

на основе подгруппы $(f^i) \in V(4)$. Модели соответствует "волновая функция"

$$\Psi = f_p v^p = \begin{pmatrix} v^0 & v^3 & v^2 & -v^1 \\ v^3 & v^0 & v^1 & -v^2 \\ v^2 & v^1 & v^0 & -v^3 \\ -v^1 & -v^2 & -v^3 & v^0 \end{pmatrix}.$$

В аналитическом виде

$$\{\varepsilon^{ij}_{klrs} g^{kl} v^r e_i \partial_j \left(g^{st} e_p v^p \Pi_t\right) P\} = F$$

они зависят от метрики $r^{kl} = diag(1,1,1,-1)$. Рассматривая $\left(v^1, v^2, v^3, v^0\right)$ как компоненты волновой функции, получим уравнения

$$0.5\left\{\varepsilon^{ij}_{klrs} g^{kl} v^r e_i \partial_j \left(e_p v^p g^{st} \Pi_t\right) P + \varepsilon^{ij}_{klrs} r^{kl} v^r f_i \partial_j \left(f_p v^p g^{st} \Pi_t\right) P\right\} = F,$$

схожие по структуре с уравнениями Максвелла. В таком виде метрики $\left(g^{kl}, r^{kl}\right)$ используются равноправно. Заметим, что сила Лорентца в электродинамике тоже может быть представлена в аналогичном матричном виде

$$F=\sigma_{ps}\left(a^p U^s \Psi + b^p U^s \overline{\Psi}\right) \equiv ie\left(g_{ps} a^p u^s \Psi - r_{ps} b^p u^s \overline{\Psi}\right)$$

через подгруппы $\left(a^i, b^i\right) \in V(4)$. Следовательно, как ускорение, так и сила имеют форму, единую в группе *V(4)*.

Структура модели есть многократный *G*-модуль или *GAG*-модуль. Действительно, волновая функция есть *G*-модуль. Он подчинен действию алгебры дифференциальных операторов $\partial/\partial x^{\,i}$. Затем из полученной структуры повторно образован *G*-модуль. *Фактически мы имеем конечно порожденный G-модуль над кольцом левых идеалов фундаментального представления группы* G_z.

В общем случае следует считать, что поле скоростей комплексное, что позволяет использовать обобщенные уравнения Ньютона-Эйлера, когда

$$v^k = v^k + i\,\omega^k, \quad \bar{v}^k = v^k - i\,\omega^k,$$

что еще больше приближает механику к электродинамике. Кроме этого, как показал анализ, механика жидкости для комплексных скоростей праматерии порождает обобщение квантовой механики в форме Шрёдингера.

Рассмотрим новые формы *GAG*-модуля. Пусть

$$\Psi = g_{\alpha\beta} b^\alpha v^\beta = \begin{pmatrix} v^0 & v^3 & -v^2 & v^1 \\ -v^3 & v^0 & v^1 & v^2 \\ v^2 & -v^1 & v^0 & v^3 \\ -v^1 & -v^2 & -v^3 & v^0 \end{pmatrix},$$

а динамические уравнения заданы в подгруппе $\left(a^i\right)$, так что

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -v^1\partial_1 \\ 0 & 0 & v^1\partial_1 & 0 \\ 0 & -v^1\partial_1 & 0 & 0 \\ v^1\partial_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 & 0 & 0 & 0 \\ -v^3 & 0 & 0 & 0 \\ v^2 & 0 & 0 & 0 \\ -v^1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -v^2\partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v^2\partial_2 \\ v^2\partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v^2\partial_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & v^3 & 0 & 0 \\ 0 & v^0 & 0 & 0 \\ 0 & -v^1 & 0 & 0 \\ 0 & -v^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v^3\partial_3 & 0 & 0 \\ -v^3\partial_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v^3\partial_3 \\ 0 & 0 & v^3\partial_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -v^2 & 0 \\ 0 & 0 & v^1 & 0 \\ 0 & 0 & v^0 & 0 \\ 0 & 0 & -v^3 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\left. + \begin{pmatrix} v^0\partial_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v^0\partial_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v^0\partial_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^0\partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v^1 \\ 0 & 0 & 0 & v^2 \\ 0 & 0 & 0 & v^3 \\ 0 & 0 & 0 & v^0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения Ньютона-Эйлера запишутся в виде

$$\varepsilon_{klrs}^{ij}\, g^{kl}\, a_i\, v^r\, \partial_j \left(g_{\alpha\beta}\, b^{\alpha}\, v^{\beta}\, \Pi^s\right) P = F\ .$$

В них метрика $g_{\alpha\beta}$ используется дважды, а "поля" Ψ и уравнения построены на разных подгруппах группы *V(4).* Волновая функция Ψ выражена в виде суммы антисимметричной и диагональной функций. Пусть теперь

$$\Psi = r_{\alpha\beta}\, a^{\alpha}\, v^{\beta} = \begin{pmatrix} -v^0 & v^3 & -v^2 & -v^1 \\ -v^3 & -v^0 & v^1 & -v^2 \\ v^2 & -v^1 & -v^0 & -v^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 & -v^0 \end{pmatrix},$$

а динамические уравнения заданы в подгруппе b^i. Имеем

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v^1\partial_1 \\ 0 & 0 & v^1\partial_1 & 0 \\ 0 & -v^1\partial_1 & 0 & 0 \\ -v^1\partial_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v^0 & 0 & 0 & 0 \\ -v^3 & 0 & 0 & 0 \\ v^2 & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -v^2\partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^2\partial_2 \\ v^2\partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v^2\partial_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & v^3 & 0 & 0 \\ 0 & -v^0 & 0 & 0 \\ 0 & -v^1 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v^3\partial_3 & 0 & 0 \\ -v^3\partial_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^3\partial_3 \\ 0 & 0 & -v^3\partial_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -v^2 & 0 \\ 0 & 0 & v^1 & 0 \\ 0 & 0 & -v^0 & 0 \\ 0 & 0 & v^3 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\left. + \begin{pmatrix} -v^0\partial_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v^0\partial_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v^0\partial_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v^0\partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -v^1 \\ 0 & 0 & 0 & -v^2 \\ 0 & 0 & 0 & -v^3 \\ 0 & 0 & 0 & -v^0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения Ньютона-Эйлера запишутся в форме

$$\varepsilon_{klrs}^{ij}\, r^{kl}\, b_i\, v^r\, \partial_j \left(r_{\sigma\chi}\, a^{\sigma}\, v^{\chi}\, \Pi^s\right) P = F\ .$$

В них метрика $r_{\sigma\chi}$ используется дважды, а "поля" и уравнения построены по двум дополнительным подгруппам. Волновая функция выражена в виде диагональной и антисимметричной функций. Имеем такие формы уравнений Ньютона-Эйлера в группе $V(4)$:

1. $\varepsilon_{klrs}^{ij}\, g^{kl}\, v^r\, e_i\, \partial_j \left(e_p\, v^p\, \Pi^s\right) P = F$;

2. $\varepsilon_{klrs}^{ij}\, r^{kl}\, v^r\, f_i\, \partial_j \left(f_p\, v^p\, \Pi^s\right) P = F$;

3. $\varepsilon_{klrs}^{ij}\, g^{kl}\, v^r\, a_i\, \partial_j \left(g_{\alpha\beta} b^{\alpha}\, v^{\beta}\, \Pi^s\right) P = F$;

4. $\varepsilon_{klrs}^{ij}\, r^{kl}\, v^r\, b_i\, \partial_j \left(r_{\alpha\beta}\, a^{\alpha}\, v^{\beta}\, \Pi^s\right) P = F$.

Им соответствуют "волновые функции". Получим

1. $$e_p v^p = \begin{pmatrix} v^0 & v^3 & v^2 & v^1 \\ v^3 & v^0 & v^1 & v^2 \\ v^2 & v^1 & v^0 & v^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 & v^0 \end{pmatrix};$$

2. $$f_p v^p = \begin{pmatrix} v^0 & v^3 & v^2 & -v^1 \\ v^3 & v^0 & v^1 & -v^2 \\ v^2 & v^1 & v^0 & -v^3 \\ -v^1 & -v^2 & -v^3 & v^0 \end{pmatrix};$$

3. $$g_{\alpha\beta} b^\alpha v^\beta = \begin{pmatrix} v^0 & v^3 & -v^2 & v^1 \\ -v^3 & v^0 & v^1 & v^2 \\ v^2 & -v^1 & v^0 & v^3 \\ -v^1 & -v^2 & -v^3 & v^0 \end{pmatrix};$$

4. $$r_{\alpha\beta} a^\alpha v^\beta = \begin{pmatrix} -v^0 & v^3 & -v^2 & -v^1 \\ -v^3 & -v^0 & v^1 & -v^2 \\ v^2 & -v^1 & -v^0 & -v^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 & -v^0 \end{pmatrix}.$$

Подгруппы (a_i, b_i) форм 3 или 4 достаточны для того, чтобы "восстановить" всю группу *V(4)*. Формы 1 и 2 способны на это лишь при совместном их использовании. В антикоммутирующем секторе "поля" и динамические уравнения выражаются через одну подгруппу, а сами поля "симметричны". В коммутирующем секторе "поля" и динамические уравнения выражаются через подгруппы a_i, b_i, а сами поля образуют "смесь" антисимметричных и симметричных величин. Возможно смешанное их соединение. Таковы, например, уравнения

$$0.5\, \varepsilon^{ij}_{klrs} \left\{ r^{kl} v^r b_i \partial_j \left(r_{\alpha\beta} a^\alpha v^\beta \Pi^s \right) P + g^{kl} v^r a_i \partial_j \left(g_{\alpha\beta} b^\alpha v^\beta \Pi^s \right) P \right\} = F \,.$$

Используя комплексные скорости, мы по форме приближаем механику Ньютона к электродинамике Максвелла. В общем случае *GAG*-модуль имеет многообразие форм, которые одинаково хорошо описывают одни и те же эксперименты. По этой причине *эксперимент сам по себе недостаточен для "проявления" формы явления, а симметрия также имеет черты, скрытые от опыта*. В рассмотренном случае, как легко видеть, автоморфизмы группы заполнения физической модели G_z указывают различные формы уравнений на подгруппах. В частности, уравнения механики «скрывают» в своей структуре систему четырехметрик, которую можно использовать в разных сочетаниях с элементами группы $PSL(4,C)$. Происходит так потому, что

$$SL(4,C) = {PSL(4,C)}\big/{Z_4} \,.$$

По аналогии мы вправе задать уравнения типа Ньютона-Эйлера для любых групп. Они обобщаются, если выйти за рамки канонических функций: $\varepsilon^{ij}_{klrs} \to R^{ij}_{klrs}$, $r^{kl} \to R^{kl}$, $g_{\alpha\beta} \to G_{\alpha\beta}$ … Так из "семечка" можно вырастить "дерево". За этими уравнениями скрыта новая информация о динамике материальных объектов. В частности, связующие функции $\varepsilon^{ij}_{klrs}(x,t)$, $r^{kl}(x,t)$, $g_{\alpha\beta}(x,t)$ способны задать эволюцию явления, описываемого физической моделью.

Ассоциированные операции

Произвольному набору элементов a_i можно поставить в соответствие бинарную операцию, ассоциированную с системой чисел, суммируемых по модулю максимального числа для индексов. Мы имеем множество $\{a_i\}, i=1.2.....\mathrm{N}$. Применим к нему операцию

$$a_i \cdot a_j = a_{(i+j)\bmod N.}$$

В таком множестве есть единичный элемент, соответствующий индексу N. В системе есть обратные элементы. Операция ассоциативна. По совокупности указанных условий мы имеем группу элементов, ассоциированную с индексами этих элементов, заданных числами. Назовем такое множество группой с ассоциированной операцией. По ряду признаков понятно, что таким группам соответствуют совокупности объектов в иерархической системе. Объекты могут быть принципиально разными. Однако они объединены в сохраняющуюся систему согласно тому статусу, которым им придан дополнительно. В частности, функции статуса выполняет система числовых индексов с операцией сложения по модулю максимального числа.

Ситуация становится более сложной, если взамен индексов поставить другие объекты со своими правилами суперпозиции. Например, это могут быть матрицы с правилом матричного произведения. Тогда появляется объект в форме группы, ассоциированной с группой, относящейся к индексам. Так легко генерируется иерархия групп.

Системе матриц можно ассоциативно поставить в соответствие систему нелинейных алгебраических уравнений. Рассмотрим систему матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & 0 \\ d_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первой строке поставим в соответствие координату x со степенью, равной месту значимого элемента и с коэффициентом на месте этого элемента. Второй строке сопоставим координату y и т.д. Получим нелинейную алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} &a_1 x + b_1 y^2 + c_1 z^3 + d_1 t^4 = 0, \\ &a_2 x^2 + b_2 y + c_2 z^4 + d_2 t^3 = 0, \\ &a_3 x^3 + b_3 y^4 + c_3 z + d_3 t^2 = 0, \\ &a_4 x^4 + b_4 y^3 + c_4 z^2 + d_4 t = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно сконструировать дифференциальные уравнения на основе систем стандартных дифференциальных уравнений, дополняя их новой системой в рамках указанного алгоритма ассоциативной связи. В этом варианте даже линейные уравнения становятся нелинейными. Например, с уравнениями Фарадея-Ампера ассоциативно связаны уравнения вида

$$-\partial_y^3 \alpha_z + \partial_z^2 \alpha_y + \partial_\tau \alpha_x - \partial_y^3 \overline{\alpha}_z + \partial_z^2 \overline{\alpha}_y + \partial_{\overline{\tau}} \overline{\alpha}_x = 0, \ldots$$

Каждая система уравнений, заданная в матричном виде, имеет ассоциативное расширение.

Заключение

Основная идея, на которой базировалось проведенное исследование, состояло в том, что физические объекты и их взаимодействия имеют аналогию с математическими объектами и операциями, которым они подчинены. В физических теориях чаще всего применяются матрицы. По этой причине проведен анализ разных систем матриц при условии, что они подчинены разным операциям. Дополнительно к матричной и введенной ранее неассоциативной комбинаторной операции рассмотрены сигнатурная, координатная и ассоциированная операции. Анализ показал различие и дополнительность их свойств. Найдены также новые алгоритмы расширения групп. В частности, проанализировано операционное расширение групп, базирующееся на применении к системе матриц группы трансляции значимых элементов и знаковой группы. Показано, что при указанном расширении мы получаем математические объекты, удобные для применения в физических моделях. Новые операции согласно проведенному анализу способны изменить качество системы матриц. Рассмотрены варианты изменения множеств с указание их переходных состояний. Принята точка зрения, что динамике и эволюции физических объектов можно поставить в соответствие динамику и эволюцию математических объектов. С разных сторон проанализированы геометрические аспекты анализируемых множеств. Отмечены некоторые топологические аспекты этих множеств.

Теория
реальных отношений
в физике

Введение

Идея связи групп и геометрий, выдвинутая Клейном, нашла многообразное и яркое подтверждение в ряде работ и моделей. Равнозначна, конечно, идея связи геометрий и групп. Суть подхода в том, что с геометрией ассоциированы структуры, инвариантные относительно действия группы или семейства групп. По этой причине есть ассоциированная связь групп и геометрий. Следовательно, конструирование новых групп предполагает построение новых геометрий. И геометрии, и группы всегда имеют истоки в физической практике, несут на себе следы физической реальности. Группы и геометрии можно рассматривать как математические объекты до тех пор, пока их характеристики так или иначе не связаны с измеряемыми величинами, относящимися к свойствам физической реальности. Исследование групп и геометрий при отрыве или отказе от такой связи содержательно и интересно. Однако оно носит формальный характер. Мы имеем при указанном подходе формальные группы и формальные геометрии. Поэтому и отношения тоже формальны. Аналогичный подход может быть применен к топологии. Формальная, математическая топология имеет «следы» в физической реальности. Их можно детализировать и уточнить только на основе практики.

Значительный интерес представляет практика и теория реальных отношений. Их можно выяснить на основе анализа систем уравнений, описывающих физические явления. На первом плане, естественно, находятся модели, описывающие свет и гравитацию. Геометрия базируется, прежде всего, на визуальных моделях. Информация о структуре и свойствах геометрий согласована со свойствами и действиями света. Свет является моделью реальных отношений. Исследование света позволяет получить информацию о структуре и свойствах реальных отношений. В этом подходе свойства геометрий и групп согласованы с параметрами физической реальности. Поскольку, согласно базовой физической идее, свет является основой для конструирования самых разных физических объектов, группы и геометрии, ассоциированные со светом, могут иметь значение и смысл для широкого круга физических явлений. В частности, следуя практике, такой уровень общности предписывается группе Галилея и группе Лорентца.

Сейчас понятно, что свет и гравитация имеют физическое единство. Они могут описываться единым образом на основе дифференциального продолжения уравнений электродинамики. Следуя Эйнштейну, гравитация успешно описывается геометрической моделью в рамках риманова пространства и времени. Связь физики и геометрии здесь задана явным способом. Обобщение геометрии предполагает возможность обобщения теории гравитации или других физических явлений. В теории гравитации действует группа диффеоморфизмов. Она генерирует новые связи формальных групп и моделей физических явлений. Эти вопросы детально проанализированы в работах $[1-21]$.

Новые операции генерируют новые группы и геометрии. Математика в данном случае может быть применена для расширения и углубления моделей света и гравитации. Такой подход имеет не только математический интерес. Его движущей силой является потребность практического применения свойств тонкой материи, из которой изготовлены частицы света и гравитации.

Электродинамика Максвелла на группе Галилея

Модели физических явлений можно конструировать на основе принципа относительности, согласно которому система уравнений ассоциирована с группой симметрии.

Физика принципа относительности состоит в реализации наблюдения, что поведение физических изделий подчинено «одинаковым законам» как в случае относительного покоя, так и в случае движения с постоянной скоростью, если нет внешних воздействий. Математика принципа относительности состоит в условии форминвариантности уравнений, описывающих динамику исследуемых изделий.

Первым известным примером является инвариантность уравнений динамики Ньютона относительно преобразований группы Галилея. В начальной стадии развития теории относительности в роли кинематической группы выступала группа Галилея. Доказательство инвариантности уравнений электродинамики в вакууме относительно группы Лоренца привело к «замене» кинематической группы Галилея на кинематическую группу Лоренца. В обоих случаях одними из параметров этих групп являются скорости, поэтому группы называются кинематическими.

Поскольку указанные группы неизоморфны, нужно было определиться, что делать с группой Галилея? Была принята точка зрения, что она пригодна в физике для малых скоростей, но непригодна для больших скоростей. Поскольку в электродинамике реализуются большие скорости, для группы Галилея в ней не находилось места.

Оюбщеизвестно, что и группа Галилея, и группа Лоренца являются точными симметриями для уравнений электродинамики Максвелла. Они реализуются в разных физических условиям, которые представляют собой частные случаи общей математической модели.

Исторически первый вариант галилеевски инвариантной электродинамики был предложен Герцем. Сущность его сводилась к дополнению дифференциальных уравнений Максвелла "конвективными членами"

$$rot[\vec{D},\vec{u}],\ \vec{u}\ div\ \vec{D},\ rot[\vec{B},\vec{u}].$$

Была предложена модель

$$rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + rot[\vec{D},\vec{u}] + \vec{u}\,div\,\vec{D} + \vec{j}\right\},$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot[\vec{B},\vec{u}]\right\},$$

$$div\ \vec{D} = \rho, \quad div\,\vec{B} = 0\,.$$

Однако следствия из теории Герца вступают в противоречие с известными экспериментальными данными . Основная причина этого в наличии скорости $\vec{u}$, входящей в дифференциальные уравнения электродинамики, которую следует интерпретировать как скорость эфира, полностью увлекаемого телами.

Другая модель галилеевски инвариантной электродинамики получается из электродинамики Максвелла для покоящихся сред, если из физических соображений в уравнениях Максвелла можно пренебречь либо $\partial\vec{H}/\partial t$, либо $\partial\vec{E}/\partial t$.

Они называются "электрическим" и "магнитным" пределами, соответствуют практическим ситуациям, позволяя упростить решение некоторых задач.

К галилеевски инвариантной электродинамике можно подойти иначе: рассмотреть уравнений электродинамики движущихся сред в косоугольной системе координат. В частности, в этом случае из материальных уравнений для покоящейся среды при использовании группы Галилея следуют новые материальные уравнения, причем полная система уравнений форминвариантна относительно группы Галилея. Для получения результатов, согласующихся с экспериментом, требуется дополнительный перерасчет полученных решений с учетом симметрии относительно группы Лорентца.

Есть другая возможность: можно обобщить связи между полями и индукциями. Легко показать, что уравнения Максвелла совместно с соотношениями между полями и индукциями

$$\vec{D} = \varepsilon\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c}, \vec{B}\right]\right), \quad \vec{B} = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D}, \frac{\vec{u}}{c}\right]\right)$$

форминвариантны относительно группы Галилея. Здесь ε, μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\vec{u}$ - некоторая скорость движения, физический смысл которой необходимо выяснить.

Пусть декартова система координат K' движется вдоль оси OX системы K со скоростью v. Определим соотношения между частными производными и компонентами скорости

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}.$$

Используя эти преобразования для уравнений Максвелла с условием их инвариантности, получим связи для полей и индукций:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = E_y - \frac{v}{c}B_z, \quad E'_z = E_z + \frac{v}{c}B_y,$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = B_y, \quad B'_z = B_z,$$

$$H'_x = H_x, \quad H'_y = H_y + \frac{v}{c}D_z, \quad H'_z = H_z - \frac{v}{c}D_y,$$

$$D'_x = D_x, \quad D'_y = D_y, \quad D'_z = D_z, \quad \rho' = \rho.$$

Подставим в материальные уравнения указанные соотношения для полей. Получим

$$\vec{D}' = \varepsilon\left(\vec{E}' + \left[\frac{\vec{u}'}{c}, \vec{B}'\right]\right), \quad \vec{B}' = \mu\left(\vec{H}' + \left[\vec{D}', \frac{\vec{u}'}{c}\right]\right).$$

Доказательство инвариантности полной системы уравнений электродинамики завершено.

Выведем уравнения для потенциалов в галилеевски инвариантной электродинамике. Пусть

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Тогда одна пара уравнений Максвелла удовлетворяется тождественно, а из уравнений

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$$

совместно с материальными уравнениями следуют уравнения для $\vec{A}$, φ. Тогда

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu} - \nabla \times \left(\vec{D} \times \frac{\vec{u}}{c}\right) = 4\frac{\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho.$$

Согласно формулам векторного исчисления

$$\nabla \times \left(\vec{D} \times \frac{\vec{u}}{c}\right) = \left(\frac{\vec{u}}{c} \cdot \nabla\right)\vec{D} - \frac{\vec{u}}{c}\left(\nabla \cdot \vec{D}\right) = \left(\frac{\vec{u}}{c} \cdot \nabla\right) - \frac{\vec{u}}{c}4\pi\rho,$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}\right) = -\frac{\vec{u}}{c} \cdot \nabla \times \vec{B}.$$

Отсюда

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\mu\left(\vec{j} - \vec{u}\rho\right) + \frac{\mu\varepsilon}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right)\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}\right]\right),$$

$$\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\vec{u}}{c}\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho.$$

Запишем выражение

$$\vec{K} = \frac{\mu\varepsilon}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right)\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}\right]\right)$$

через потенциалы $\vec{A}$ и φ. Тогда

$$\vec{K} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right)^2\vec{A} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right)\nabla\left(c\varphi - \vec{u}\,\vec{A}\right).$$

Сгруппируем члены. Для потенциала $\vec{A}$ получим

$$\nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right)\left(\vec{u}\,\vec{A} - c\varphi\right) - \nabla^2\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right)^2\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\left(\vec{j} - \vec{u}\rho\right).$$

Из другого уравнения следует, что

$$\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\vec{u}}{c}\left[4\frac{\pi}{c}\mu\left(\vec{j} - \vec{u}\rho\right) + \frac{\mu}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right)\right] = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho.$$

Поскольку $\left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{D} = \nabla\left(\vec{u}\,\vec{D}\right) - \vec{u} \times \left(\nabla \times \vec{D}\right)$, то

$$\frac{\varepsilon}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)\left[-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u}\,\vec{A}-c\varphi\right)\right]=\frac{\vec{u}}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{D}\,.$$

Следовательно,

$$\nabla\cdot\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)+\frac{\mu\,\varepsilon}{c^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)^2\varphi+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u}\,\vec{A}-c\varphi\right)\right]=$$

$$=\frac{4\pi\mu}{c}\left(\frac{c\rho}{\varepsilon\,\mu}+\frac{\vec{u}}{c}\,\vec{j}-\frac{c\,u^2}{c^2}\,\rho\right).$$

Преобразовав, получим

$$-\left\{\nabla^2-\frac{\mu\,\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)^2\right\}\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}-\frac{\varepsilon\,\mu}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)\left(\vec{u}\,\vec{A}-c\varphi\right)\right)=$$

$$=\frac{4\pi\mu}{c}\left(\frac{c\rho}{\varepsilon\,\mu}+\frac{\vec{u}}{c}\,\vec{j}-c\rho\frac{u^2}{c^2}\right).$$

Выберем калибровочное условие

$$\nabla\cdot\vec{A}-\frac{\varepsilon\,\mu}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)\left(\vec{u}\,\vec{A}-c\varphi\right)=0\,.$$

Тогда искомые уравнения примут вид:

$$\left\{\nabla^2-\frac{\mu\,\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)^2\right\}\vec{A}=-\frac{4\pi\mu}{c}\left(\vec{j}-\vec{u}\rho\right),$$

$$\left\{\nabla^2-\frac{\mu\,\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)^2\right\}\varphi=-\frac{4\pi\mu}{c}\left(\frac{c\rho}{\varepsilon\,\mu}+\frac{\vec{u}}{c}\,\vec{j}-c\rho\frac{u^2}{c^2}\right).$$

Для свободного электромагнитного поля в вакууме получим

$$\left\{\nabla^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)^2\right\}\vec{A}=0\,,\left\{\nabla^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\right)^2\right\}\varphi=0\,,$$

Изучим некоторые следствия этой системы. Рассмотрим, как распространяется электромагнитное поле согласно уравнениям для $\vec{A}$, φ. Ищем решение уравнений в виде плоской волны. Тогда

$$\vec{A}=\vec{A}_0\exp\left\{i\left(\omega t-\vec{k}\,\vec{r}\right)\right\},\quad \varphi=\varphi_0\exp\left\{i\left(\omega t-\vec{k}\,\vec{r}\right)\right\}.$$

Получим дисперсионное уравнение

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2}=\left(1-\frac{\vec{u}}{c}\frac{c\vec{k}}{\omega}\right)^2.$$

Из него следует выражение для фазовой и групповой скоростей:

$$\vec{v}_\varphi = \vec{c}\left(1 + \vec{s}\,\frac{\vec{u}}{c}\right),$$

Эти формулы согласуются с преобразованиями Галилея, если под скоростью $\vec{u}$ понимать скорость движения источника в вакууме. Найдем функцию Грина. В инерциально движущейся среде без дисперсии ее вид определяется выражением

$$G_0(\vec{r}, t) = 8\pi^2\mu \int \frac{J_0(k_\rho, \rho)\exp\left[i(k_z z - \omega t)\right]k_\rho d\,k_\rho d\,k_z d\omega}{k_\rho^2 - \varepsilon\mu\dfrac{\omega^2}{c^2} + 2\varepsilon\mu\beta\omega\dfrac{k_z}{c} + \left(1 - \varepsilon\mu\beta^2\right)k_z^2}.$$

Здесь ось OZ направлена по скорости $\vec{u}$, J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Проведя необходимые вычисления, получим

$$G_0(\vec{r}, t) = 16\pi^4\mu\left(\rho^2 + \overset{*}{x}{}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\delta\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\left(\rho^2 + \overset{*}{x}{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

где $\overset{*}{x} = z - ut$. Функция Грина для $u < c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ отлична от нуля на поверхности, уравнением которой в фиксированный момент времени является

$$t = \frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\rho^2 + (z - ut)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Это эллипсоид вращения, ось симметрии которого совпадает со скоростью движения среды. Полуоси эллипса равны $a = ct/\sqrt{\varepsilon\mu}$, $b = ct/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Положение центра эллипсоида определяется выражением $z_0 = ut$. Следовательно, центр поверхности, на которой функция Грина отлична от нуля, перемещается со скоростью $\vec{u}_0 = \vec{u}$.

Если отождествить $\vec{u}_0$ со скоростью движения источника излучения в вакууме, получим результат: поверхность, несущая сигнал, представляет собой сферу, центр которой все время совпадает с положением источника, движущегося инерциально.

С группой Галилея ассоциировано сложение скоростей согласно геометрии Евклида. В частности, получим

$$\vec{u}' = \vec{u} \pm \vec{\sigma}.$$

Это сложение скорости света со скоростью движения источника излучения до настоящего времени не имеет экспериментального обоснования, хотя его математическая обоснованность достаточна для признания правильности такого варианта.

Новый элемент теории групп, равно как и модели электромагнитных явлений, состоит в том, что в расчет принимается скорость движения источника излучения.

Электродинамика Максвелла со сверхсветовыми скоростями

Известно, что единое описание экспериментальных данных в классической, волновой электродинамике Максвелла при учете относительных движений было достигнуто на основе специальной теории относительности, созданной Эйнштейном. Оно базируется на принципах относительности и постоянства скорости света в вакууме. В этой модели Эйнштейна отсутствует идеология и предположения о физической структуре света.

Позднее были экспериментально установлены корпускулярные свойства света. Они проявились, в частности, в фотоэффекте и эффекте Комптона. Эти и другие данные инициировали постановку и решение проблемы структуры света. В квантовой теории света эти попытки успеха не имели, поэтому фотон рассматривается, согласно теории относительности, как бесструктурная квазичастица.

Экспериментальные работы, выполненные систематически с 1960 года по настоящее время, свидетельствуют о возможности рассмотрения фотонов как структурных объектов, «похожих» на адроны. Структуру фотона связывают с квантовыми флуктуациями поля.

В настоящее время актуальна структурная модель частиц света. Она становится теоретически обоснованной, если описывать релятивистские эффекты без специальной теории относительности.

Мы знаем, что есть такая возможность. Возможно *динамическое* описание релятивистских эффектов. Оно базируется на обобщении электродинамики в модели *ньютоновского* пространства-времени. Ключевую роль в новом подходе выполняет новая скалярная физическая величина w, названная показателем отношения. Она позволила дополнить показатель преломления n, управляющий изменением скорости поля, показателем отношения, который управляет изменением частоты.

Предлагаемый вариант анализа релятивистских электродинамических явлений соответствует *стандартному подходу* к явлениям в физике. Рассматривается модель явления, а также возможности её обобщения. Находятся решения уравнений, которые могут быть независимы от симметрийных свойств исследуемой задачи. Далее проводится согласование расчета с экспериментом.

Будем исходить из предположения, что имеется единичный наблюдатель, у него есть система измерительных устройств, необходимых и достаточных для исследования электромагнитных явлений. Наблюдатель использует «абсолютные» эталоны длины и времени в соответствии с физической моделью пространства Ньютона $R^3 \times T^1$.

Физические законы электродинамики Максвелла также задаются в $R^3 \times T^1$ на основе трехмерных rot и div в векторном виде:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = \vec{0},$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\pi\frac{\vec{J}}{c}.$$

Исходя из уравнений Максвелла, учитывая свойства реальных физических сред и не используя какой-либо модели эфира, опишем единым образом опыты Бредли, Допплера, Физо, Майкельсона, «постоянство» скорости света в вакууме по Эйнштейну.

Известно, что для покоящейся изотропной среды связь полей и индукций имеет вид

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{E},$$

где ε, μ- диэлектрическая и магнитная проницаемости. Если электродинамику рассматривать в тензорном виде, то поля F_{mn} и индукции $\widetilde{H}^{ik}$ будут связаны между собой тензором

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} diag(1,1,1,\varepsilon\mu).$$

В варианте, рассмотренном Минковским, когда среда является вторичным источником излучения, считается, что ее скорость $\vec{U}_m$, которая входит в уравнения для связи полей и индукций, тождественно равна скорости **вторичного** источника излучения. Тогда

$$\vec{D} + \left[\frac{\vec{U}_m}{c} \times \vec{H}\right] = \varepsilon\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{U}_m}{c} \times \vec{B}\right]\right),$$

$$\vec{B} + \left[\vec{E} \times \frac{\vec{U}_m}{c}\right] = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D} \times \frac{\vec{U}_m}{c}\right]\right).$$

В его модели отсутствует скорость **первичного** источника излучения, равно как и какие-либо предположения о структуре излучения. Найдем более общие связи между полями F_{mn} и индукциями H^{ik} в форме $H^{ik} = \Omega^{im}\Omega^{kn}F_{mn}$.Они содержат указанные варианты как частные случаи. Выберем

$$\Omega^{im} = \alpha\left(\Theta^{im} + \beta U^i U^m\right).$$

Здесь α, β - скалярные функции, Θ^{im} - тензор, $U^i = dx^i / d\Theta$ - четырехскорости, построенные по нему, $d\Theta^2 = \Theta_{ij}dx^i dx^j$. Выражение Ω^{im} найдено на основе решения системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\Omega^{im} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[\Theta^{im} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{\chi} - 1\right)U^i U^m\right].$$

Здесь $\Theta^{im} = diag\ (1, 1, 1, \chi)$, а $\chi = \det \Theta^{im}$. Тензор Ω^{im} не имеет особенности при $\chi = 0$, так как

$$d\Theta = \frac{icdt}{\sqrt{\chi}}\left(1 - \chi\frac{U^2}{c^2}\right)^{1/2}, \quad U^k = \frac{dx^k}{d\Theta} = \frac{\sqrt{\chi}}{ic}\frac{dx^k}{dt}\left(1 - \chi\frac{U^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Для скоростей $U_n = \Theta_{nk}U^k$ выполняется соотношение $U^k U_k = 1$. С учетом антисимметрии F_{mn} и H^{ik} можно пользоваться выражением

$$H^{ik} = \Omega^{ikmn}F_{mn}, \quad \Omega^{ikmn} = 0{,}5\left(\Omega^{im}\Omega^{kn} - \Omega^{in}\Omega^{km}\right)$$

с условиями

$$\Omega^{ikmn} = -\Omega^{iknm} = -\Omega^{kimn}.$$

Теперь уравнения Максвелла

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = \vec{0},$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

дополнены обобщенными связями

$$\vec{D} + \chi\left[\frac{\vec{U}}{c} \times \vec{H}\right] = \varepsilon\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B}\right]\right), \qquad \vec{B} + \chi\left[\vec{E} \times \frac{\vec{U}}{c}\right] = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D} \times \frac{\vec{U}}{c}\right]\right).$$

Пусть источник первичного излучения движется вокруг Земли в вакууме со скоростью $\vec{U}_{fs}$, которая является скоростью первичного источника $\vec{U}\big|_{\rho=0} = \vec{U}_{fs}$. Пусть излучение распространяется из вакуума в атмосферу Земли с плотностью ρ,. Пусть при $\rho = \rho_0$ скорость источника излучения становится равной скорости физической среды

$$\vec{U}\big|_{\rho=\rho_0} = \vec{U}_m .$$

Введем скорость $\vec{U} = \vec{U}\left(\vec{U}_{fs}, \vec{U}_m, w(\rho)\right)$, полагая, что она зависит от функционала $w(\rho)$. Назовем его показателем отношения. Подчиним скорость $\vec{U}$ релаксационному уравнению

$$\frac{d\vec{U}}{d\xi} = -P_0\left(\vec{U} - \vec{U}_m\right), \qquad \vec{U}\big|_{\xi=0} = \vec{U}_{fs}, \qquad \xi = \rho/\rho_0 .$$

Это требование согласуется с физической постановкой задачи . Получим решение

$$\vec{U} = (1-w)\vec{U}_{fs} + w\vec{U}_m, \qquad w = 1 - \exp\left(-P_0\frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Тогда

$$\vec{U}\big|_{\rho=\rho_0} = \vec{U}_{fs}, \qquad w\big|_{\rho=0} = 0, \qquad \vec{U}\big|_{\rho=\rho_0} = \vec{U}_m, \qquad w\big|_{\rho=\rho_0} = 1.$$

Примем дополнительное условие, что $\chi = w$. Уравнения для потенциалов поля A_m при $w = const$ имеют вид:

$$\left[\Theta^{kn}\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^n} - (\varepsilon\mu - w)\left(V^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^2\right]A_m = -\mu U^i\Theta_{im}, V^k = \frac{U^k}{\chi}$$

с условием калибровки

$$\Theta^{kn}\frac{\partial A_n}{\partial x^k} + (\varepsilon\mu - w)\frac{\partial A_l}{\partial x^k}U^l U^k = 0.$$

Для векторного $\vec{A}$ и скалярного φ потенциалов согласно стандартному определению

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

получим уравнения

$$\widehat{L}\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\left\{\vec{J} + \frac{\sigma\Gamma^2}{\sigma + w}\frac{\vec{U}}{c}\left(w\vec{U}\cdot\vec{J} - c^2\rho\right)\right\},$$

$$\widehat{L}\varphi = -4\pi\mu\frac{\Gamma^2}{w+\sigma}\left\{\rho\left(1 - \varepsilon\mu\frac{U^2}{c^2}\right) + \sigma\frac{\vec{U}\cdot\vec{J}}{c^2}\right\}$$

и условие калибровки

$$\left(\nabla\cdot\vec{A} + \frac{w}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{\sigma\Gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U}\cdot\nabla\right)\left(\vec{U}\cdot\vec{A} - c\varphi\right) = 0.$$

Здесь

$$\widehat{L} = \left(\Delta - \frac{w}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \sigma\frac{\Gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U}\cdot\nabla\right)^2,$$

$$\sigma = \varepsilon\mu - w, \qquad \Gamma^2 = \left(1 - w\beta^2\right)^{-1}, \qquad \beta = \frac{U}{c}.$$

Функция Грина для векторных уравнений

$$G_0(\vec{r}, t) = 16\pi^4\mu\left(r^2 + \xi^2\right)^{-1/2}\delta\left(t - \frac{1}{c}\frac{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}{\left(1 - w\beta^2\right)\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(r^2 + \xi^2\right)^{1/2}\right)$$

имеет стандартный вид. В цилиндрической системе координат, радиус-вектор которой есть $R = \left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}$, получим величины

$$r^2 = \rho^2\frac{\varepsilon\mu\left(1 - w\beta^2\right)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}, \qquad \xi = z - \frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}Ut.$$

При $\beta = 0$ получим функцию Грина для покоящего источника в среде без дисперсии

$$G_0(\vec{r}, t)\Big|_{\vec{U}=0} = 16\pi^4\mu\frac{1}{R}\delta\left(t - \frac{R\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\right).$$

Она отлична от нуля на поверхности

$$t = \frac{1}{c}\frac{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}{\left(1 - w\beta^2\right)\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\rho^2\frac{\varepsilon\mu\left(1 - w\beta^2\right)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2} + \left(z - \frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}Ut\right)^2\right)^{1/2}.$$

Это эллипсоид вращения, ось симметрии которого совпадает с $\vec{U}$, а положение центра задается соотношением

$$z_0 = Ut\frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}.$$

Центр поверхности, на которой функция Грина отлична от нуля, перемещается со скоростью

$$U_0 = U\frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}.$$

Полуоси эллипса

$$a = ct\left(\frac{1 - w\beta^2}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}\right)^{1/2}, \qquad b = ct\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1 - w\beta^2\right)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}$$

нелинейно зависят от w. Имеем обобщенное дисперсионное уравнение

$$c^2K^2 = w\omega^2 + \Gamma^2\left(\varepsilon\mu - w\right)\left(\omega - \vec{K}\cdot\vec{U}\right)^2$$

для электромагнитного поля. Из него следует выражение

$$\vec{V}_g = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{K}} = c\frac{K + \sigma\Gamma^2 c^{-2}\vec{U}\left(\omega - \vec{K}\cdot\vec{U}\right)}{\frac{\omega}{c}w + \sigma\Gamma^2 c^{-1}\left(\omega - \vec{K}\cdot\vec{U}\right)}$$

для групповой скорости. В нерелятивистском пределе

$$\vec{V}_g = \frac{c}{n}\frac{\vec{K}}{K} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right)\left[\left(1 - w\right)\vec{U}_{fs} + w\vec{U}_m\right].$$

Мы получили зависимость групповой скорости электромагнитного поля не только от показателя преломления, но и от показателя отношения, не только от скорости среды, но и от скорости первичного источника излучения.

При $w = 0$ получим $\vec{V}_g = c\frac{\vec{K}}{K} + \vec{U}_{fs}$. В обобщенной модели электромагнитных явлений поле в вакууме движется таким образом, что центр поверхности, на которой функция Грина отлична от нуля, движется со скоростью $\vec{U}_{fs}$. Полуоси эллипса в данном случае равны, задавая сферу переменного радиуса.

Модель согласуется с опытом Майкельсона. В его эксперименте скорость среды и скорость источника излучения были равны нулю: $\vec{U}_m = 0$, $\vec{U}_{fs} = 0$. Поэтому $\vec{V}_g = \frac{c}{n}\frac{\vec{K}}{K}$.

Модель согласуется с опытом Физо. Согласно условиям опыта $\vec{U}_{fs} = 0$, $w = 1$, поэтому

$$\vec{V}_g = \frac{c}{n}\frac{\vec{K}}{K} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\vec{U}_m.$$

Изучим динамику частоты поля. Групповая скорость электромагнитного поля, согласно полученным решениям, в случае, когда $w \to 0$, не зависит от скорости $\vec{U}_{fs}$. Это изменение, с физической точки зрения, может проявиться в изменении частоты.

Чтобы разобраться, возможно ли это теоретически, дополним дисперсионное уравнение фазовым условием:

$$\frac{\omega - \vec{K}\cdot\vec{U}_\xi}{\left(1 - w_\xi \dfrac{U_\xi^{\;2}}{c^2}\right)^{1/2}} = const\,.$$

Будем считать, что скорость $\vec{U}_\xi$ не тождественна обобщенной скорости $\vec{U}$. Введем

$$\vec{U}_\xi\left(\vec{U}_{fs}, \vec{U}_m, w_\xi(\rho)\right) \neq \vec{U}\,.$$

Зададим для нее уравнение

$$\frac{d\vec{U}_\xi}{d\xi} = -P_\xi\left(\vec{U}_\xi - \vec{U}_*\right), \qquad \vec{U}_\xi\Big|_{\rho=0} = \vec{U}_{fs}$$

релаксационного типа. В качестве релаксационного значения скорости используем

$$\vec{U}_* = \vec{U}_{fs} + \vec{U}_m\,.$$

Такой вариант возможен в модели пространства Ньютона. Получим решение

$$\vec{U}_\xi = \vec{U}_{fs} + w_\xi \vec{U}_m\,, \qquad w_\xi = 1 - \exp\left(-P_\xi \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

"С кинематической точки зрения" скорость $\vec{U}_{fs}$ из-за взаимодействия со средой исчезает при w=1 и в групповой скорости не проявляется, "с энергетической точки зрения" она превращается в частоту ω. Так происходит потому, что *дисперсионное и фазовое условия* в предлагаемой модели выполняют разные роли и имеют функции, дополнительные друг другу.

Вернемся к предложенной выше модельной задаче. Рассмотрим излучение с начальным значением частоты ω_0 и волновым вектором $\vec{K}_0$. Пусть оно распространяется от источника, движущегося в вакууме со скоростью $\vec{U}_{fs}$, к поверхности Земли. Пусть $\vec{U}_m = 0$. Рассчитаем, как меняются частота ω и волновой вектор $\vec{K}$ при взаимодействии излучения с атмосферой. Пусть $w = w_\xi$. Получим систему уравнений:

$$c^2K^2 - w\omega^2 = \Gamma^2(\varepsilon\mu - w)\left(\omega - \vec{K}\cdot\vec{U}\right)^2,$$

$$\omega = \omega_0\left(1 - wU_\xi^2/c^2\right)^{1/2} + \vec{K}\cdot\vec{U}_\xi\,.$$

Примем допущения, что $K_{y_0} = 0$, $K_z = K_{z_0}$. Найдем зависимость ω, K_x от начальных значений ω_0, K_{z_0}. Преобразуем, с точностью до $\left(U_{fs}/c\right)^2$, дисперсионное уравнение к виду

$$AK_x^2 + BK_x + P = 0\,.$$

Его коэффициенты равны:

$$A = 1 - a\frac{U_{fs}^2}{c^2}, \quad a = 2w + (\varepsilon\mu - 2)w^2 - w^3,$$

$$B = -2w\frac{w_0}{c}\frac{U_{fs}}{c}b, \quad b = 1 + \varepsilon\mu - w,$$

$$P = \frac{w_0^2}{c^2}\frac{U_{fs}^2}{c^2}q, \quad q = (1 + 2\varepsilon\mu)w^2 - (\varepsilon\mu + 2)w^3 + w^4.$$

Рассчитаем a, b, q, когда величина $\varepsilon\mu$=1. Выразим решение через функцию

$$\Phi = w[(2 - w) - (1 - w)^{1/2}].$$

Получим нелинейную зависимость K_x от w:

$$K_x = \Phi\frac{\omega_0}{c}\frac{U_{fs}}{c}.$$

Угол аберрации определяется выражением:

$$tg\alpha = \frac{K_x}{K_z} = \frac{U_{fs}}{c}\Phi.$$

Связь начальной и промежуточной частоты

$$\omega = \omega_0\left[\left(1 - w\frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2} + \Phi\frac{U_{fs}^2}{c^2}\right]$$

зависит от w. Вдали от поверхности Земли

$$K_x = 0, \quad K_z = -\frac{\omega_0}{c}, \quad \omega = \omega_0.$$

С приближением к Земле величины K_x, ω меняются динамически. При $w = 1$ получим

$$K_x = \frac{\omega_0}{c}\frac{U_{fs}}{c}, \quad \omega = \omega_0\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Эти законы аналогичны законам, полученным в специальной теории относительности. Новое состоит в том, что обобщенная модель электромагнитных явлений задает как конечные значения параметров динамического процесса, так и динамику явления, в частности, закон преобразования скорости в частоту.

1. В вакууме $\rho = 0$ и потому $w = 0$. Групповая скорость поля

$$\vec{V}_g = c\frac{\vec{K}}{K} + \vec{U}_{fs}$$

зависит от скорости первичного источника излучения. Поверхность волнового фронта представляет собой сферу, так как $a = b = c_0 t$, а центр этой сферы перемещается со скоростью $\vec{U}_* = \vec{U}_{fs}$. Картина распространения излучения в новой модели соответствует «баллистической» идее Ритца. Из-за взаимодействия со средой, в частности с системой отсчета, скорость $\vec{U}_{fs}$ может "исчезнуть". Это происходит во всех случаях прямого измерения скорости света в вакууме.

2. Пусть источник излучения покоится относительно наблюдателя $\vec{U}_{fs} = 0$, а среда движется со скоростью $\vec{U}_m$. Для групповой скорости поля получим

$$\vec{V}_g = \frac{c}{n}\frac{\vec{K}}{K} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right) w\vec{U}_m .$$

Оптимальным, с точки зрения увлечения света средой, будет значение $w = 0.5$. При показателе преломления, близком к единице, ему соответствует скорость

$$\vec{V}_g^{\max} = c\frac{\vec{K}}{K} + 0.25\vec{U}_m .$$

3. Анализ динамики поперечного эффекта Доплера для случая малых относительных скоростей приводит к заключению, что при $w = 1$ частота ω задается выражением

$$\omega = \frac{\omega_0}{\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2}} .$$

Умножим его на величину $\hbar / c^2$, где $\hbar$ - постоянная Планка. Получим зависимость для массы, используемую в релятивистской динамике.

Предлагаемая модель динамического изменения электромагнитного поля дает другое выражение для связи частот. Покажем это. Используем рассмотренную выше задачу о распространении излучения из вакуума в атмосферу Земли. Формально положим, что скорость $\vec{U}_{fs}$ стремится к скорости света в вакууме. Пусть для простоты расчета $w = 1$. Тогда $\vec{U} = 0$, $cK_z = n\omega_0$. Поскольку U_{fs} / c близко к единице, требуется использовать реальный показатель преломления, например, $n = 1 + Q$, где $Q << 1$. Получим систему уравнений вида

$$c^2 K_x^2 = n^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right), \qquad \omega = \omega_0\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{n}{c}U_{fs}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^{1/2}.$$

Квадратное уравнение для частоты

$$\omega^2 - 2\omega\omega_0\sigma\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2} + \omega_0^2\sigma\left(1 + \frac{U_{fs}^2}{c^2}\Psi\right) = 0$$

содержит множитель $\sigma = \left[1 - U_{fs}^2\left(1 + \Psi\right) / c^2\right]^{-1}$, $\quad \Psi = 2Q + Q^2$, $\quad n = 1 + Q$.

Значение предельной частоты поля задается законом:

$$\omega = \omega_0 \sigma \left[\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2} \right)^{1/2} - \frac{U_{fs}^2}{c^2} \Psi^{1/2} (1+\Psi)^{1/2} \right].$$

Тогда $\omega^* = \lim \omega \big|_{U_{fs} \to c} = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{\Psi} \right)^{1/2}$. Полагая, что масса пропорциональна частоте, получим новую зависимость:

$$m = m_0 \frac{\left(1 - \frac{U^2}{c^2} \right)^{1/2} - \frac{U^2}{c^2} \Phi^{1/2} (1+\Phi)^{1/2}}{1 - \frac{U^2}{c^2}(1+\Phi)}.$$

При распространении излучения в разреженном газе от первичного источника, движущегося в вакууме со скоростью $\vec{U}_{fs}$, происходит динамическое изменение его групповой скорости $\vec{V}_g$ и частоты ω. При малых относительных скоростях частота ω на конечной стадии динамического процесса отличается от начальной частоты ω_0 на величину

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 0.5\omega_0 \frac{U_{fs}^2}{c^2}.$$

Умножим это выражение на постоянную Планка $\hbar$ и воспользуемся определением Эйнштейна для массы инерции фотона

$$m_{in} = \hbar \frac{\omega_0}{c^2}.$$

Введем следующие определения:

а) кинетическая энергия фотона, обусловленная скоростью первичного источника излучения, есть $E_{кин} = 0.5\hbar \frac{\omega_0}{c^2} U_{fs}^2$,

б) потенциальная энергия фотона есть $\Delta U = \hbar(\omega - \omega_0)$.

Получим закон

$$\Delta U = E_{кин}.$$

С физической точки зрения ситуация выглядит так: вначале фотон имел скорость $\vec{U}_{fs}$, дополнительную к скорости света в вакууме c, и частоту ω_0. При взаимодействии со средой он "преобразовал" скорость $\vec{U}_{fs}$ в добавку к частоте $\Delta\omega$.

Симметрийная модель процессов в электродинамике

В сложных физических задачах, относящихся к релятивистской электродинамике и квантовой механике, трудно выполнить как теоретический, так и экспериментальный анализ деталей взаимодействия, учесть реальные условия измерения. Поэтому обычно ограничиваются анализом не всего процесса изменения величин, а только анализом некоторой системы состояний. Они соответствуют некоторым итогам взаимодействия, которые способны скрывать механизм реальных изменений.

В электродинамике для описания системы состояний используют кинематический метод перерасчета величин, измеренных разными инерциальными наблюдателями. Для этого применяют группу Лоренца, которая является группой изометрий для пространства Минковского. В квантовой механике, базирующейся на пространстве Ньютона и группе Галилея, также исследуются состояния. В ней отказ от анализа процесса обоснован концепцией редукции волнового пакета с предположением, что ее невозможно описать детерминистически.

Представим детерминистическое описание процесса изменения параметров электромагнитного поля. Подход базируется на объединении неизоморфных симметрий в активную систему, способную учитывать как влияние взаимодействий, так и их итоги. Расчёт основан на использовании в электродинамике новой физической величины – показателя отношения *w*.

Система активных симметрий есть новый математический объект. Он назван сигруппой. Частично исследованы свойства сигруппы, проиллюстрированы физические аспекты данного подхода.

В *общеизвестном кинематическом* описании системы состояний используется группа Лорентца. Известно, что она позволяет корректно рассчитать итоги взаимодействия, не раскрывая деталей и хода динамического процесса. В кинематическом подходе различие параметров не имеет динамической природы, потому ему «не нужен» процесс, который задает фиксируемые эмпирически итоги взаимодействия.

Качественно другое описание поведения параметров электромагнитного поля получено в рамках обобщенной *динамической* модели релятивистских эффектов. В новом подходе поведение скорости поля динамически согласовано с изменением его частоты. Изменения происходят в форме *релаксационного процесса*, в котором параметры явления детерминистически меняются от некоторых начальных значений до некоторых конечных.

По параметрам состояния электромагнитного поля, известным для одного наблюдателя, можно рассчитать параметры динамического процесса**,** анализируемого другим наблюдателем. Для этого требуется, дополнительно к реальному физическому пространству-времени размеров $T^1 \times R^3$, ввести пространство-время для скоростей в форме обобщенного пространства Минковского $\widetilde{M}_4$, характеризуя с его помощью физические процессы.

Расчет базируется на обобщенных преобразованиях дифференциалов координат для кокасательного пространства T^*M (ассоциированного с $T^1 \times R^3$):

$$dx' = \gamma(dx - vdt), dt' = \gamma\left(dt - \frac{vw}{c^2}n^2 dx\right), \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}n^2 w\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Они задают симметрию реального физического процесса на уровне учета движений ранга единица (скоростей, частот и факторов управления ими). В них входит относительная скорость для пары наблюдателей v, показатель преломления n, а также **показатель отношения** w, новая физическая величина, введенная в динамической модели релятивистских эффектов. В таком варианте кокасательное пространство T^*M выполняет функции пространства скоростей.

Величина w в электродинамике с показателем отношения задается правилом

$$w = 1 - \exp\left(-P_\lambda (n-1)\right).$$

Здесь $n-$показатель преломления, $P_\lambda -$эмпирическая константа, зависящая от длины волны электромагнитного поля.

Для взаимосвязи скоростей, характеризующей стадии динамического процесса, анализируемого разными наблюдателями, получим выражение

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{vw}{c^2} n^2 dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vw}{c^2} n^2 u_x}.$$

Ранее был обоснован диапазон изменения величин $w = [0-1]$, характеризующих стадии релаксационного процесса изменения параметров явления. Тогда при $w = 0$ получим значения скоростей для второго наблюдателя в случае, когда релаксационный процесс изменения параметров, в частности, обусловленный измерением, только начался. Он соответствует группе Галилея. При $w = 1$получим конечные значения скоростей для релаксационного процесса. Они соответствуют канонической группе Лоренца. Для расчета динамики частоты в исследуемом процессе нужны дополнительные условия, например, обобщенное условие инвариантности фазы волны. Для анализа состояний такой алгоритм использовал Эйнштейн А.

Возникает вопрос: каким математическим объектом является введенная нами математическая конструкция, используемая для описания процесса изменения параметров? Какие дополнительные возможности открывает указанный алгоритм в задачах анализа физических процессов? Как согласовать между собой состояния и процессы?

Заметим, что, с физической точки зрения, анализ процесса проведен на основе использования нового физического параметра w. Тогда динамика процесса получает физическое обоснование. Учтем это обстоятельство как общее правило для будущей практики: е*сли мы желаем учесть что-то новое в процессах или в его симметриях, мы обязаны ввести в физическую модель и в симметрии хотя бы одну новую величину.* Хорошо, если новая величина характеризует общие стороны и свойства явления. Для показателя отношения w это условие выполняется. Естественно, что обобщение симметрии влечет за собой обобщение физических моделей.

Исследуем математическую структуру используемых преобразований для дифференциалов координат, а также специфику используемого алгоритма для описания процесса.

Поскольку однопараметрическое обобщение преобразований дифференциалов координат отталкивается от группы симметрии, мы приходим к варианту построения и использования обобщенных симметрий. Каковы эти симметрии, как ими пользоваться?

Мы понимаем, что предложенное описание релаксационного процесса изменения скоростей и частот на основе пространственно-временных преобразований кокасательного пространства базируется на расширении алгебры симметрии явления.

Действительно, предложенные преобразования координат содержат новый переменный физический параметр w, управляющий процессом. Последуем стандартной методике анализа. Если $d\bar{x} \approx dx + \xi(dx, dy)\alpha, d\bar{y} = dy + \eta(dx, dy)\alpha,$ то получим генератор

$$X = \xi(dx, dy)\frac{\partial}{\partial(dx)} + \eta(dx, dy)\frac{\partial}{\partial(dy)}.$$

Для удобства будем использовать величину x вместо dx и величину t вместо dt.

Мы обнаруживаем, что генератор симметрии группы Лоренца $\Gamma_l = x\partial_t + t\partial_x$ получается при дифференцировании преобразований координат по скорости (параметром симметрии является скорость). Дифференцирование по показателю отношения (характеризующему влияние внешних обстоятельств на явление) дает генератор симметрии группы Галилея вида $\Gamma_* = x\partial_t$. Отмеченные обстоятельства свидетельствуют о качественном различии указанных симметрий.

Если дополнительно ввести новый параметр η в преобразования для дифференциалов координат вида $dx' = \gamma(dx - v\eta dt)$, получим генератор $\Gamma_{q2} = t\partial_x$.

Система из трех генераторов порождает через коммутирование (по алгоритму Ли) пару стандартных генераторов вращения и деформации вида $x\partial_t - t\partial_x, x\partial_x - t\partial_t$. Таблица умножения в алгебре Ли будет следующей:

	$x\partial_t$	$t\partial_x$	$x\partial_t + t\partial_x$	$x\partial_x - t\partial_t$	$t\partial_x - x\partial_t$
$x\partial_t$	0	$x\partial_x - t\partial_t$	$x\partial_x - t\partial_t$	$-x\partial_t$	$x\partial_x - t\partial_t$
$t\partial_x$	$-x\partial_x + t\partial_t$	0	$-x\partial_x + t\partial_t$	$t\partial_x$	$x\partial_x - t\partial_t$
$x\partial_t + t\partial_x$	$-x\partial_x + t\partial_t$	$x\partial_x - t\partial_t$	0	$t\partial_x - x\partial_t$	$x\partial_x - t\partial_t$
$x\partial_x - t\partial_t$	$x\partial_t$	$-t\partial_x$	$-t\partial_x + x\partial_t$	0	$-x\partial_t - t\partial_x$
$t\partial_x - x\partial_t$	$-x\partial_x + t\partial_t$	$-x\partial_x + t\partial_t$	$-x\partial_x + t\partial_t$	$x\partial_t + t\partial_x$	0

.

Проанализируем математическую структуру обобщенных преобразований Лоренца, полагая, что они в состоянии описать релаксационный процесс изменения параметров физических явлений. Поскольку при $w = 0$ это будет группа Галилея, а при $w = 1$ это будет каноническая группа Лоренца, обобщенные преобразования можно рассматривать как однопараметрическое семейство неизоморфных групп. Изучим их свойства и применения.

Рассмотрим действие пары матричных преобразований в кокасательном пространстве. Заметим, что преобразования координат содержат две скорости: одна из них используется без множителя w, а вторая используется с данным множителем. Другими словами, реализовано частичное изменение параметров. В физике в таком случае принято говорить о расщеплении величин. По-видимому, оно имело место всегда, но не обнаруживалось ранее потому, что в преобразованиях координат использовалось значение $w = 1$. Введем обозначения

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dt' \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ -\tilde{v}_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx'' \\ dt'' \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ -\tilde{v}_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ dt' \end{pmatrix},$$

$$\gamma_1 = (1 - v_1\tilde{v}_1)^{-0,5}, \gamma_2 = (1 - v_2\tilde{v}_2)^{-0,5}, \qquad \tilde{v}_1 = \frac{v_1}{c^2} n_1{}^2 w_1, \tilde{v}_2 = \frac{v_2}{c^2} n_2{}^2 w_2,$$

$$a = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ -\tilde{v}_1 & 1 \end{pmatrix}, b = \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ -\tilde{v}_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\begin{pmatrix} dx'' \\ dt'' \end{pmatrix} = \gamma_2\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 + \tilde{v}_1 v_2 & -(v_1 + v_2) \\ -(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) & 1 + v_1\tilde{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix}.$$

Мы обнаруживаем не просто контракцию симметрий для группы Галилея и Лорентца с нефизичным изменением параметров симметрии, когда скорость света в вакууме стремится к бесконечности. Обнаруживается новый физический механизм: изменение показателя отношения w, который позволяет отнести сходные неизоморфные группы к одному семейству симметрий. Заметим, что речь идет о структуре пространства скоростей, а не пространства размеров, у которого есть свои законы и свои симметрии. Запишем преобразования координат и времени в T^*M иначе, используя формулу

$$F = ba = \frac{1}{2}(ba + ab) + \frac{1}{2}(ba - ab).$$

Получим выражения

$$F = \sigma\gamma_2\gamma_1(A + B) = \sigma\gamma_2\gamma_1\left[\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sigma}(v_1 + v_2) \\ -\frac{1}{\sigma}(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma}(v_1\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1 v_2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma}(\tilde{v}_1 v_2 - v_1\tilde{v}_2) \end{pmatrix}\right],$$

$$\sigma = 1 + 0{,}5(\tilde{v}_1 v_2 + v_1\tilde{v}_2),$$

$$\sigma\gamma_2\gamma_1 = \frac{1 + 0{,}5(\tilde{v}_1 v_2 + v_1\tilde{v}_2)}{(1 - v_1\tilde{v}_1 - v_2\tilde{v}_2 + v_1\tilde{v}_1 v_2\tilde{v}_2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Легко показать, что

$$\frac{1}{(\sigma\gamma_1\gamma_2)^2} = 1 - \frac{(v_1 + v_2)(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2)}{\sigma^2} + \frac{1}{4}\frac{v_1^{\,2} v_2^{\,2}}{c^4}\frac{(w_2 - w_1)^2}{\sigma^2} = 1 - V^*\tilde{V}^* = \frac{1}{\gamma_*^{\,2}}.$$

Мы замечаем, что произведение преобразований, зависящих от w, дает выражение, не принадлежащее исследуемому обобщенному семейству. Выразим данное обстоятельство аналитически: $a \cdot b = c + \varphi(\tilde{a}, \tilde{b}), a, b, c \subset M, \tilde{a}, \tilde{b} \subset a, b.$ Фактически мы работаем с моделью представлений симметрии вида $T_{AB} = \alpha T_A T_B + \beta.$ Проанализируем структуру полученного произведения. Во-первых, выражение вида $\frac{1}{\sigma}(\tilde{v}_1 v_2 - v_1\tilde{v}_2)$, характеризует мультипликативный фактор некоммутативности исследуемого семейства. Оно обращается в ноль, когда $w_1 = w_2$. Источником некоммутативности, с алгебраической точки зрения, является новый генератор алгебры симметрии. Во-вторых, множитель γ_* индуцирует введение комплексных скоростей, зависящих от аддитивного фактора некоммутативности $(w_2 - w_1)$. Действительно, пусть

$$V^* = \frac{(v_1 + v_2) + i0{,}5\frac{v_1 v_2}{c}(w_2 - w_1)}{\sigma}, \tilde{V}^* = \frac{(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) - i0{,}5\frac{v_1 v_2}{c^3}(w_2 - w_1)}{\sigma}.$$

Отсюда $\gamma_* = RE\left(1 - V^*\tilde{V}^*\right)^{-0,5}$. Появление комплексных скоростей естественно, если принять идеологию, что им соответствует учет внутренних степеней свободы для физического явления или физической конструкции. Из физических соображений мы понимаем, что у электромагнитного поля изменение скоростей согласовано с изменение частоты, управляемой показателем отношения w, который является скрытым параметром физической задачи.

Мы приходим к следующим выводам:

1. Правила сложения скоростей для физического процесса отличаются от кинематических правил сложения скоростей для состояний. Они зависят от аддитивного и мультипликативного факторов некоммутативности используемого семейства преобразований.
2. Физическому процессу соответствуют комплексные скорости, так реализуется согласованная динамика изменения частот и скоростей.

Назовем анализируемое семейство преобразований сигруппой Галилея-Лорентца, так как в нём содержится пара указанных групп. Обозначим сигруппу выражением *SG*. Запишем элемент сигруппы Галилея-Лорентца мультипликативно, используя в качестве одного множителя элемент, изоморфный группе Лорентца g_1. Получим

$$Sg = g_1 \cdot g_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}}\begin{pmatrix} 1 & v \\ \frac{v}{c^2}w_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{v^2}{c^2}w}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 0 \\ \dfrac{(w-w_1)\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} 1 & v \\ w\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Выразим элемент $g_{2,3}$, используемый для превращения группы Лорентца в сигруппу Галилея-Лорентца, в виде произведения элементов двух новых групп:

$$g_{2,3} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{v^2}{c^2}w}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 0 \\ \dfrac{(w-w_1)\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{(w-w_1)\frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}w} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}w_1}}{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{v^2}{c^2}w}{1-\frac{v^2}{c^2}w_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_2 \cdot g_3.$$

Запишем сигруппу Галилея-Лорентца аддитивно:

$$\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & v \\ \frac{v}{c^2}w & 1 \end{pmatrix} = \frac{\gamma_1}{\gamma}\gamma\begin{pmatrix} 1 & v+\sigma\alpha \\ \frac{v+\sigma\alpha}{c^2} & 1 \end{pmatrix} + \frac{\gamma_1}{\gamma}\gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{c^2}(w-1)-\frac{\sigma\alpha}{c^2} & 1 \end{pmatrix} - \frac{\gamma_1}{\gamma}\gamma\begin{pmatrix} 1 & \sigma\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{g}_1 + \bar{g}_2 + \bar{g}_3.$$

Сигруппа Галилея-Лорентца имеет мультипликативное и аддитивное выражение вида

$$g_1 g_2 g_3 \Leftrightarrow SG \Leftrightarrow \bar{g}_1 + \bar{g}_2 + \bar{g}_3.$$

Система метрик в электродинамике

Наличие и использование неизоморфных групп в обобщенной электродинамике Максвелла инициирует задачу анализа их причин и следствий. В частности, желательно обнаружить «следы» метрик этих групп в структуре уравнений электродинамики. Более того, поскольку анализ релятивистских эффектов выполнен в модели ньютоновского пространства и времени, желательно найти возможность структуризации электромагнитного поля: обосновать структурную модель частиц света. Главная новая идея проводимого анализа такова: уравнения для явлений «подсказывают» структуру объектов, порождающих эти явления.

Воспользуемся моделью электродинамики без ограничения скорости. Она даёт динамическое описание релятивистских эффектов, обобщает специальную теорию относительности и свободна от её ограничений.

В ней динамика полей $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ и индукций $\left(\vec{H}, \vec{D}\right)$ описывается стандартными уравнениями Максвелла:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \nabla \cdot \vec{B} = \vec{0},\ \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho,\ \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\pi\frac{\vec{J}}{c}.$$

Обобщены связи между полями и индукциями:

$$\vec{D} + w\left[\frac{\vec{U}}{c} \times \vec{H}\right] = \varepsilon\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B}\right]\right),\ \vec{B} + w\left[\vec{E} \times \frac{\vec{U}}{c}\right] = \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D} \times \frac{\vec{U}}{c}\right]\right).$$

Здесь $\varepsilon, \mu -$ диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно, $U_x, U_y, U_z -$ компоненты скорости среды, $c -$ скорость света в вакууме. В модели используются величины

$$w = 1 - \exp\left[-P_0\left(n-1\right)\right], \vec{U} = (1-w)\vec{U}_{fs} + w\vec{U}_m.$$

Здесь $\vec{U}_{fs} -$ скорость первичного источника излучения, $\vec{U}_m -$ скорость среды, $w -$ *показатель отношения*, новая скалярная величина, введенная в электродинамику, $n -$ показатель преломления, $P_0(\lambda) -$ эмпирическая величина, зависящая от длины волны излучения. Обобщенная модель даёт новые закономерности для света. Например, групповая скорость электромагнитного поля в нерелятивистском пределе зависит не только от показателя преломления, но и от показателя отношения, не только от скорости среды, но и от скорости первичного источника излучения:

$$\vec{V}_g = \frac{c}{n}\frac{\vec{K}}{K} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right)\left[(1-w)\vec{U}_{fs} + w\vec{U}_m\right].$$

Для достижения ответа на поставленные вопросы представим уравнения обобщенной электродинамики в матричном виде. Этот шаг позволит обнаружить в структуре уравнений систему метрик. Кроме этого, модель будет записана на паре кватернионов, заданных матрицами с размерностью 4×4. Отсюда вытекает предположение, что структура частиц света как-то ассоциирована с четвёркой базовых физических объектов, поскольку найденные матрицы можно интерпретировать как систему отношений между четырьмя объектами.

Используем координаты $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^0 = ict$. Зададим два контрвариантных метрических тензора: $g^{kn} = diag(1,1,1,-1), r^{kn} = diag(1,1,1,1)$. Введем величины

$$\Psi = \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi^* = \begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} H_x + iD_x \\ H_y + iD_y \\ H_z + iD_z \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi^* = \begin{pmatrix} H_x - iD_x \\ H_y - iD_y \\ H_z - iD_z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введем матрицы

$$A \Rightarrow \left\{ a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B \Rightarrow \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Они имеют стандартные свойства кватернионов и задают, с точностью до матриц с противоположными знаками, пару групп. При их взаимном произведении мы получим новую группу, в которой будет присутствовать тройка антикватернионов. Позже будет показано, что теорию гравитационного поля можно сконструировать на этих антикватернионах. В обоих указанных случаям модели получаются удивительно простым способом. Дифференциальные уравнения электродинамики запишем в матричном виде:

$$g^{kn} a_k \partial_n \Psi^* + r^{kn} b_k \partial_n \Psi = 0, r^{kn} a_k \partial_n \phi^* + g^{kn} b_k \partial_n \phi = \Phi .$$

Они содержат пару четырехметрик. Здесь

$$\Phi = \textit{столбец}\left(2\rho U_x, 2\rho U_y, 2\rho U_z, -2i\rho\right).$$

Явный вид уравнений Фарадея-Ампера таков:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_z + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{(-i)}{c} \partial_t \right\} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_z + \right.$$

$$+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{i}{c}\partial_t\Bigg\}\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}=0$$
.

Выполним деформацию матриц A, B с целью применения их на материальных уравнениях электродинамики. Подчиним её правилу $\tilde{\xi}_i = wQ^{-1}\xi_i Q, Q = diag(1,1,1,w)$. Запишем в матричном виде связи между полями и индукциями:

$$i\mu\Bigg\{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{U_x}{c}+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\frac{U_y}{c}+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\frac{U_z}{c}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}(-i)\Bigg\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}H_x-iD_x\\H_y-iD_y\\H_z-iD_z\\0\end{pmatrix}-i\mu\Bigg\{\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{U_x}{c}+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\frac{U_y}{c}+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{U_z}{c}+$$

$$+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}(i)\Bigg\}\begin{pmatrix}H_x+iD_x\\H_y+iD_y\\H_z+iD_z\\0\end{pmatrix}=w\Bigg\{\begin{pmatrix}0&0&0&-w\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\w^{-1}&0&0&0\end{pmatrix}\frac{U_x}{c}+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-w\\1&0&0&0\\0&w^{-1}&0&0\end{pmatrix}\frac{U_y}{c}+$$

$$+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-w\\0&0&w^{-1}&0\end{pmatrix}\frac{U_z}{c}+\frac{1}{w}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}(i)\Bigg\}\begin{pmatrix}E_x-iB_x\\E_y-iB_y\\E_z-iB_z\\0\end{pmatrix}+w\Bigg\{\begin{pmatrix}0&0&0&w\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-w^{-1}&0&0&0\end{pmatrix}\frac{U_x}{c}+$$

$$+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&w\\1&0&0&0\\0&-w^{-1}&0&0\end{pmatrix}\frac{U_y}{c}+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&w\\0&0&-w^{-1}&0\end{pmatrix}\frac{U_z}{c}+\frac{1}{w}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}(-i)\Bigg\}\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}=0.$$

Выражения

$$\Psi_1=E_x+iB_x=\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial\phi}{\partial x}+i\frac{\partial A_z}{\partial y}-i\frac{\partial A_y}{\partial z},\dots,\ \Psi_1^*=E_x-iB_x=\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial\phi}{\partial x}-i\frac{\partial A_z}{\partial y}+i\frac{\partial A_y}{\partial z},\dots$$

также имеют матричное представление:

$$\begin{pmatrix}-\partial_\tau&-i\partial_z&i\partial_y&-i\partial_x\\i\partial_z&-\partial_\tau&-i\partial_x&-i\partial_y\\-i\partial_y&i\partial_x&-\partial_\tau&-i\partial_z\\i\partial_x&i\partial_y&i\partial_z&-\partial_\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\\-i\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi_1\\\Psi_2\\\Psi_3\\\Psi_0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\partial_\tau&i\partial_z&-i\partial_y&-i\partial_x\\-i\partial_z&-\partial_\tau&i\partial_x&-i\partial_y\\i\partial_y&-i\partial_x&-\partial_\tau&-i\partial_z\\i\partial_x&i\partial_y&i\partial_z&-\partial_\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\\-i\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi_1^{\circ}\\\Psi_2^*\\\Psi_3^*\\\Psi_0^*\end{pmatrix}.$$

С математической точки зрения запись уравнений обобщенной электродинамики Максвелла в матричном виде проста и естественна. Принципиально новым моментом является только возможность представления уравнений на паре групп A, B. Примем предположение, что матрицы, входящие в уравнения электродинамики, свидетельствуют о структуре электромагнитного поля.

Для его теоретического наполнения учтем экспериментальные факты:

- свет не имеет массы и электрического заряда,
- при взаимодействии $\gamma-$квантов рождаются элементарные частицы с электрическим зарядом и массой.

Примем гипотезу, что частицы света могут быть сконструированы из четырех объектов. Одна такая пара не имеет массы и имеет противоположные электрические свойства. Другая их пара не имеет электрического заряда и имеет противоположные гравитационные свойства. Примем основную гипотезу о физической структурности света: свет представляет собой систему объектов, изготовленных в форме нейтральных физических систем, состоящих из положительных и отрицательных электрических и гравитационных предзарядов, соединенных между собой системой силовых линий.

Пространство размеров Ньютона и обобщенное пространство скоростей, которое допускает как метрику Минковского, так и метрику Евклида, не вступают в противоречие друг с другом, Их можно рассматривать, естественно, как единое расслоенное многообразие. Его базой будет пространство Ньютона, а слои задаются структурой пространства скоростей. Главный новый факт таков: уравнения электродинамики в матричной форме базируются на системе четырехметрик.

Четырехметрики удобно описывать, используя характеристические полиномы для элементов матричной группы. Критические и экстремальные точки этих полиномов индуцируют четырехметрики для физических моделей. В них пространство евклидово в трехмерии. Если же мы рассматриваем уравнения, используя всю матричную группу, дополнительно к ним присоединяются четырехметрики, ассоциированные с матрицами Картана. Они неевклидовы в трехмерии. Из анализа обобщенной электродинамики движущихся сред следует, что фундаментальные уравнения физики могут быть записаны в единой форме, используя три метрики пространства скоростей: $r_{SE}^{ij} = \left(r^{ij}, n^{ij}, g^{ij}\right)$.

Это обстоятельство изначально отвергает точку зрения, что фундаментальные симметрии в электродинамике «исчерпываются» группой Лоренца, так как есть семейство метрических интервалов. Возникает вопрос: что является математическим средством для их порождения?

Покажем, что их можно рассматривать как конструкции, образованные соединением физически различных элементов: трехмерного пространства размеров R^3 и одномерного времени T^1. Используем для этого параметры критических и экстремальных точек λ_k характеристических полиномов

$$\overset{*}{Y} = \det\left\|\lambda I - A\right\|$$

соответствующих системе указанных выше кватернионов и антикватернионов. Исследуемая ситуация относится не только к электродинамике. Дело в том, что рассматриваемая система, состоящая из двух кватернионов и трех антикватернионов достаточна для конструирования матричной алгебры с размерностью матриц, равной четыре. Она пригодна для всей физики.

В данном случае характеристические полиномы заданы рис. 12:

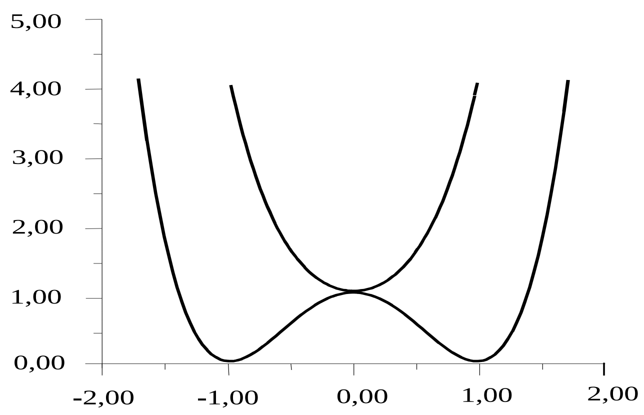


Рис. 12. Форма характеристических полиномов

Используем их критические и экстремальные значения как средство для порождения метрик пространства скоростей. В рассматриваемом случае они заданы числами $\lambda_k = -1,0,1$. Введем

$$\eta_{SE}^{ij} = diag(1, 1, 1, \lambda_k \cdot 1).$$

Эта величина формально соединяет $\boldsymbol{R}^3$ и T^1 через λ_k. Выберем значения λ_k, которые соответствуют экстремумам. Тогда

$$\left.\frac{d^2 Y_1}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} < 0, \quad \left.\frac{d^2 Y_2}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} > 0.$$

Есть критические точки $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Соединим их с точками экстремумов, которые в данном случае совпадают по значениям $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, но различны по величинам $\left.\frac{d^2 Y}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}$.

Получим четыре канонические локальные метрики для пространства скоростей:

$$r^{ij} = diag(1, 1, 1, -1), \quad n^{ij} = diag(1, 1, 1, \pm 0), \quad g^{ij} = diag(1, 1, 1, 1).$$

Знаки (±) перед нулем свидетельствуют о том, что в физике используются два типа пространств:

$$\Pi(a): n^{ij}(+) = diag(1, 1, 1, +0), \left.\frac{d^2 Y_1}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} > 0; \Pi(b): n^{ij}(-) = diag(1, 1, 1, -0), \left.\frac{d^2 Y_1}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} < 0.$$

Первое соответствует «устойчивой» метрике Ньютона, второе – «неустойчивой» метрике Барыкина. П(a) удобно использовать для описания устойчивых состояний объектов и явлений. П(b) удобно использовать для описания событий, которые способны измениться из-за поведения λ_k (например, от $\lambda_1 = -1$ до $\lambda_2 = 1$ через $\lambda = 0$ или в обратном по $\Delta\lambda$ варианте).

К физической сущности гравитации

Модели гравитации, используемые в настоящее время, в основном базируются на идее Эйнштейна: гравитация есть проявление пространства-времени, ассоциированного с материальными объектами и их движениями. Объекты и их взаимодействия не выводятся из свойств и характеристик пространства-времени. В этом подходе пространство и время не рассматриваются как физические объекты, имеющие механическую структуру и механические движения. Гравитация не является физическим полем, пространство-время ассоциируется с четырёхмерным многообразием Римана. Первичность в парадигме описания материального мира и физическая нематериальность гравитации образуют главные черты теории гравитации Эйнштейна. Модель гравитации, предложенная Эйнштейном, построена на исключении из неё, из физических соображений, «невесомой» материи, расположенной между весомыми физическими телами. В его время такую роль выполнял вакуум, который принято было, начиная с Ньютона, называть эфиром. По современной терминологии мы имеем дело с тонкой материей. Был принят отказ от эфира по понятным причинам: отсутствовали данные, задающие его структурные и динамические свойства. Не было информации о взаимодействии между грубой и тонкой материей. Этих причин достаточно, чтобы попытаться описать гравитацию без учета свойств тонкой материи. Отметим, что свойства весомой материи тоже не учитывались в полной мере, потому что они не были известны. В частности, никак не была учтена специфика и роль слабых и ядерных взаимодействий в моделировании гравитации. В то время их просто не было. Оставалась, по сути, только одна возможность: использовать модель пространства и времени, согласовав её с тензором энергии и импульса весомой материи. Этот вариант, предложенный Эйнштейном в форме уравнений

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \chi T_{ij}$$

хорошо проявил себя в теории и в эксперименте.

Установлено более 100 новых теоретических фактов, часть которых подтверждена экспериментально. Однако глубинные вопросы теории и эксперимента в гравитации были по-прежнему далеки от практики. Физическая модель гравитации в контексте полной модели отсутствовала. Нужно было найти вариант обобщения модели гравитации, выполнив согласование с электродинамикой, которая получила широкое техническое приложение. С другой стороны, требовалось согласовать модель гравитации с моделями ядерных и слабых взаимодействий. В этом случае становится возможным согласование теории гравитации с теорией и моделями элементарных частиц.

Модели гравитации, используемые в настоящее время, либо дополняют указанную модель, либо базируются на некоторых новых положениях. В частности, такова релятивистская физическая модель гравитации Логунова в пространстве Минковского. По аналогии с электродинамикой Логунов постулировал уравнения

$$J^{mn} = D_k D_p \left[\gamma^{kn} \tilde{g}^{pm} + \gamma^{km} \tilde{g}^{pn} - \gamma^{mn} \tilde{g}^{kp}\right] = \lambda\left(t_g^{mn} + t_m^{mn}\right).$$

Используя их, он получил систему уравнений релятивистской теории гравитации (РТГ):

$$\gamma^{kp} D_k D_p \tilde{g}_{mn} = -\lambda\left(t_g^{mn} + t_m^{mn}\right), \; D_m \tilde{g}_{mn} = 0.$$

При выборе плотности лагранжиана из принципа наименьшего действия получаются уравнений РТГ. Пусть

$$L = a\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}_{lp}D_l\tilde{g}^{kq}D_p\tilde{g}^{mn} + B\tilde{g}_{kq}D_m\tilde{g}^{pq}D_p\tilde{g}^{km} + c\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp}D_l\tilde{g}^{km}D_p\tilde{g}^{nq}.$$

Ковариантные производные берутся по метрике Минковского. Вычислим вариацию Лагранжиана по метрике γ_{mn}. Получим

$$\begin{aligned} t^{mn} &= 2\sqrt{-\gamma}\left(\gamma^{nk}\gamma^{mp} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{pk}\right)\frac{\delta\tilde{L}}{\delta\tilde{g}^{kp}} + 2bJ^{mn} + \\ &+ D_p\left\{(2a+b)\left[H_k^{pn}\gamma^{km} + H_k^{pm}\gamma^{kn} - H_k^{mn}\gamma^{kp}\right]\right\} - \\ &- 2(a+2c)\gamma^{mn}\tilde{g}^{kp}\tilde{g}_{lq}D_k\tilde{g}^{lq}, \end{aligned}$$

Здесь $H_n^{pk} = \left(\tilde{g}^{pl}D_l\tilde{g}^{qn} + \tilde{g}^{nl}D_l\tilde{g}^{pq}\right)\tilde{g}_{qk}$. Если $a = -\frac{1}{2}b, c = \frac{1}{4}b,$ получим $D_m t^{mn} = 0.$ После преобразований из них следует лагранжиан в форме, предложенной Розеном

$$L_g = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\,g^{mn}\left(G_{lm}^k G_{nk}^l - G_{mn}^l G_{lk}^k\right), G_{ml}^k = \frac{1}{2}g^{kp}\left(D_m g_{pl} + D_l g_{pm} - D_p g_{lm}\right).$$

Используя их, выводятся уравнения релятивистской теории гравитации (РТГ). С учётом указанных ограничений лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2\gamma}(-\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}_{lp}D_l\tilde{g}^{kq}D_p\tilde{g}^{mn} + \tilde{g}_{kq}D_m\tilde{g}^{pq}D_p\tilde{g}^{km} + \frac{1}{4}\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp}D_l\tilde{g}^{km}D_p\tilde{g}^{nq}).$$

Для него

$$\frac{\partial L_g}{\partial\tilde{g}_{mn}} = \frac{1}{16\pi}\left(G_{lm}^k G_{kn}^l - G_{mn}^k G_{kl}^l\right), \frac{\partial L_g}{\partial_{,k}^{mn}} = \frac{1}{16\pi}\left(G_{mn}^k - \frac{1}{2}\delta_m^k G_{nl}^l - \frac{1}{2}\delta_n^k G_{ml}^l\right).$$

Поэтому

$$\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{g}^{mn}} = -\frac{1}{16\pi}R_{mn}, \, R_{mn} = D_k G_{mn}^k - D_m G_{nl}^l + G_{mn}^k G_{kl}^l - G_{ml}^k G_{nk}^l.$$

В силу предыдущих формул

$$2\frac{\delta L_m}{\delta g^{mn}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(T_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}T\right).$$

Имеем аналог уравнений Гильберта-Эйнштейна:

$$\sqrt{-g}R_{mn} = 8\pi\left(T_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}T\right).$$

Отличие предлагаемой модели от модели Эйнштейна состоит в том, что все переменные данной теории заданы в пространстве Минковского. Заметим, что уравнения РТГ являются простейшими уравнениями второго порядка. В общем случае они могут быть обобщены.

В этом подходе удалось по-новому решить ряд проблем, неразрешимых в геометрической модели гравитации Эйнштейна: преодолеть сингулярности модели, построить тензор энергии-импульса, найти законы сохранения.

Однако до настоящего времени мы не имеем ответов на многие вопросы:

- Возможно ли описание гравитационных явлений в макроскопическом пространстве и времени $T^1 \times R^3$, следующем из макрофизики и привычном для экспериментаторов?
- Как получить из теории гравитации модель гравитационного заряда и описание его эволюции? Есть ли отрицательный и положительный гравитационные заряды? Есть ли нулевой гравитационный заряд?
- В каком смысле, каким образом можно согласовать между собой теорию электродинамических и гравитационных явлений? Насколько они похожи и почему различны между собой? Насколько могут быть похожи модели электрических и гравитационных зарядов?
- Есть ли у гравитации скрытая физическая материальная природа, чем она обусловлена? Можно ли дать визуальный образ физическому механизму гравитационного воздействия?
- Каким образом расширить и углубить практические приложения гравитации, как управлять гравитацией?
- Какие физические и математические моменты упущены в теории гравитации? Как их учесть и применить на практике?
- Есть ли гравитационное излучение в форме частиц? Чему равны их энергии?

Примем идею алгебраической аналогии между электромагнитным и гравитационным полем. Электродинамика строится на паре её кватернионов, а гравитация – на тройке её антикватернионов. Кватернионы и антикватернионы исчерпывают всю группу заполнения физических явлений. На этой основе складывается впечатление, что электродинамика и гравитация в некотором смысле «исчерпывают» все базовые свойства физической материи на любом её уровне. Ведь группа заполнения может использоваться на любом уровне материи. Анализ показал, что возможна возможна спинорная модель гравитации. Она содержит в себе как модель гравитации Ньютона, так и модель гравитации Эйнштейна. Четырехметрика геометрической модели гравитации Эйнштейна, выступающая в роли первичного элемента его теории, в спинорной модели является вторичным математическим и физическим элементом. Новая модель гравитация базируется не только на структурных и динамических свойствах макроматерии, но и на свойствах тонкой материи, названной праматерией. Четырехметрика гравитации g_{ij} ассоциирована с тензором напряжений тонкой материи σ^{kl}. В частности, возможен вариант связей $g_{ij} = \chi_{ijkl}\sigma^{kl}$. Спинорная модель гравитации утверждает алгебраическую аналогию между электромагнетизмом и гравитацией. В рамках модели двухуровневой материи возможно «конструирование» гравитационных зарядов как физических изделий, содержащих предзаряды. Заряды создаются из предзарядов. Этот подход можно обосновать как с физической точки зрения, так и из симметрийных соображений. Не только гравитационные, но и электрические заряды и предзаряды взаимно согласованы и могут, в частности, превращаться друг в друга. Указанный подход ставит перед исследователями совокупность актуальных проблем. Перед теоретической физикой стоит задача создания моделей многоуровневой гравитации. Она может быть исходным элементом для будущей трансфинитной модели гравитации.

Идея двухтензорной модели гравитации

Ранее нами был рассмотрен вариант двухтензорной электродинамики движущихся сред без ограничения скорости в спинорной форме. Она была выражена через пару кватернионов**,** ассоциированных с матричной группой $PSL(4,C)$ в мономиальном представлении. В такой модели величины, дифференциальные уравнения и связи между полями и индукциями имеют вид $G-$модуля на указанной матричной группе. Известно на примере закона Кулона и закона притяжения Ньютона, что взаимодействия между электрическими и между массовыми зарядами имеют похожую математическую структуру. Исходя из указанных замечаний и предположения об аналогии двух видов взаимодействия, построим массодинамику (динамику массовых зарядов), реализуя новую модель в спинорной форме на тройке антикватернионов группы $PSL(4,C)$. Построим вариант массодинамики, исходя из предположения о возможной аналогии ее уравнений со структурой электродинамики в спинорной форме. Учтем факт, что стандартная модель электромагнитных явлений базируется на паре антисимметричных тензоров. Они порождаются, как и дифференциальные уравнения, и связи между ними, парой кватернионов мономиального представления группы $PSL(4,C)$. Для массодинамики, принимая описание ее парой симметричных тензоров, естественно использовать тройку антикватернионов, которые содержатся в мономиальном представлении группы $PSL(4,C)$. Мы ожидаем, исходя из общих соображений, доказательства гипотезы, что электрические и гравитационные взаимодействия едины не только математически, но и физически, что они дополняют друг друга, имеют возможность взаимного превращения, хотя различаются по типу зарядов. Отметим проблему построения единой динамики зарядов, инициированную объединением электромагнетизма и гравитации. Для движущихся масс в физической теории используются динамические уравнения Ньютона или их обобщения. Для электрических зарядов аналогичных уравнений нет. Такое различие представляется некорректным, если исходить из предположения, что электрический и массовый заряды по-разному изготовлены из одних и тех же элементов тонкой материи. Современные модели гравитации базируются на исследовании ее «внешних», видимых проявлений. Например, так исследуется поведение планет Солнечной системы. Они моделируются массой и скоростью, присоединенными к физическому пространству и времени. Такой подход не в состоянии достичь «внутренней» сущности гравитации, в частности, понимания структуры и функций гравитационного заряда. Не изучаются и возможные «внутренние» движения, присущие гравитации. По форме и по сути подхода так строятся модели одноуровневого материального мира, когда базовым физическим элементом анализа являются макротела и их движения. Практика свидетельствует, что реальность трансфинитна, в частности, многоуровнева. Физическая материя имеет множество структурных элементов, согласованных между собой. Поэтому актуален и неизбежен анализ всей совокупности структурных составляющих материи, относящихся к практической гравитации. Такая гравитация трансфинитна согласно концепции трансфинитной материи. У неё много граней, сторон и свойств, многие из которых нам неизвестны и будут обнаружены позднее. Для массодинамики актуально создание структурной теории гравитационных зарядов, относящихся к разным уровням материи, а также физический анализ всей совокупности их взаимодействий. Развитие теории в этом направлении объективно приведет к трансфинитной модели гравитации.

Простейшая спинорная массодинамика

Построим спинорную модель массодинамики в форме уравнений, ассоциированных с антикватернионами. Используем аналогию с электродинамикой. Для этого, во-первых, введём через новые четырехпотенциалы $A_n(\mu)$ аналоги «электрических» $\vec{L} \approx \vec{E}$ и «магнитных» $\vec{K} \approx \vec{B}$» полей. Во-вторых, используем в качестве исходного шага уравнения для $\vec{L}, \vec{K}$ на паре антикватернионов (учитывая тот факт, что спинорная электродинамика построена в форме линейных уравнений на паре кватернионов). Рассмотрим в качестве начального шага уравнения $r^{ij} f_i \partial_j \phi^* + g^{ij} e_i \partial_j \phi = s$. Здесь

$$r^{ij} = diag(1,1,1,-1), g^{ij} = diag(1,1,1,1), \partial_1 = \partial_x, \partial_2 = \partial_y, \partial_3 = \partial_z, \partial_0 = \pm i c_g \partial_t.$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{i}{c_g}\partial_t\right\}\begin{pmatrix} L_x - iK_x \\ L_y - iK_y \\ L_z - iK_z \\ L_0 - iK_0 \end{pmatrix} +$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{(-i)}{c_g}\partial_t\right\}\begin{pmatrix} L_x + iK_x \\ L_y + iK_y \\ L_z + iK_z \\ L_0 + iK_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ s_0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следуют векторные уравнения

$$-\partial_x(L_0 - iK_0) + \partial_y(L_z - iK_z) + \partial_z(L_y - iK_y) + \frac{i}{c_g}\partial_t(L_x - iK_x) +$$

$$+\partial_x(L_0 + iK_0) + \partial_y(L_z + iK_z) + \partial_z(L_y + iK_y) - \frac{i}{c_g}\partial_t(L_x + iK_x) = s_x,$$

$$\partial_x(L_z - iK_z) - \partial_y(L_0 - iK_0) + \partial_z(L_x - iK_x) + \frac{i}{c_g}\partial_t(L_y - iK_{yx}) +$$

$$+\partial_x(L_z + iK_z) + \partial_y(L_0 + iK_0) + \partial_z(L_x + iK_x) - \frac{i}{c_g}\partial_t(L_y + iK_y) = s_y,$$

$$\partial_x(L_y - iK_y) + \partial_y(L_x - iK_x) - \partial_z(L_0 - iK_0) + \frac{i}{c_g}\partial_t(L_z - iK_z) +$$

$$+\partial_x(L_y + iK_y) + \partial_y(L_x + iK_x) + \partial_z(L_0 + iK_0) - \frac{i}{c_g}\partial_t(L_z + iK_z) = s_z,$$

$$-\partial_x(L_x - iK_x) - \partial_y(L_y - iK_y) - \partial_z(L_z - iK_z) + \frac{i}{c_g}\partial_t(L_0 - iK_0) +$$

$$+\partial_x(L_x + iK_x) + \partial_y(L_y + iK_y) + \partial_z(L_z + iK_z) - \frac{i}{c_g}\partial_t(L_0 + iK_0) = s_0.$$

Их можно записать в иной форме:

$$\partial_y L_z + \partial_z L_y + \frac{1}{c_g}\partial_t K_x = -i\partial_x K_0 + s_x, \partial_x L_z + \partial_z L_x + \frac{1}{c_g}\partial_t K_y = -i\partial_y K_0 + s_y,$$

$$\partial_x L_y + \partial_y L_x + \frac{1}{c_g}\partial_t K_z = -i\partial_z K_0 + s_z, \partial_x K_x + \partial_y K_y + \partial_z K_z = \frac{i}{c_g} K_0 + s_0.$$

Введем дифференциальный оператор:

$$rat\vec{L} = \begin{Bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ L_x & L_y & L_z \end{Bmatrix} = \vec{i}\left(\partial_y L_z + \partial_z L_y\right) + \vec{j}\left(\partial_x L_z + \partial_z L_x\right) + \vec{k}\left(\partial_x L_y + \partial_y L_x\right).$$

Он позволяет записать предложенные уравнения массодинамики в векторном виде, формально аналогичном уравнениям электродинамики Максвелла:

$$rat\vec{L} = -\frac{1}{c_g}\partial_t \vec{K} - igradK_0 + \vec{s}, div\vec{K} = \frac{i}{c_g} K_0 + s_0.$$

При использовании оператора времени $\partial_0 = ic_g\partial_t$ мы получим уравнения

$$rat\vec{L} = \frac{1}{c_g}\partial_t \vec{K} - igradK_0 + \vec{s}, div\vec{K} = -\frac{i}{c_g} K_0 + s_0.$$

Чтобы достичь большего сходства с электродинамикой, рассмотрим частный случай с $K_0 = const = 0, \vec{s} = 0, s_0 = 0$. Получим уравнения

$$rat\vec{L} = \mp\frac{1}{c_g}\partial_t \vec{K}, div\vec{K} = 0.$$

В электродинамике в силу антисимметричности тензоров для полей и индукций у них отсутствуют диагональные элементы. Для симметричного тензора массодинамики их нужно как-то учесть.

Используем для этого третий антикватернион, образующий подгруппу диагональных матриц Картана c^i в группе $SL(4,C)$. Будем рассматривать диагональные элементы симметричных тензоров независимо.

Для этого используем проекционные матрицы:

$$\Pi^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Они сконструированы из матриц Картана $c^i, i = 0,1,2,3$ в виде:

$$\Pi^1 = 0,25\left(c_0 + c^1 + c^2 + c^3\right), \Pi^2 = 0,25\left(c_0 - c^1 + c^2 - c^3\right),$$
$$\Pi^1 = 0,25\left(c_0 + c^1 - c^2 - c^3\right), \Pi^0 = 0,25\left(c_0 - c^1 - c^2 + c^3\right).$$

Их можно записать в виде формул:

$$\Pi^k = \xi_{ij}\left(k\right)c^i c^j, \xi_{ij}\left(k\right) \Rightarrow c^k.$$

Здесь

$$c^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, c^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, c^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим их таким образом, чтобы система дифференциальных уравнения допускала «волновые» уравнения для четырехпотенциала массодинамики $A_n\left(\mu\right)$. Рассмотрим *дополнение* предыдущих уравнений новыми слагаемыми:

$$r^{ij} f_i \partial_j \phi^* + g^{ij} e_i \partial_j \phi + 2\Pi^i \Pi^j \partial_i \partial_j A\left(\mu\right) = s, A = column(A_1, A_2, A_3, A_0).$$

Пусть также, по аналогии с электродинамикой, $K_0 = L_0 = 0$. Получим уравнения вида

$$rat\vec{L} = \mp \frac{1}{c_g}\partial_t \vec{K} - 2grad^2\vec{A} + \vec{s}, div\vec{K} = \pm \frac{2}{c^2{}_g}\frac{\partial A_0}{\partial t} + s_0.$$

Здесь использован оператор

$$grad^2\vec{A} = \vec{i}\,\partial_x^2 A_x + \vec{j}\partial_y^2 A_y + \vec{k}\partial_z^2 A_z.$$

Уравнения построены с использованием двух новых дифференциальных операторов:

$$rat\vec{L}, grad^2\vec{A}.$$

Их нет в электродинамике, они не использовались в других разделах физики. Мы получаем некую качественно новую физическую модель:

$$\partial_y L_z + \partial_z L_y \pm \frac{1}{c_g}\partial_t K_x = -2\partial^2{}_x A_x + s_x, \partial_x L_z + \partial_z L_x \pm \frac{1}{c_g}\partial_t K_y = -2\partial^2{}_y A_y + s_y,$$
$$\partial_x L_y + \partial_y L_x \pm \frac{1}{c_g}\partial_t K_z = -2\partial^2{}_z A_z + s_z, \partial_x K_x + \partial_y K_y + \partial_z K_z = s_0.$$

Проанализируем структуру полученной модели. В декартовой системе координат введём симметричный тензор (он не связан пока с известными теориями гравитации):

$$\phi_{kl}(\mu) = \partial_k A_l(\mu) + \partial_l A_k(\mu).$$

Запишем его в матричном виде:

$$\phi_{ij}(\mu) = \begin{pmatrix} 2\partial_x A_x & \partial_x A_y + \partial_y A_x & \partial_x A_z + \partial_z A_x & \partial_x A_0 + \partial_0 A_x \\ \partial_x A_y + \partial_y A_x & 2\partial_y A_y & \partial_y A_z + \partial_z A_y & \partial_y A_0 + \partial_0 A_y \\ \partial_x A_z + \partial_z A_x & \partial_y A_z + \partial_z A_y & 2\partial_z A_z & \partial_z A_0 + \partial_0 A_z \\ \partial_x A_0 + \partial_0 A_x & \partial_y A_0 + \partial_0 A_y & \partial_z A_0 + \partial_0 A_z & 2\partial_0 A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{11} & L_z & L_y & K_x \\ L_z & L^{22} & L_x & K_y \\ L_y & L_x & L^{33} & K_z \\ K_x & K_y & K_z & L^{00} \end{pmatrix}.$$

Введённые выше дифференциальные уравнения, которые претендуют на роль уравнений массодинамики, могут быть записаны через четырёхпотенциал. Так, например, из условия

$$\partial_y L_z + \partial_z L_y \pm \frac{1}{c}\partial_t K_x = -2\partial_x^2 A_x + s_x$$

следует уравнение

$$\partial_x(2\partial_x A_x) + \partial_y(\partial_x A_y + \partial_y A_x) + \partial_z(\partial_x A_z + \partial_z A_x) \pm \partial_0(\partial_x A_0 + \partial_0 A_x) = s_x.$$

Из полной системы векторных уравнений, предлагаемых для описания гравитации, получим систему уравнений для четырёхпотенциала:

$$\nabla^2 A_x \pm \partial_0{}^2 A_x + \partial_x\left(div\vec{A} \pm \partial_0 A_0\right) = s_x, \nabla^2 A_y \pm \partial_0{}^2 A_y + \partial_y\left(div\vec{A} \pm \partial_0 A_0\right) = s_y,$$
$$\nabla^2 A_z \pm \partial_0{}^2 A_z + \partial_z\left(div\vec{A} \mp \partial_0 A_0\right) = s_z, \nabla^2 A_0 \pm \partial_0{}^2 A_0 + \partial_0\left(div\vec{A} \pm \partial_0 A_0\right) = s_0.$$

Примем калибровочное условие $div\vec{A} \pm \partial_0 A_0 = const = 0.$ Для четырехпотенциала массодинамики получим уравнения, «аналогичные» используемым в электродинамике. Компоненты четырехпотенциала массодинамики подчинены «волновому» уравнению

$$\nabla^2 A_n(\mu) \pm \partial_0{}^2 A_n(\mu) = s_n, n = 1,2,3,0.$$

Заметим, что для четырехметрики

$$\Gamma^{ij} \Rightarrow (\gamma^{ij}(1) = diag(1,1,1,1), \gamma^{ij}(-1) = diag(1,1,1,-1))$$

динамические уравнения массодинамики имеют тензорный вид:

$$\Gamma^{kl}\partial_k\partial_l A_n(\mu) = s_n,$$

$$\Gamma^{kl}\partial_k A_l = 0.$$

Такова простейшая возможность ожидаемого описания гравитации симметричным тензором, зависимым от четырёхпотенциала $A_n(\mu)$. Мы убедились в алгебраической и математической аналогии массодинамики и электродинамики. Обе модели задаются на основе своих четырёхпотенциалов $A_n(q), A_n(\mu)$.

Антисимметричные и симметричные тензоры образуются из них по аналогичному закону. Уравнения записаны в спинорной форме на одной и той же группе заполнения. Однако, так как в рассматриваемых моделях используются разные дифференциальные операторы, мы пришли пока только к формальной аналогии. Есть более простая возможность вывода полученных формул. Усилим тезис о единстве электромагнитного и гравитационного полей. Будем исходить из уравнений, решения которых допускают такую возможность. Они имеют вид

$$\partial_k \partial_l \varphi_{ps} - \partial_l \partial_p \varphi_{sk} + \partial_p \partial_s \varphi_{kl} - \partial_s \partial_k \varphi_{lp} = \partial_{(k} \partial_l \varphi_{ps)} = 0.$$

Их решением, в частности, является как симметричный тензор

$$\phi_{kl}(\mu) = \partial_k A_l(\mu) + \partial_l A_k(\mu),$$

так и антисимметричный тензор

$$\varphi_{kl}(\mu) = \partial_k A_l(\mu) - \partial_l A_k(\mu).$$

Ниже будет показано, что эта система уравнений может быть выведена из электродинамики. Свет через свои свойства показывает гравитацию. Но это могут быть также гравитационные свойства света. Впервые есть система уравнений, допускающая решения как в форме симметричного, так и антисимметричного тензоров. Возможна также их суперпозиция с постоянными коэффициентами. Введем тензорную плотность по четырёхмерной метрике Евклида

$$\tilde{\phi}^{ij} = \tilde{\sigma} \gamma^{ik} \gamma^{jl} \phi_{kl}.$$

Уравнения

$$\partial_i \tilde{\phi}^{ij} = \tilde{s}^j$$

можно трактовать как закон сохранения для рассматриваемой тензорной плотности, помеченной знаком тильда. Тогда, используя введенные ранее обозначения, получим

$$\partial_x (2\partial_x A_x) + \partial_y (\partial_x A_y + \partial_y A_x) + \partial_z (\partial_x A_z + \partial_z A_x) + \partial_0 (\partial_x A_0 + \partial_0 A_x) = s_x \ldots \Rightarrow$$

Полная система уравнений совпадёт с векторными уравнениями массодинамики, указанными выше, если

$$K_0 = 0, \; \partial_0 = -ic_g \partial_t.$$

Следовательно, одни и те же простейшие уравнения массодинамики можно получить разными способами. Заметим, что «электрический» вектор массодинамики построен из уравнений для четырехпотенциала массодинамики по аналогии с «магнитным» вектором электродинамики. С позиции не только формального, но и сущностного объединения электромагнетизма и гравитации создание генераторов электромагнитного поля «подсказывает» возможность создания генераторов гравитационного поля.

Конвективная двухуровневая массодинамика

Слагаемые, аналогичные «волновым», есть в гидродинамике вязкой жидкости. Однако в ней есть и конвективные слагаемые. Они ассоциированы с плотностью массы. В электродинамике плотность массы равна нулю, поэтому конвективных слагаемых в ней нет. В массодинамике из-за наличия ненулевых масс возможно добавление в систему уравнений конвективных слагаемых, что делает ее близкой к гидродинамике вязкой жидкости. Рассмотрим такую возможность. Введём тензор

$$p_{ij}(g)=0,5\left(\phi_{ij}-\varphi_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\partial_x A_x & \partial_y A_x & \partial_z A_x & \partial_0 A_x\\ \partial_x A_y & \partial_y A_y & \partial_z A_y & \partial_0 A_y\\ \partial_x A_z & \partial_y A_z & \partial_z A_z & \partial_0 A_z\\ \partial_x A_0 & \partial_y A_0 & \partial_z A_0 & \partial_0 A_0\end{pmatrix}.$$

Дополним его тензором, образованным произведением компонент четырехпотенциала массодинамики: $a_{ij}=A_iA_j$. Пусть $p^{ij}=\gamma^{ik}\gamma^{jl}p_{kl}, a^{ij}=\gamma^{ik}\gamma^{jl}a_{kl}$. Зададим

$$\psi^{ij}=\alpha a^{ij}+\beta p^{ij}, \alpha=const, \beta=const..$$

Постулируем закон: $\partial_i\psi^{ij}=\Phi A^j, \Phi=const.$ Примем калибровочное условие $\partial_j A^j=0$. Тогда $\partial_j\partial_i\psi^{ij}=0.$ В тензорном виде эти уравнения выглядят так:

$$\alpha\gamma^{kl}A_k\partial_l A_p+\beta\gamma^{kl}\partial_k\partial_l A_p=\Phi A_p.$$

В покомпонентной форме получим

$$\alpha\left(\frac{\partial\vec{A}(g)}{c_g dt}+\left(\vec{A}(g)\nabla\right)\vec{A}(g)\right)=\beta\left(\nabla^2\vec{A}(g)-\frac{1}{c_g^2}\frac{\partial^2\vec{A}(g)}{\partial t^2}\right)\frac{1}{c_g}-\frac{1}{2c_g}\Phi\vec{A}(g),$$

$$\alpha\left(\frac{\partial A_0(g)}{c_g dt}+\left(\vec{A}(g)\nabla\right)A_0(g)\right)=\beta\left(\nabla^2 A_0(g)-\frac{\partial^2 A_0(g)}{c_g^2\partial t^2}\right)+\Phi A_0(g).$$

Они обобщают одноуровневые модели спинорных и тензорных уравнений массодинамики. Перейдём к двухуровневой модели. Примем гипотезу, что четырёхпотенциал массодинамики зависит от четырёхскоростей $u^i(\mu)$ и от тензора напряжений тонкой материи $\sigma_{ij}(\mu)$:

$$A_i(g)=\sigma_{ij}(\mu)u^j(\mu).$$

Величины $A_i(g)$ характеризуют эмпирические проявления свойств и движений тонкой материи на уровне свойств и движений грубой материи. При использовании тензора $\sigma_{ij}=\gamma_{ij}$ четырехпотенциал заменяется на контрвариантную четырехскорость.

Тогда уравнения массодинамики переходят в обобщенные уравнения движения вязкой жидкости:

$$\alpha\left(\frac{\partial\vec{u}(g)}{c_g dt}+\left(\vec{u}(g)\nabla\right)\vec{u}(g)\right)=\beta\left(\nabla^2\vec{u}(g)-\frac{1}{c_g^2}\frac{\partial^2\vec{u}(g)}{\partial t^2}\right)\frac{1}{c_g}-\frac{1}{2c_g}\Phi\vec{u}(g),$$

$$\alpha\left(\frac{\partial u_0(g)}{c_g dt}+\left(\vec{u}(g)\nabla\right)u_0(g)\right)=\beta\left(\nabla^2 u_0(g)-\frac{\partial^2 u_0(g)}{c_g^2\partial t^2}\right)+\Phi u_0(g).$$

Заметим, что *эксперименты Галилея* в Пизе позволили, опираясь на свойства гравитации, предложить законы, описывающие динамику материальных тел. Гравитация выступила здесь впервые в форме «подсказки» для построения модели динамики тел. На данном этапе исследования массодинамика предлагает на *теоретической основе* глубокую обобщённую модель движения вязкой жидкости. Мы понимаем, что пришел новый этап развития физики, базирующийся на выполнении тонких экспериментов по гравитации. Такие эксперименты давно и умело «проводят» Солнце, планетные системы, Галактики и Метагалактики. Исследование их свойств позволит, если наше сознание способно вместить такую информацию, не только понять гравитацию, но и научиться эффективному использованию её свойств и энергии на практике. Изменение жизни людей на основе механизмов управления гравитацией можно рассматривать как актуальную, перспективную задачу нашей цивилизации. Предложенная выше зависимость четырёхпотенциала от четырёхскоростей позволяет по-новому подойти к проблеме Шрёдингера о согласовании внешнего и внутреннего поведения исследуемой физической системы. Внешнее поведение гравитации, задаваемое четырёхпотенциалом, задаёт уравнения для внутреннего поведения, выраженного через четырёхскорости тонкой материи. Аналогичный приём можно использовать при описании микромира.

Если в рамках предлагаемой нами модели мы заменим слова «тонкая материя» на слово «эфир», то придём к идеологии и практике первых исследователей гравитации, таких как Кант и Лаплас. Они предполагали, что гравитационное взаимодействие обусловлено не столько физическими телами, сколько состоянием и движениями физической микросреды, находящейся между ними. В рассматриваемом нами случае учитывать следует не только свойства макрообъектов и микрообъектов, но и взаимодействие между ними. К аналогичной модели в пожилом возрасте пришёл Ньютон. Для материализации этой идеологии нужны были уравнения, описывающие состояние и поведение различных физических сред. Нужна модель учёта взаимного влияния макротел и тонкой материи, а также модель учета излучения, обусловленного движущимися зарядами. В предлагаемом варианте теории гравитации мы выходим за рамки постановки задачи об эфирной сущности и проявлениях гравитации. Отметим, что ничего подобного нет в геометрической теории гравитации Эйнштейна. В ней речь идет только о тензоре энергии-импульса макроматерии, рассматриваемой в качестве одноуровневой субстанции. Аналогичное замечание справедливо и для релятивистской теории гравитации Логунова. Принятие модели массодинамики, формально и сущностно аналогичной обобщенной микродинамике, ставит массодинамику на одно из первых мест с точки зрения описания структуры и поведения элементарных частиц.

Не только атомы и молекулы подчиняются массодинамике, которая играет роль микродинамики. Объекты тонкого мира, по развиваемой идеологии, сконструированы из электрических и гравитационных предзарядов. На каждом уровне материи их можно задавать через соответствующие тензоры. По этой причине в микромире может «царствовать» механика, ассоциированная с привычной нам макромеханикой. Заметим, что объединение гравитации с электромагнетизмом позволяет ввести в рассмотрение обобщенную механику для атомов и молекул. У неё есть как «электрические», так и «гравитационные корни». Поскольку мы конструируем микрообъекты из «точечных» предзарядов и «неточечных» силовых трубок, описывающие их величины следует согласовать друг с другом. Достаточно сложной становится система уравнений, которая описывает полную их совокупность. В предлагаемом подходе обнаруживаются новые горизонты квантовой теории гравитации. Требуется более глубоко разобраться в структуре, поведении и свойствах атомов и молекул. Аналогичная задача стоит для планетных систем и Галактик.

Квантовая массодинамика должна быть согласована с новыми результатами экспериментов, как в микромире, так и в макромире. Проблема изучения макромира по свойствам микромира, равно как и обратное соответствие, приобретает теперь фундаментальное значение. Микродинамика должна базироваться не только на динамике массы. Важную роль могут играть эффекты, обусловленные электрическим зарядом. Для электрического заряда мы используем «свой» четырехпотенциал. На его основе обычно конструируется антисимметричный тензор, но он порождает также симметричный тензор электродинамики.

Примем во внимание гипотезу, сформулированную ранее при анализе структуры частиц света, что электрический предзаряд невозможен без гравитационного предзаряда.

В частности, это обстоятельство может проявлять себя на основе симметричного тензора электродинамики, ассоциированного с четырехпотенциалом электродинамики $A_n\left(q(l)\right)$, используемым для описания предзарядов по аналогии с зарядами. Тогда, как и в массодинамике, в электродинамике индуцируется «своя» волновая часть добавки в уравнения, задающие напряжения в праматерии. В простом случае это могут быть выражения

$$\left(\nabla^2 A_0\left(q(l)\right)-\frac{\partial^2 A_0\left(q(l)\right)}{c_q^2\partial t^2}\right)=S_0\left(q(l)\right),\left(\nabla^2 \vec{A}\left(q(l)\right)-\frac{\partial^2 \vec{A}\left(q(l)\right)}{c_q^2\partial t^2}\right)=\vec{S}\left(q(l)\right).$$

Соответственно появятся дополнительные члены в уравнениях массодинамики и микродинамики. Уравнения массодинамики с конвективными слагаемыми получат вид

$$A_g\left(\frac{\partial A_0(g)}{c_g dt}+\left(\vec{A}(g)\nabla\right)A_0(g)\right)=B_g\left(\nabla^2 A_0(g)-\frac{\partial^2 A_0(g)}{c_g^2\partial t^2}\right)+$$

$$+B_q\left(\nabla^2 A_0(q)-\frac{\partial^2 A_0(q)}{c_q^2\partial t^2}\right)+\Phi_g(l)A_0(g)+\Phi_q(l)A_0(q),$$

$$A_g\left(\frac{\partial\vec{A}(g)}{c_g dt}+\left(\vec{A}(g)\nabla\right)\vec{A}(g)\right)=B_g\left(\nabla^2\vec{A}(g)-\frac{1}{c_g^2}\frac{\partial^2\vec{A}(g)}{\partial t^2}\right)\frac{1}{c_g}+$$

$$+B_q\left(\nabla^2\vec{A}(q)-\frac{\partial^2\vec{A}(q)}{c_q^2\partial t^2}\right)-\frac{1}{2c_g}\Phi_g(l)\vec{A}(g)-\frac{1}{2c_q}\Phi_q(l)\vec{A}(q).$$

Уравнения существенно усложнятся, когда их коэффициенты переменны. Система дополнится динамическими моделями, которые будут описывать поведение коэффициентов. Ошибочно надеяться, что столь сложные математические модели могут быть легко проверены экспериментально. Но еще меньше надежды на то, что эксперимент способен рационально двигаться вперед без моделей указанного типа. Ведь уравнения дают не только оценку ситуаций. Они указывают реалистичные параметры для конструкций, им подчиненных. Указанные замечания формируют «ворота» не только для гравитации, но и для всей физики. Мы только «увидели» некоторые контуры её отдаленного будущего.

С философской точки зрения, в теории при создании физических моделей мы стартуем с таких позиций:

- В физическом пространстве и времени мы располагаем материю разных уровней, обозначенную буквой l.
- На каждом из уровней материи, следуя предлагаемой идеологии, имеются «свои» гравитационные $\mu(l)$ и «свои» электрические $q(l)$ уровневые заряды.
- Каждый физический объект есть изделие, изготовленное тем или иным способом с использованием материи разных уровней.
- Каждая одноуровневая модель обязательно имеет пару слагаемых. Они ассоциированы, соответственно, с гравитационным и электрическим уровневыми зарядами.
- Поведение исследуемых конструкций задается на основе анализа модели поведения материи, в которой находятся исследуемые изделия и материи, из которой они изготовлены.
- Разные уровни материи могут быть по-разному согласованы друг с другом в понятийном, математическом и экспериментальном планах.
- У гравитационного заряда могут быть электрические свойства. У электрического заряда могут быть гравитационные свойства.

С математической точки зрения возможно объединение электромагнетизма и гравитации на каждом уровне материи в форме уравнений вида

$$\partial_i\Pi^{ij}\left(g(l),q(l)\right)=\partial_i\left(\vec{i}\alpha\phi^{ij}\left(g(l)\right)+\vec{j}\beta\phi^{ij}\left(q(l)\right)\right)=\vec{i}S^j\left(g(l)\right)+\vec{j}S^j\left(q(l)\right).$$

Выражения $\phi^{ij}\left(g(l)\right),S^j\left(g(l)\right),\phi^{ij}\left(q(l)\right),S^j\left(q(l)\right)$ задают напряжения и токи в материи исследуемого уровня, ассоциированные с гравитационным и электрическим зарядами соответственно. Пространство, в котором рассматриваются явления, может иметь отличия от привычного для нас макроскопического пространства.

Примем закон сохранения для системы токов, обусловленных гравитационным и электрическим зарядами в форме

$$\partial_j \left(S^j \left(g(l) \right) + S^j \left(q(l) \right) \right) = 0.$$

Тогда величины, характеризующие уровневую массодинамику, будут подчинены уравнениям

$$\partial_j \partial_i \Pi^{ij} \left(g(l), q(l) \right) = 0.$$

Рассмотрим вариант, когда ковариантные компоненты указанных величин выражаются через контрвариантные с помощью фиксированного тензора четвертого ранга. Пусть

$$\Pi^{ij} = \pi^{ijkl} \Pi_{kl}, \pi^{ijkl} = const.$$

Получим систему уравнений

$$\pi^{ijkl} \partial_j \partial_i \Pi_{kl} \left(g(l), q(l) \right) = 0.$$

Конечно, она может быть подчинена дополнительным условиям. Мы вправе дать геометрическое представление полученным уравнениям и выводам. Например, можно сопоставить ковариантный тензор гравидинамики с метрическим тензором псевдориманова многообразия. Тогда задача описания гравидинамических явлений сводится к анализу структуры риманова пространства, подчиненного дополнительным условиям.

Рассмотрим указанное согласование с другой стороны. Иначе запишем уравнения гравидинамики для первого четырехпотенциала. При выборе метрики Евклида для четырехмерия g^{ij} они выглядят так:

$$g^{kl} \partial_k \partial_l A_p = 0,$$
$$g^{kl} \partial_k A_l = 0.$$

Данный вариант является простейшим из-за простого выражения для четырехметрики в паре $\left(A_p, g^{kl} \right)$. В общем случае мы вправе использовать более сложные связи вида

$$\varphi^{ij} = \omega^{ik} \omega^{jl} \varphi_{kl}, \omega_{kl} = \alpha g_{kl} + \beta \vartheta_{kl}.$$

Они способны усложнить уравнения для первого четырехпотенциала, в частности задать его зависимость от системы скоростей и от внутренних свойств гравитации.

Задача объединения в одной модели элементов структуры и динамики изделий, функционирующих на разных уровнях материи была актуальной всегда. На современном этапе её решение становится возможным в рамках нового понимания устройства Реальности и новой математики, генерируемой актуальной практикой. Тонкость состоит в том, чтобы учесть не только наши потребности, но и потребности нашей Реальности. Пожалуй, рано об этом говорить, но уже есть понимание, что Реальность на определенном уровне развития нашей цивилизации будет «опираться» на нас. Это станет возможным только на значительно более высоком уровне нашего Сознания и Чувств.

Калибровочная массодинамика

Рассмотрим возможность обобщения массодинамики в направлении её объединения с теорией калибровочных полей. Примем точку зрения, что рассмотренный выше вариант, базирующийся на теории электромагнитных явлений, индуцирован однопараметрической группой $U(1)$.

Введём тензоры для калибровочной группы с несколькими независимыми параметрами. Пусть, например, заданы тензоры

$$\phi_{ij}^a = \partial_i A_j^a + \partial_i A_j^a, \varphi_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_i A_j^a,$$

$$p_{ij}^a = 0,5\left(\phi_{ij}^a - h_{ij}^a\right) = \begin{pmatrix} \partial_x A_x & \partial_y A_x & \partial_z A_x & \partial_0 A_x \\ \partial_x A_y & \partial_y A_y & \partial_z A_y & \partial_0 A_y \\ \partial_x A_z & \partial_y A_z & \partial_z A_z & \partial_0 A_z \\ \partial_x A_0 & \partial_y A_0 & \partial_z A_0 & \partial_0 A_0 \end{pmatrix}^{(a)}.$$

Дополним их тензорным произведением для компонент четырехпотенциала массодинамики:

$$a_{ij}^a = \sigma_{bc}^a A_i^b A_j^c.$$

Пусть

$$p^{aij} = \gamma^{ik}\gamma^{jl} p_{ij}^a, a^{aij} = \gamma^{ik}\gamma^{jl} a_{kl}^a.$$

Зададим $\psi^{aij} = \alpha a^{aij} + \beta p^{aij}, \alpha = const, \beta = const.$ Постулируем закон

$$\partial_i \psi^{aij} = \Phi A^{aj}, \Phi = const.$$

Пусть выполняется калибровочное условие $\partial_j A^{aj} = 0$. Тогда

$$\partial_j \partial_i \psi^{aij} = 0.$$

В тензорном виде уравнения выглядят так:

$$\alpha\gamma^{kl}\sigma_{bc}^a A_k^b \partial_l A_p^c + \beta\gamma^{kl}\partial_k\partial_l A_p^a = \Phi A_p^a.$$

Заметим, что этот вариант может использоваться для описания системы согласованных между собой уровневых зарядов. Конечно, в этом случае требуется согласовать между собой уровневые пространства.

Соответствие

$$A_\mu^a = \sigma_\mu^{an}(l) A_n(l)$$

будет обеспечивать согласование динамики уровневых зарядов. Структура, функции и связи этих зарядов в настоящее время нам неизвестны и недоступны для практики.

К объединению электромагнетизма и гравитации

Известно несколько вариантов объединения электромагнетизма и гравитации. Ни один из них не обеспечил возможности физического, структурного подхода к гравитации и не стимулировал построение структурной модели света. Идея объединения выдвинута Эйнштейном в качестве фундаментальной задачи. Пятимерную модель искомого объединения предложил Калуца. Она не оправдала надежды исследователей. В рассматриваемом нами случае электромагнетизм и гравитация задаются тензорами. Более того, теория гравитационного поля «нашла» свои истоки в электродинамике. Если же исходить из уравнений для гравитации, из них можно получить уравнения электродинамики.

Напомним математическую структуру электродинамики Фарадея-Ампера. Уравнения

$$\partial_k F_{mn} + \partial_m F_{nk} + \partial_n F_{km} = 0, F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$$

для тензора электромагнитного поля

$$F_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

имеют векторный вид:

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \Rightarrow \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0,$$
$$\partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} = 0 \Rightarrow (-i)\left(\partial_y E_z - \partial_z E_y + \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} \right),$$

$$\partial_3 F_{01} + \partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} = 0 \Rightarrow i\left(\partial_z E_x - \partial_x E_z + \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} \right),$$
$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = 0 \Rightarrow (-i)\left(\partial_x E_y - \partial_y E_x + \frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} \right).$$

Они соответствуют выборке тройки несовпадающих индексов из четверки индексов. Векторный вид уравнений соответствует формулам

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = i\left(\partial_x E_y - \partial_y E_x\right) + ...,$$
$$div\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi.$$

При построении модели, способной совместно описывать электромагнитное и гравитационное поле, будем использовать не только математическую, но и физическую аналогию гравитации с электромагнетизмом. С одной стороны, такая задача естественна для объектов, у которых есть как электрический, так и гравитационный заряд. В такой роли выступают, в частности, электрон и протон. С другой стороны, мы получаем предпосылки для анализа поведения предзарядов, из которых образованы частицы света, так как, согласно ранее принятой гипотезе, электрические и гравитационные предзаряды по-разному изготовлены из одних и тех же ориентированных струн. Покажем, что возможность искомого объединения следует из электродинамики. Рассмотрим уравнения Фарадея-Ампера: $Q_{kmn} = \partial_k F_{mn} + \partial_m F_{nk} + \partial_n F_{km} = 0 = \partial_{[k} F_{mn]}$. Так как $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$, получим

$$\partial_k(\partial_m A_n - \partial_n A_m) + \partial_m(\partial_n A_k - \partial_k A_n) + \partial_n(\partial_k A_m - \partial_m A_k) \equiv 0.$$

Продифференцируем эти уравнения по производным с индексом, дополнительным тем индексам, по которым проводился цикл. Дополним их слагаемыми, сумма которых равна нулю. Получим

$$\partial_l(\partial_k(\partial_m A_n - \partial_n A_m) + \partial_m(\partial_n A_k - \partial_k A_n) + \partial_n(\partial_k A_m - \partial_m A_k)) + \partial_k\partial_m\partial_n A_l - \partial_k\partial_m\partial_n A_l \equiv 0.$$

Их можно записать в другой форме:

$$\partial_k\partial_m(\partial_n A_l - \partial_l A_n) + \partial_m\partial_n(\partial_l A_k - \partial_k A_l) + \partial_n\partial_l(\partial_k A_m - \partial_m A_k) + \partial_l\partial_k(\partial_m A_n - \partial_n A_m) \equiv 0.$$

Получим систему циклических уравнений

$$\partial_k\partial_m F_{nl} + \partial_m\partial_n F_{lk} + \partial_n\partial_l F_{km} + \partial_l\partial_k F_{mn} = 0.$$

Переставим индексы в этих уравнениях, учитывая, что тензор, описывающий электромагнитное поле, антисимметричен. Получим систему уравнений

$$\partial_m(\partial_k \Phi_{nl} - \partial_n \Phi_{kl}) + \partial_l(\partial_n \Phi_{km} - \partial_k \Phi_{nm}) = 0.$$

Подставим в неё выражение для симметричного тензора, который предлагается использовать в качестве тензора напряжений гравитационного поля в тензорной теории гравитации, названной массодинамикой $G_{mn} = \partial_m B_n + \partial_n B_m$. Получим тождество

$$\partial_m(\partial_k(\partial_n B_l + \partial_l B_n) - \partial_n((\partial_k B_l + \partial_l B_k)) + \partial_l(\partial_n(\partial_k B_m + \partial_m B_k) - \partial_k(\partial_n B_m + \partial_m B_n)) \equiv 0.$$

Рассматриваемая система уравнений в качестве решений даёт не только не только антисимметричный $F_{mn}(q,q)$, но и симметричный $F_{mn}(q,\mu)$ тензоры напряженности электромагнитного поля. Аналогично есть решения для антисимметричного $F_{mn}(\mu,q)$ и симметричного $F_{mn}(\mu,\mu)$ гравитационного поля. Решение, учитывающее все указанные возможности, имеет вид

$$\Phi_{mn} = \vec{i}\,\alpha F_{mn}(q,q) + \vec{j}\beta F_{mn}(q,\mu) + \vec{k}\gamma F_{mn}(\mu,q) + \vec{l}\,\delta F_{mn}(\mu,\mu).$$

Решение в форме суперпозиции симметричных и антисимметричных тензоров напряженности как электромагнитного, так и гравитационного полей является качественно новой чертой, данной системы уравнений.

Мы имеем дело с системой дифференциальных уравнений третьего порядка для пары четырехпотенциалов, посредством которых задаются симметричные и антисимметричные тензоры электромагнитного и гравитационного полей. Получена система единых уравнений, пригодную для совместного описания электромагнитного и гравитационного полей. Эти поля заданы соответственно антисимметричным и симметричным тензорами. Анализируемый случай близок к идеологии, сложившейся в структурной модели света. В ней введены четыре базовых объекта: пара электрических и пара гравитационных предзарядов. По этой причине при описании света требуется описывать согласованную систему, учитывающую слагаемые, относящиеся к электрическому и гравитационному предзарядам.

Рассмотрим несколько другую возможность, согласующуюся с электродинамикой Максвелла. Пусть

$$\partial_l\left(\partial_k F_{mn}+\partial_m F_{nk}+\partial_n F_{km}\right)-\partial_m\left(\partial_k F_{nl}+\partial_n F_{lk}+\partial_l F_{kn}\right)=0.$$

Преобразуем систему уравнений к новому виду, изменив индексы. Получим

$$\partial_l\left(\partial_k F_{mn}+\partial_m F_{nk}-\partial_n F_{mk}\right)=\partial_m\left(\partial_k F_{nl}-\partial_n F_{kl}+\partial_l F_{kn}\right).$$

Прямой подстановкой легко проверяется факт, что эти уравнения дают решения в форме симметричного тензора:

$$\begin{aligned}&\partial_l\left(\partial_k\left(\partial_m A_n+\partial_n A_m\right)+\partial_m\left(\partial_n A_k+\partial_k A_n\right)-\partial_n\left(\partial_m A_k+\partial_k A_m\right)\right)=\\&=\partial_m\left(\partial_k\left(\partial_n A_l+\partial_l A_n\right)-\partial_n\left(\partial_k A_l+\partial_l A_k\right)+\partial_l\left(\partial_n A_k+\partial_k A_n\right)\right).\end{aligned}$$

По этой причине они задают также решения в форме суперпозиции симметричного и антисимметричного тензоров. Следовательно, нам теперь известны две системы уравнений, которые порождают как электромагнитное, так и гравитационное поле, а также их суперпозицию. Они аналогичны друг другу, хотя имеют разный вид:

$$\begin{aligned}\partial_l\left(\partial_n \Phi_{km}-\partial_k \Phi_{nm}\right)+\partial_m\left(\partial_k \Phi_{nl}-\partial_n \Phi_{kl}\right)=0,\\ \partial_l\left(\partial_k Q_{mn}+\partial_m Q_{nk}-\partial_n Q_{mk}\right)=\partial_m\left(\partial_k Q_{nl}-\partial_n Q_{kl}+\partial_l Q_{kn}\right).\end{aligned}$$

Их решения таковы

$$\begin{aligned}\Phi_{mn}=\vec{i}a_1F_{mn}(q,q)+\vec{j}b_1F(q,\mu)+\vec{k}c_1F_{mn}(\mu,q)+\vec{l}d_1F_{mn}(\mu,\mu),\\ Q_{mn}=\vec{i}a_2F_{mn}(q,q)+\vec{j}b_2F(q,\mu)+\vec{k}c_2F_{mn}(\mu,q)+\vec{l}d_2F_{mn}(\mu,\mu).\end{aligned}$$

Данная пара систем уравнений следует из возможности разного объединения уравнений электродинамики, используя для этого знак плюс или минус. Для уравнений Фарадея-Ампера, задающих динамику электромагнитных полей, справедливы равенства

$$\begin{aligned}\partial_l\left(\partial_k F_{mn}+\partial_m F_{nk}+\partial_n F_{km}\right)+\partial_m\left(\partial_k F_{nl}+\partial_n F_{lk}+\partial_l F_{kn}\right)=0,\\ \partial_l\left(\partial_k F_{mn}+\partial_m F_{nk}+\partial_n F_{km}\right)-\partial_m\left(\partial_k F_{nl}+\partial_n F_{lk}+\partial_l F_{kn}\right)=0.\end{aligned}$$

Объединение индукций в массодинамике

Задача состоит в том, чтобы получить единые уравнения для электромагнитных и гравитационных индукций**.** Рассмотрим возможности аналогии, вытекающие из электродинамики. В электродинамике индукции задаются тензором второго ранга, который получается на основе тензора напряженности электромагнитного поля и тензора четвертого ранга, зависящего от свойств физической среды и её движений, в форме

$$H^{ik}(q)=\chi^{ikmn}(q)F_{mn}(q).$$

Для него экспериментально доказан закон

$$\partial_i H^{ik}(q)=s^k(q).$$

По аналогии мы будем считать, что возможно задание тензора индукций для гравитационного поля на основе тензора для поля и некоторого тензора четвёртого ранга. Примем из формальных соображений закон

$$P^{ik}(\mu)=\chi^{ikmn}(\mu)F_{mn}(\mu).$$

Тогда $\partial_i P^{ik}(\mu)=s^k(\mu)$. Выражение для *силы, действующей на объект*, у которого есть и электрический, и гравитационный заряд, будет состоять из пары слагаемых:

$$F_p=s^k(q)F_{kp}(q)+s^k(\mu)F_{kp}(\mu).$$

Оно конкретизируется только после решения полной системы уравнений. Рассмотрим проблему с другой точки зрения. Запишем уравнения электродинамики для полей и индукций в единой форме, используя стандартную модель Максвелла:

$$\begin{aligned}
&\partial_k F_{mn}+\partial_m F_{nk}+\partial_n F_{km}=0,\\
&\partial_k H_{mn}+\partial_m H_{nk}+\partial_n H_{km}=s_{kmn},\\
&H^{ik}=\chi^{ikmn}F_{mn}.
\end{aligned}$$

Здесь $F_{mn}(q)=\partial_m A_n(q)-\partial_n A_m(q)\Rightarrow F_{mn}=\partial_m A_n-\partial_n A_m.$ Рассмотрим сумму двух выражений, ассоциированных с указанными уравнениями:

$$\partial_l\left(\partial_k F_{mn}+\partial_m F_{nk}+\partial_n F_{km}\right)+\partial_m\left(\partial_k F_{nl}+\partial_n F_{lk}+\partial_l F_{kn}\right)=0.$$

Так как для тензора электромагнитного поля выполняется условие $\partial_l\partial_m F_{nk}+\partial_m\partial_l F_{kn}=0,$ получим $\partial_l\left(\partial_n F_{km}-\partial_k F_{nm}\right)+\partial_m\left(\partial_k F_{nl}-\partial_n F_{kl}\right)=0.$ Аналогично

$$\partial_l\left(\partial_k H_{mn}+\partial_m H_{nk}+\partial_n H_{km}\right)+\partial_m\left(\partial_k H_{nl}+\partial_n H_{lk}+\partial_l H_{kn}\right)=\partial_l s_{kmn}+\partial_m s_{knl}.$$

Условие

$$\partial_l\partial_m H_{nk}+\partial_m\partial_l H_{kn}=0$$

выполняется для электромагнитного поля. Поэтому уравнения преобразуются к виду

$$\partial_l\left(\partial_n H_{km}-\partial_k H_{nm}\right)+\partial_m\left(\partial_k H_{nl}-\partial_n H_{kl}\right)=\partial_l s_{nkm}+\partial_m s_{knl}.$$

Они позволяют объединить модели электромагнитного и гравитационного полей, представленные, соответственно, антисимметричным и симметричным тензорами

$$F_{mn}(q)=\partial_m A_n(q)-\partial_n A_m(q),$$
$$F_{mn}(\mu)=\partial_m A_n(\mu)+\partial_n A_m(\mu).$$

Система уравнений для электромагнитного и гравитационного полей

$$\partial_l\left(\partial_n \Phi_{km}-\partial_k \Phi_{nm}\right)+\partial_m\left(\partial_k \Phi_{nl}-\partial_n \Phi_{kl}\right)=0$$

имеет решения в виде суммы тензоров электромагнитного и гравитационного полей:

$$\Phi_{mn}=\alpha F_{mn}(q)\pm\beta F_{mn}(\mu)=\alpha(\partial_m A_n(q)-\partial_n A_m(q))+\beta(\partial_m A_n(\mu)+\partial_n A_m(\mu)).$$

С математической точки зрения этой ситуации соответствует объединение величин, описывающих разные поля, в единую систему. Оно может иметь разный смысл и содержание. С физической точки зрения этой ситуации соответствует модель согласованного учёта электромагнитного и гравитационного полей как физических факторов. Естественно предложить неоднородные уравнения, которые аналогичным образом «объединяют» индукции электромагнитного и гравитационного полей. Возможны разные варианты. В каждом из них есть свои преимущества. Заметим, что условие

$$\partial_l\partial_m H_{nk}+\partial_m\partial_l H_{kn}=0$$

не выполняется для симметричного тензора. По этой причине искомые единые уравнения для электромагнитных и гравитационных индукций будут сложнее аналогичных уравнений для полей. На их роль претендуют обобщенные уравнения, согласованные со структурой уравнений электродинамики:

$$\partial_l\left(\partial_k H_{mn}+\partial_m H_{nk}+\partial_n H_{km}\right)+\partial_m\left(\partial_k H_{nl}+\partial_n H_{lk}+\partial_l H_{kn}\right)+\partial_l M_{(kmn)}+\partial_m M_{(knl)}=\partial_l s_{kmn}+\partial_m s_{knl}.$$

Для гравитационного поля требуется учесть слагаемые, относящиеся к не равным нулю диагональным элементам тензора индукций гравитационного поля. Они представлены в данном случае выражениями $\partial_l M_{(kmn)},\partial_m M_{(knl)}$. Выразим диагональные компоненты функционально, учитывая предложенную ранее модель массодинамики. Разместим индексы, по которым проводится цикл для тензора $H_{\xi\eta}$, в круглую скобку: $kmn\to(kmn)$. Индекс, не относящийся к данной тройке, обозначим введенной круглой скобкой. Тогда искомые выражения для диагональных элементов в рамках предложенной ранее тензорной теорией гравитационного поля получат вид

$$M_{(kmn)}=\partial_{(kmn)}H_{(kmn)(kmn)}.$$

Для электромагнитного поля эти выражения равны нулю. Для гравитационного поля они дают добавки, позволяющие построить модель, которая содержит в себе модель гравитации Эйнштейна в представлении Логунова. Единые уравнения для электромагнитных и гравитационных индукций получат вид:

$$\partial_l\left(\partial_k\Pi_{mn}+\partial_m\Pi_{nk}+\partial_n\Pi_{km}\right)+\partial_m\left(\partial_k\Pi_{nl}+\partial_n\Pi_{lk}+\partial_l\Pi_{kn}\right)+\partial_l\partial_{(kmn)}\Pi_{(kmn)(kmn)}+\partial_m\partial_{(knl)}\Pi_{(knl)(knl)}=$$
$$=\alpha\partial_l s_{kmn}(q)+\alpha\partial_m s_{knl}(q)+\beta\partial_l s_{kmn}(\mu)+\beta\partial_m s_{knl}(\mu).$$

Они имеют решения

$$\Pi_{mn}=\alpha H_{mn}(q)+\beta H_{mn}(\mu).$$

Электромагнетизм и гравитация формально объединены в единую систему уравнений. Уравнения построены не только для полей, но и для индукций. Если $\alpha=0,$ мы анализируем только гравитационное поле. Если $\beta=0,$ мы анализируем только электромагнитное поле. В общем случае возможно их совместное рассмотрение. Связи между полями и индукциями могут выбираться в соответствии с обычной практикой:

$$H^{ij}(q)=\chi^{ijkl}H_{kl}(q),$$
$$H^{ij}(\mu)=\chi^{ijkl}H_{kl}(\mu).$$

Тензоры четвертого ранга могут быть согласованы друг с другом. Их структура, как показал анализ релятивистских эффектов, достаточно сложна и учитывает ряд физических аспектов рассматриваемых задач. Важно то обстоятельство, что теперь гравитация и электромагнетизм могут рассматриваться совместно и согласованно. Конечно, это первый шаг к реальному их объединению. Можно рассмотреть объединение индукций электромагнитного и гравитационного полей с другой точки зрения. В тензорной теории гравитации для индукций используется «закон сохранения» вида

$$\partial_i\tilde{H}^{ij}(\mu)=\tilde{s}^j(\mu).$$

Аналогичный закон доказан в электродинамике:

$$\partial_i\tilde{H}^{ij}(q)=\tilde{s}^j(q).$$

В силу указанных обстоятельств возможен *единый закон для* электромагнитных и гравитационных индукций

$$\partial_i\tilde{\Pi}^{ij}(q,\mu)=\tilde{s}^j(q,\mu).$$

Его решения $\tilde{\Pi}^{ij}(q,\mu)=\alpha\tilde{H}^{ij}(q)+\beta\tilde{H}^{ij}(\mu)$ согласуются с выбором токов $\tilde{s}^j(q,\mu)=\alpha\tilde{s}^j(q)+\beta\tilde{s}^j(\mu).$ Возможно введение гиперплоскости для тензоров гравитационных и электромагнитных индукций с реперами $\vec{i},\vec{j}$. Векторный единый закон для индукций электромагнитного и гравитационного поля получает вид $\partial_i\vec{\tilde{\Pi}}^{ij}(q,\mu)=\vec{\tilde{s}}^j(q,\mu).$

Его решения

$$\tilde{\vec{\Pi}}^{ij}(q,\mu)=\vec{i}\alpha\tilde{H}^{ij}(q)+\vec{j}\beta\tilde{H}^{ij}(\mu)$$

математически корректно согласуются с выбором токов $\tilde{s}^j(q,\mu)=\vec{i}\alpha\tilde{s}^j(q)+\vec{j}\beta\tilde{s}^j(\mu)$. В рассматриваемых вариантах объединения различных моделей электромагнитные и гравитационные поля и индукции «не смешиваются» между собой. Эта ситуация может интерпретироваться как первичное разложение единого поля на слагаемые с весовыми множителями. Вторые члены разложения могут иметь, например, вид

$$\tilde{\Lambda}^{ik}=\tilde{H}^{ik}(q)g_{kl}(x)H^{lj}(q),...$$

Они превращают теорию, линейную по тензорам электрического и гравитационного поля в теорию, нелинейную по этим тензорам. «Смеси» могут быть более сложными, обеспечивая возможности взаимосвязей рассматриваемых полей с другими физическими «полями». При анализе единой теории электромагнетизма и гравитации мы обнаруживаем новые возможности, которые не обсуждались ранее. С одной стороны, однородные уравнения для электромагнитного поля вида $\partial_{[k}F_{mn]}=0$ преобразуются в неоднородные уравнения

$$\partial_{[k}F^{a}{}_{mn]}=s^a_{kmn},$$

$$s^a_{kmn}=f^a_{bc}\left[A^c_n\left(\partial_k A^b_m-\partial_m A^b_k\right)+A^c_k\left(\partial_m A^b_n-\partial_n A^b_m\right)+A^c_m\left(\partial_n A^b_k-\partial_k A^b_n\right)\right]$$

Здесь введены антисимметричные калибровочные поля электромагнитного типа со свойствами:

$$F^a_{mn}(q,q)=\partial_m A^a_n(q)-\partial_n A^a_m(q)+f^a_{bc}A^b_m(q)A^c_n(q),$$

$$f^a_{bc}=-f^a_{cb},$$

$$\xi_b\xi_c-\xi_c\xi_b=f^a_{bc}\xi_a.$$

Аналогично можно ввести симметричные «калибровочные» поля гравитационного типа:

$$F^a_{mn}(\mu,\mu)=\partial_m A^a_n(\mu)+\partial_n A^a_m(\mu)+g^a_{bc}A^b_m(\mu)A^c_n(\mu),$$

$$g^a_{bc}=g^a_{cb},\ \xi_b\xi_c+\xi_c\xi_b=g^a_{bc}\xi_a.$$

С другой стороны, мы принимаем наличие у электрического предзаряда гравитационных свойств, а также наличие у гравитационного предзаряда электрических свойств.

Совместное описание электрических и гравитационных составляющих для предзарядов может базироваться на циклических уравнениях:

$$\partial_l\partial_k\Phi^a_{mn}-\partial_k\partial_m\Phi^a_{nl}+\partial_m\partial_n\Phi^a_{lk}-\partial_n\partial_l\Phi^a_{km}=\sigma^a_{lkmn}.$$

Согласование массодинамики с моделью Ньютона

Оставим ненулевой только четвертую компоненту четырехпотенциала. Отождествим величину s_0 с плотностью массы ρ. Получим уравнение Пуассона для гравитационного поля. Поэтому начальная «волновая» модель массодинамики согласуется с теорией Ньютона.

Слово «волновая» взято в кавычки потому, что дифференциальный оператор второго порядка в массодинамике может иметь не только к гиперболический, но и эллиптический тип. Алгоритм вывода спинорных уравнений массодинамики учитывает это обстоятельство на основе выбора разных выражений для координаты времени и компонент четырехпотенциала $A_n(\mu)$. Волновой оператор обычной теории гравитации является гиперболическим. Для него известны решения и поведение полей. Аналогичный волновой процесс хорошо изучен в электродинамике. Однако в массодинамике есть принципиальное отличие от электродинамики: в ней возможны продольные колебания, так как гравитация представляется в этой теории через состояния и движения тонкой материи. По указанной причине массодинамика может быть «близка» к акустике. В рамках данной гипотезы видимый и звуковой макромир имеет свою аналогию в микромире. В этом случае физические объекты, имеющие электрический заряд и массу, могут не только порождать свет, но также создавать «звук». Примем соответствие порождения и восприятия для физического объекта как пары фундаментальных дополнительных свойств физического мира. В упрощенной трактовке эта идея сводится, соответственно, к дополнительности поперечных и продольных колебаний физической среды, а также самих физических объектов. Следовательно, элементарные частицы будут реагировать на световую и на звуковую информацию на своём уровне материи.

Это обстоятельство позволяет по-новому подойти к анализу, как структуры, так и взаимодействия элементарных частиц. При моделировании массодинамики мы вправе использовать общее выражение для активной четырехметрики, полученное в электродинамике

$$\Gamma^{ij} = diag\left(1,1,1,w_g\right).$$

Оно зависит от динамической скалярной функции w_g. Её изменение делает возможным изменение сигнатуры четырёхметрики. В электродинамике движущихся это обстоятельство является ключом к пониманию релятивистских эффектов. Однако в электродинамике активная четырёхметрика применялась только в материальных уравнениях: связях между полями и индукциями. В массодинамике возможна модель для дифференциальных уравнений, описывающих поля, учитывающая возможность изменения сигнатуры четырёхметрики. Тогда возможны разные физические ситуации, сопровождающиеся изменением типа уравнений, описывающих явления. Такие ситуации встречаются в теории движения газов и жидкостей. Но так и должно быть, если физика гравитации базируется на движениях тонкой материи, ассоциированной с «грубой» материей. Конечно, важно исследовать физические свойства такой материи, равно как и законы взаимодействия объектов, принадлежащих разным уровням материи. Для эллиптического оператора меняется структура решений. Известно, что изменение сигнатуры приводит к потере устойчивости решений. Следовательно, массодинамика изначально содержит возможность модели, которая обладает свойствами потери устойчивости решений, характерной для динамического хаоса. Если гравитация подчинена паре систем уравнений, принципиально различающихся по математической структуре, следует ожидать, что у гравитации есть пара принципиально различных физических свойств. Они могут проявляться в некоторых комбинациях, что дополнительно усложнит анализ.

Есть и другие специфические моменты. Действительно, рассмотрим решения в форме плоской волны для эллиптического уравнения вида

$$A_p = A_{p0} \exp\left\{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)\right\}.$$

По стандартной методике получим дисперсионное уравнение

$$k^2 + \frac{\omega^2}{c_g^2} = 0.$$

Из него следует, что уравнения массодинамики для первого четырехпотенциала обладают свойством задавать мнимую скорость для гравитационного взаимодействия:

$$c_g = \pm i \frac{\omega}{k}.$$

Мы приняли точку зрения, что мнимые величины свидетельствуют о «внутренних» движениях. Тогда из простейшей модели гравидинамики следует, что у гравитации могут быть практически необнаружимые внешние движения и скрытое изменение внутреннего состояния. Таким может быть поведение конструкций, ассоциированных с массами. В частности, это могут быть некоторые периодические изменения в структуре масс и тех элементов, из которых они изготовлены. По этой причине анализируемые процессы и состояния могут быть сложны для измерения.

«Слабость» гравитации может оказаться иллюзорной потому, что для нее могут быть более важны внутренние движения, а внешние проявления могут быть достаточно малы. Более того, внутренние движения могут реализоваться в тонкой материи, а внешние проявления будут иметь место в грубой материи.

Принимая аналогию в устройстве и поведении макро и микромира, мы вправе использовать накопленный опыт для анализа поведения микромира. Для этого могут быть недостаточны используемые экспериментальные средства. Однако математическое исследование способно дать новый импульс в исследовании и понимании микромира.

Поскольку материя многоуровневая, требуется задавать структурные и динамические уравнения для каждого уровня материи. Затем их нужно согласовывать друг с другом. Такие задачи не решались физиками. К ним подойти нужно со всем вниманием и осторожностью. Из общих соображений следует, что простой вариант массодинамики значительно выходит за рамки стандартной классической релятивистской теории гравитации.

Ожидаемая модель массодинамики является новой по ряду признаков. Она, как минимум, имеет два уровня: модель грубой и тонкой материи. У нее есть возможности, не учитываемые в обычных моделях гравитации. Кроме этого, в ней «метрический тензор» или физическое тензорное поле являются частью общей конструкции в массодинамике.

Физический подход к гравитации предполагает не только её практическое применение. Фундаментальность свойств гравитации и ее общность являются стимулами для глубинного понимания физической реальности с целью достичь гармонии с ней и повышения своей эффективности.

Единство гравитации с электромагнетизмом, составляющим основу современных технологических устройств, становится движущим стимулом для реализации новых алгоритмов жизнедеятельности и новых технических устройств.

Согласование массодинамики с моделями гравитации Эйнштейна и Логунова

Рассмотрим систему уравнений массодинамики для первого четырехпотенциала без учета конвективных движений в виде

$$\gamma^{kl}\partial_k\partial_l A_p = 0, \gamma^{kl}\partial_k A_l = 0.$$

Покажем, что из неё следует релятивистская модель гравитации Логунова. Выразим четырехпотенциал гравидинамики $A_p(g)$ через четырехскорость праматерии u^s и новую переменную - симметричный тензор второго ранга $\sigma_{ps}, \sigma = \det|\sigma_{ps}|$. Он согласован с тензором энергии-импульса праматерии. Пусть

$$A_p = \sigma_{ps}\sqrt{-\sigma}\,\frac{u^s}{\sqrt{-\sigma}} = \tilde{\sigma}_{ps}\hat{u}^s.$$

Тогда

$$\gamma^{kl}\partial_k\partial_l A_p = \gamma^{kl}\partial_k\partial_l\left(\tilde{\sigma}_{ps}\hat{u}^s\right) = \left(\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\sigma}_{ps}\right)\hat{u}^s + 2\gamma^{lk}\partial_l\tilde{\sigma}_{ps}\partial_k\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\hat{u}^s.$$

Примем предположения:

- поведение праматерии согласовано со свойствами грубой материи, в частности, с тензором энергии-импульса материи $\tilde{T}_{ps}$(алгоритм позволяет учесть дополнительно тензор энергии-импульса самого гравитационного поля $\tilde{T}_{ps}(g)$),
- зададим сумму конвективных и волновых движений праматерии условием

$$2\gamma^{lk}\partial_l\tilde{\sigma}_{ps}\partial_k\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\hat{u}^s = (k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps})\hat{u}^s.$$

Получим уравнения массодинамики, согласованные с поведением праматерии:

$$\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\sigma}_{ps} = k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps}.$$

Найдем дополнительные ограничения, которые следуют из калибровочных условий:

$$\gamma^{kl}\partial_k A_l = \gamma^{kl}\partial_k\left(\tilde{\sigma}_{ls}\hat{u}^s\right) = \left(\gamma^{kl}\partial_k\tilde{\sigma}_{ls}\right)\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s = 0.$$

Если $\tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s = \tilde{\chi}_s\hat{u}^s$, то $\gamma^{kl}\partial_k\tilde{\sigma}_{ls} = \tilde{\chi}^s$. В предлагаемой системе уравнений массодинамики кроме анализа «метрического тензора» проводится расчет поведения праматерии. Ее поведение зависит от многих факторов: от поведения массивных тел, от состояния гравитационного излучения… Простейшая тензорная модель массодинамики, учитывающая движение и свойства праматерии и зависящая от массивных тел, имеет вид:

$$\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\sigma}_{ps} = k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps}, \gamma^{kl}\partial_k\tilde{\sigma}_{ls} = \chi_s,$$

$$2\gamma^{lk}\partial_l\tilde{\sigma}_{ps}\partial_k\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\hat{u}^s = (k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps})\hat{u}^s,\ \tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s = \tilde{\chi}_s\hat{u}^s.$$

Введем контрвариантные компоненты используемых тензоров по правилу

$$\tilde{\sigma}_{ps} = \lambda_{pr}\lambda_{sq}\tilde{\sigma}^{rq}, \tilde{T}_{ps} = \lambda_{pr}\lambda_{sq}\tilde{T}^{rq}.$$

Пусть $\lambda_{ij} = const$. Указанные выше уравнения преобразуются в систему вида

$$\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\sigma}^{ps} = k\tilde{T}^{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}^{ps},$$

$$\gamma^{kl}\partial_k\delta_{lp}\tilde{\sigma}^{ps} = \tilde{\chi}^{s},$$

$$2\gamma^{lk}\partial_l\tilde{\sigma}_{ps}\partial_k\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\hat{u}^s = (k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps})\hat{u}^s,$$

$$\tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s = \tilde{\chi}_s\hat{u}^s.$$

Они обобщают систему уравнений релятивистской теории гравитации. Мы используем в ней систему четырехметрик, гравитационные явления зависят от поведения праматерии. К таким выводам мы приходим, используя только один тензор для полей гравитации в данной модели массодинамики. Однако мы не учли тензор индукций в массодинамике, который подчинен, как показано выше, более сложным уравнениям, чем уравнения для полей. В любом случае предлагаемая модель массодинамики качественно отлична от моделей, используемых ранее в физике.

Поскольку релятивистская теория гравитации не только согласуется с подходом и моделью Эйнштейна, а развивает и обобщает ее, предлагаемая модель простая модель массодинамики содержит в себе в частном случае теорию гравитации Эйнштейна. Учет материальных тел, как это уже обнаружено в теории электрона и в гидродинамической модели микродинамики, может и должен выполняться через конструирование правых частей предлагаемых уравнений. Однако это только одна возможность. Есть и другие возможности.

Обратимся к релятивистской теории гравитации Логунова. В его модели введено соответствие

$$g_{rl} = \sqrt{-\gamma}\gamma_{rl} + \sqrt{-\gamma}\varphi_{rl}.$$

Здесь $\gamma = Det\gamma_{rl}, \gamma_{rl} = diag(1,1,1,-1)$ – метрика Минковского, φ_{rl} - тензорное физическое поле гравитации. Поскольку поля инерции могут и должны быть присущи любому материальному объекту (а «поля» относятся к таким объектам), то и гравитационное поле тоже владеет инерцией и тяготением. Поэтому может и должна быть пара тензорных физических полей, что обнаруживается при построении массодинамики по аналогии с электродинамикой. В электродинамике эффекты инерции скрыты из-за тождественного выполнения первой пары уравнений электродинамики при переходе к четырехпотенциалам. Но они учитываются во второй паре уравнений через связи между полями и индукциями. В случае пространства постоянной кривизны метрика инерции подчинена уравнениям

$$R_{ij} - \frac{1}{2}\Omega_{ij}R = 0.$$

Логунов показал, что уравнения релятивистской теории гравитации приводят к формальному соответствию с теорией гравитации Эйнштейна, хотя физические их основы и выводы во многом различаются. В этом случае «эффективная» метрика будет подчинена уравнениям

$$R_{ij} - \frac{1}{2}\Omega_{ij} R = \kappa T_{ij}.$$

В силу указанных обстоятельств мы вправе ожидать, что, с общих позиций анализа, что простейшая модель массодинамики представляет собой дальнейшее развитие известных моделей гравитации.

Аналогия с электродинамикой может облегчить понимание физических ситуаций в гравитации и, по-видимому, стимулирует создание технических устройств, пригодных для новой физической практики.

Предложенная модель является простейшей. Происходит это по многим причинам.

Во-первых, не детализирован тензор напряжений праматерии и ее составляющие. Поскольку мы выделили систему базовых физических объектов и допускаем существование большого количества изделий, изготовленных из них, указанные выше величины будут зависеть от всех физических слагаемых.

Во-вторых, следует учесть всю систему ранговых движений: размеры, скорости, ускорения и т.п. В частности, требует усложнения зависимость 4-потенциала массодинамики от всей совокупности обозначенных величин и их свойств. Например, можно рассмотреть выражение

$$A_k(g) = a_s \sigma_{kl}{}^{sp} v_p^l + b_s \kappa_{kl}{}^{sp} v_p^l.$$

Здесь индекс s выражает ранг учитываемого движения, индекс p выражает тип микрообъекта, принадлежащего тонкой материи (открытые или замкнутые струны, электрические или гравитационные предзаряды…). Тензоры $\sigma_{kl}^{sp}, \kappa_{kl}^{sp}$ - задают слагаемые напряжений в тонкой материи, обусловленные наличием разных объектов, изготовленных из неё.

В-третьих, нужно решить проблему замыкания уравнений для тонкой материи, решение которой станет возможным после достаточно сложной экспериментальной работы.

В-четвёртых, нами принята концепция тонкой материи. Она наполняется новым физическим содержанием в рамках концепции трансфинитности материи. Речь идет о системе уровней материи и об алгоритмах их учета на практике. В частности, требуется выполнить согласование структур и активностей любого изделия, изготовленного из материи разных уровней.

Многоуровневость материи позволяет по-новому подойти к известной информации о поведении объектов. Так, закон взаимодействия масс допускает новую интерпретацию в модели гравитации, базирующейся на концепции тонкой материи. Из проведенного ранее анализа взаимосвязи уравнений микромира и макромира следует, что в атомах и молекулах тонкая материя «покоится». Более того, тонкая материя может рассматриваться как средство и источник жизнедеятельности атомов и молекул.

Эти обстоятельства позволяют предположить, что движущаяся тонкая материя распределяется между грубой материей. По этой причине допустимо «возвращение» к начальным моделям гравитации, истоки которой в идеях Декарта и Канта. Необходим хотя бы простейший анализ новых возможностей описания гравитации и интерпретации её свойств. Понятно, что на нашем уровне практики речь может идти только о тех фактах, которые уже достигнуты практикой. Однако, ввиду фундаментальности гравитации, будут новые факты и новые обстоятельства. Поэтому нужны модели, изменение которых естественно и оптимально для теории и практики. Пожалуй, речь идет о конструировании принципиально новых подходов.

К новой феноменологической теории гравитации

Примем точку зрения, что тонкая материя концентрируется за пределами макроскопических тел. Подчиним плотность тонкой материи, индуцированной массой M, закону:

$$n = n(M)\ln(r + r_a), n(M) = \kappa M, r_0 \le \varepsilon .$$

Пусть сила, действующая на массу m, зависит не только от градиента плотности тонкой материи, но и от качества силовых линий, связывающих тела и пусть она управляется некоторой функцией Φ. Рассмотрим модель вида

$$\begin{gathered}\vec{F} = \alpha \cdot m\Phi \frac{dn}{d\vec{r}}, \\ \Phi(r + r_b) = \beta = const.\end{gathered}$$

В её рамках выводится обобщение закона Ньютона для гравитационного взаимодействия масс:

$$\vec{F} = \gamma \frac{Mm}{(r + r_a)(r + r_b)}\vec{s} \cong \gamma \frac{mM}{r^2}\vec{s}.$$

Примем гипотезу, что плотность тонкой материи растет по мере удаления от грубой материи. Мы приходим тогда к наглядной физической модели гравитации. Физический механизм гравитации состоит в том, что плотная тонкая материя «толкает» грубые материальные тела в сторону менее плотной тонкой материи. Говоря о качестве гравитационных силовых линий, связывающих тела, имеющие массу, друг с другом, мы принимаем механическую аналогию Томсона со структурой электростатического поля, заданной системой электрических силовых нитей.

В силу указанных обстоятельств электроны и протоны могут иметь пару систем силовых линий: электрического и гравитационного типа. При анализе взаимодействия тел мы обязаны принять в расчет их структуру и специфику их взаимодействия между собой. На простейшем примере учтём указанные факторы.

Пусть масса M расположена на расстоянии r от массы m. Введем нормированную плотность тонкой материи, выражая ее через систему её изделий, в виде, косвенно учитывающем указанные свойства:

$$n = a\sqrt{M}\left(\ln(r + r_0) + \frac{b}{r + r_b} + \frac{c}{(r + r_c)^2}\right).$$

Первое слагаемое считаем главным членом, «константы» b, c малы. Рассмотрим, например, закон взаимодействия для масс вида

$$\vec{F} = \alpha \cdot m\left(\frac{dn}{dr}\right)^2 \frac{\vec{r}}{r}.$$

В нём учтен градиент изменения плотности тонкой материи по мере её удаления от анализируемого физического тела.

Получим выражение

$$\vec{F} = \alpha^2 amM \left(\frac{1}{(r+r_0)} - \frac{b}{(r+r_b)^2} - \frac{2c}{(r+r_c)^3} \right)^2 \frac{\vec{r}}{r}.$$

Оно задает уникальные свойства силы при малых значениях r. Это обстоятельство может сыграть важную роль в анализе динамики планет и Солнца.

Величины α, a, b, r_0, r_b следует выбирать, используя экспериментальные данные. Полученный закон выражает, в частности, известные эмпирические факты, присущие гравитации. Для движения планет они установлены Ньютоном в форме

$$\vec{F} = \gamma \frac{mM}{r^3} \vec{r}.$$

Для смещения перигелия планет можно получить дополнительный закон

$$\vec{F}^* = \sigma \frac{mM}{r^4} \vec{r}.$$

Следуя ранее проведенному анализу частицы света, они образованы из тонкой материи. Электрические заряды также образованы из тонкой материи. Они порождают электромагнитное излучение. При аналогии гравитации с электромагнетизмом аналогичная точка зрения пригодна для гравитационного излучения. Возможны тогда частицы гравитационного излучения, изготовленные из тонкой материи.

Покажем, что предложенная наглядная модель гравитационных явлений указывает вариант уточнения массодинамики. В ней тензор гравитационного поля выражен в форме

$$F_{mn} = \partial_m A_n + \partial_n A_m.$$

Четырехпотенциал $A_n(\mu)$ выражен через тензор напряжений тонкой материи σ_{kp} и её четырехскорость v^p в форме $A_n(\mu) = \sigma_{np} v^p$. Для скалярного потенциала можно применять зависимость $\varphi = \sigma_{0p} v^p$. С другой стороны, следуя эмпирической модели, получим

$$\varphi = \sqrt{M} \frac{dn}{dr}.$$

Следовательно, тензор напряжений может иметь разную связь с градиентом плотности тонкой материи

$$\sigma_{kp} = \kappa_{kp}^{rs} \frac{dn_s}{dQ^r}.$$

Величина Q^r не обязана быть метрикой, она может быть некоторым метрическим функционалом, учитывающим специфику и тонкости гравитационного взаимодействия. Применение функционала естественно связывать не только с локальными, но и с глобальными свойствами гравитации.

Философские аспекты теории гравитации

Спинорная модель гравитации содержит как модель гравитации Ньютона, так и модели гравитации Эйнштейна и Логунова. Однако 4-метрика, используемая в геометрической модели, является лишь вторичным математическим элементом более общей модели. Её физические основы содержатся в тензоре напряжений тонкой материи.

Принятие модели трансфинитной материи в сочетании с новой связью микро - и макродинамик приводит к идее, что основу физики гравитации могут задавать статические и динамические свойства тонкой материи – праматерии. Исходя из этого положения предложены структурные модели положительного и отрицательного гравитационных предзарядов. Дано их начальное симметрийное обоснование. В частности, предложены структурные модели положительных и отрицательных электрических и гравитационных предзарядов. Анализ показал, что одни заряды неотделимы от других. Они могут превращаться друг в друга.

Для понимания сущности частиц света и построения их структурной модели требовалось выразить физически и промоделировать математически их гравитационные свойства. Из электродинамики Максвелла получено доказательство, что метрика Римана является в ней вторичной структурой. Метрика Картана, неевклидовая в трехмерии, заняла место первичной. Естественно ожидать наличия неримановой модели гравитации. Анализ показал, что спинорная модель гравитации действительно обеспечивает аналогию между электромагнитным и гравитационным полями. Она дает новые возможности обобщения и понимания гравитации.

Отметим, что современные модели представляют собой попытки понять и описать гравитацию, изучая ее «внешние», видимые проявления. Например, так исследуется поведение планет Солнечной системы. Они моделируются массой и скоростью, присоединенными к физическому пространству и времени. Такой подход не в состоянии постичь «внутреннюю» сущность гравитации, построить, например, модель гравитационного заряда. Не изучаются и внутренние движения, присущие гравитации. По форме и по сути подхода они продолжают модели одноуровневого материального мира, когда базовым физическим элементом анализа являются макротела.

Практика давно уже свидетельствует, что реальность многоуровнева, материя имеет множество структурных элементов, софистатных друг другу. Поэтому становится актуальным и неизбежным анализ структурных составляющих материи, относящихся к гравитации. Требуется структурная теория гравитационных зарядов, а также физический анализ взаимодействий. Движение в этом направлении объективно приведет к структурной модели гравитации. В ней должна быть как-то отражена «квантовая» версия гравитации. И по форме, и сути спинорную структуру уравнений массодинамики можно рассматривать как начало многоуровневой модели гравитационных явлений. Она ранее была обнаружена в электродинамике, однако в этом случае многоуровневость «скрыта». Произошло так потому, что электродинамика базируется на алгебре, качественно отличной от алгебры для массодинамики. В массодинамике возможно добавление конвективных слагаемых, что делает ее близкой к микродинамике. Более того, в таком варианте обнаруживаются естественные софистатности новой модели с известными, если на движение разных уровней материи накладываются дополнительные условия.

Отметим некоторые общие закономерности анализа трансфинитных изделий:

а) Поскольку трансфинитной материи, согласно развиваемому подходу, присуща иерархия зарядов, относящихся к гравитационному (массовому) и электрическому типу, очевидной становится трансфинитность энергии, а также неэквивалентность массы и энергии, присущая подходу, основанному на теории относительности Эйнштейна. Трансфинитность материи приводит к очевидному выводу о физическом единстве вещества и поля, корпускул и волн. Их трансфинитное содержание сущностно глубже стандартного одноуровневого варианта с присущей ему системой ограничений.

б) Проведенный анализ позволил «увидеть» иерархию механизмов образования частиц света. С одной стороны, они могут быть получены из взаимодействия физических объектов более высокого уровня материи (атомов, молекул, элементарных частиц), выступающих в роли источников и своеобразного «завода» для «спрятанных в них» частиц света. С другой стороны, они могут быть получены из взаимодействия физических объектов более низкого уровня материи, выступающего в роли «интеллектуального океана» для частиц света. Понятно, что возможно сочетание пары указанных механизмов. Понятно, что в образовании и разрушении объектов конкретного уровня материи может участвовать система высших и низших уровней материи. Понятно, что для любых других частиц, в силу принципа софистатности, ситуация выглядит аналогично: реальности присуща иерархия механизмов образования частиц. Отметим, что «простые» изделия, с математической точки зрения, обладают системой скрытых свойств, которые невыполнимы для «сложных» изделий. Принимая софистатность математики и физики, мы можем ожидать, что «простой тонкий мир» подчинен сложнейшим законам, многие из которых скрыты.

в) Трансфинитность материи предполагает трансфинитность симметрий, присущих трансфинитным изделиям и трансфинитным процессам. В роли такого процесса выступает, в частности, процесс измерения. Он базируется, с одной стороны, на изделиях определенного вида, с другой стороны, на некоторых взаимодействиях, которые удается зафиксировать экспериментально. Симметрийные аспекты измерения становятся объективно необходимым звеном физической модели.

г) Изучая гравитацию, мы желаем выразить не только математическое единство массодинамики и электродинамики, но также приблизиться к физической сущности этого единства. Нужна модель массовых зарядов и сравнение с моделью электрических зарядов. Нужно разобраться, как теоретически, так и экспериментально, в формах и механизмах взаимодействий, ассоциированных с указанными зарядами, а также с внешними условиями, в которой они находятся.

Формальная связь электромагнетизма и гравитации

Для формального взаимного преобразования спинорных уравнений электродинамики и массодинамики нам нужно взаимно преобразовывать кватернионы в антикватернионы. Это легко делается на основе группы знаков, действующей на элементы строк соответствующих матриц. Группа знаков для матриц размерности 4×4 имеет вид:

$$\begin{array}{cccc|cccc} + & + & + & + & - & + & - & - \\ - & - & + & + & - & - & - & + \\ + & - & - & + & - & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + & + & + \end{array}$$

Она взаимно превращает кватернионы в антикватернионы. Сделать это можно иначе, выполнив матричное произведение слева на матрицы, образующие самостоятельный антикватернион. Он имеет вид:

$$c_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, c_2=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, c_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, c_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Используя их согласно алгоритму умножения каждой матрицы, входящей в уравнения, на «свою» матрицу, мы взаимно превращаем систему уравнений электродинамики в систему уравнений массодинамики. С математической точки зрения такую функцию выполняет совокупность диагональных матриц, указанных выше, у которых скомпенсированы знаки. С физической точки зрения им соответствует совокупностью нейтральных физических объектов, образованных предзарядами с разной ориентацией и разным взаимным расположением, так и с системой объектов, имеющих ненулевой заряд. Известно, что уравнения электродинамики и массодинамики базируются, соответственно, на матрицах вида:

$$q_1 = \{a_i\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mu_1 = \{f_i\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$q_2 = \{b_i\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mu_2 = \{e_i\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Дополнительно нужно учесть, что при объединении новых матриц в систему уравнений следует использовать четырёхметрику с разной сигнатурой. С учетом сделанного замечания уравнения электромассодинамики выглядят так:

$$\sigma_{ij}^{kl}\left(\zeta,\eta\right)_p \zeta^i \eta^j \left(a_k \partial_l \Psi_p + b_k \partial_l \Psi^*{}_p\right) = \Phi_p.$$

Здесь

$$\sigma_{ij}^{kl}\left(\zeta,\eta\right) = \begin{cases} \sigma_{ij}^{kl}\left(c,c\right) = diag\left(1,1,1,1\right), \\ \sigma_{ij}^{kl}\left(c,E\right) = diag\left(1,-1,1,-1\right), \\ \sigma_{ij}^{kl}\left(E,E\right) = diag\left(1,1,1,1\right). \end{cases}$$

Итак, возможность единой записи уравнений электромагнетизма в гравитации обоснована математически.

С физической точки зрения, рассматриваемые изменения технологически нетривиальны. Они «требуют» организованного воздействия со стороны тонкой материи на структуры, ассоциированные с нотонами или гравитонами. Такая физическая реализация имеет пока только начальное логическое обоснование. Конкретная реализация таких превращений может быть «достаточно далека» от рассматриваемой математической возможности.

Путь к новым технологиям базируется на изменении отношений между четырьмя предзарядами, которые входят в структуру нотонов и гравитонов. Мы рассмотрели формальную возможность взаимного преобразования электромагнетизма в гравитацию на основе матриц и матричного произведения, интерпретируемых как математическое представление предзарядов «гравитационного» типа. Однако нам известно также комбинаторное произведение. Покажем, что оно позволяет обеспечить взаимное превращение электромагнетизма в гравитацию на основе использования идеалов алгебры, интерпретируемых физически как математическое представление предзарядов «электрического» типа.

Умножим элементы кватерниона, используемые в электродинамике

$$a_i \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно матрично и комбинаторно на матрицы, ассоциированные с предзарядами гравитационного и электрического типа:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме выражения отношений между предзарядами они иллюстрируют, согласно принципу софистатности структур и активностей, реальные физические объекты, изготовленные из тонкой материи. Получим выражения:

$$A_\mu \cdot \{a_i, E\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$A_q \underset{\rightarrow}{\overset{k}{\times}} \{a_i, E\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Они отличаются друг от друга с точностью до сигнатуры четырехметрики, которую можно использовать при преобразовании уравнений электродинамики или гравитации от одного матричного вида к другому. В данном случае преобразования не меняют векторных уравнений, хотя меняют матричные. С математической точки зрения ситуация здесь тривиальна. Указанные изменения сводятся только к перестановке строк матриц и некоторому изменению знаков. Заметим, что повторное применение матричных преобразований приводит уравнения к первичному виду. Первичный вид уравнений при многократных комбинаторных произведениях получается при их четырёхкратном применении. С физической точки зрения ситуация не так проста, потому что фактически мы учитываем влияние на электромагнитное поле разных физических предзарядов, они по-разному влияют на явления и объекты, ассоциированные с ними. Следовательно, у электромагнетизма и гравитации есть фундаментальное свойство: сохранять себя при воздействиях со стороны различных предзарядов. Теперь легко видеть возможность взаимного преобразования электромагнетизма в гравитацию на основе согласованного воздействия на нотоны и гравитоны системы электрических предзарядов. Преобразование полученных выше матриц в элементы кватерниона обеспечивается системой предзарядов электрического типа вида

$$q_i \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

С точки зрения знаковой группы «гравитационное» и «электрическое» преобразования похожи друг на друга.

Замечание 1. Матрицы, выполняющие матричное и комбинаторное произведения уравнений электродинамики и массодинамики согласованы друг с другом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С мономиальными матрицами ассоциированы идемпотенты по матричной операции. Комбинаторное произведение этих мономиальных матриц порождает данную систему идемпотентов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{k}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{k}{\times}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ldots$$

Другие системы идемпотентов порождают изменения, которые дают новые системы уравнений. Так, получим соответствия вида

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\-1&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

При всей кажущейся бесполезности такого преобразования за ним может стоять реальная физическая ситуация, которая скрыта от анализа при формальном использовании известной системы уравнений. Если практика подтвердит такое предположение, то комбинаторную операцию можно будет использовать как средство получения скрытых свойств физических объектов и явлений. Они будут проявлять себя через матрицы указанного и других видов, а также согласно решениям уравнений, ассоциированных с этими матрицами. Умножим матрицы

$$a_i\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\right\},E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

комбинаторно слева на предидеал по матричному произведению вида

$$\alpha=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\alpha\cdot\alpha=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Получим систему мономиальных матриц вида

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&-1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

На их основе получаются уравнения комбинаторно деформированной электродинамики.

Новая форма электродинамики

Введем матрицы

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\overset{*}{\alpha}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&-1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\overset{*}{\beta}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Комбинаторно умножим их на матрицы $(a^i,E),(b^i,E)$ по следующей схеме:

$$a(1)=\alpha\overset{k}{\times}a^1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},a(2)=\overset{*}{\beta}\overset{k}{\times}a^2=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$a(3)=\overset{*}{\alpha}\overset{k}{\times}a^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},a(0)=\overset{*}{\beta}\overset{k}{\times}a^0=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$b(1)=\overset{*}{a}\overset{k}{\times}b^1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},b(2)=\overset{*}{b}\overset{k}{\times}b^2=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$b(3)=-\overset{*}{a}\overset{k}{\times}b^3=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},b(0)=\overset{*}{b}\overset{k}{\times}b^0=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения электродинамики Фарадея-Ампера могут быть записаны так:

$$(a(i)\partial_i\Psi+b(i)\partial_i\Psi^*)P=0.$$

Они получены из элементов группы заполнения физических моделей и пары предидеалов (с точностью до знаковой группы) на матричной операции. Пара предидеалов может рассматриваться как «подсказка», что у частицы света есть пара нейтральных объектов. Это предположение никак не обосновано. Оно проявляет себя как логическая возможность. Для практики привычно записывать уравнения физики в модели ассоциативных множеств с матричной операцией. В рассмотренном выше случае мы записали уравнения в неассоциативном множестве с комбинаторной операцией. К элементам, принадлежащим группе заполнения, добавлены немономиальные элементы. Электродинамика задана на основе мономиальных матриц, полученных из произведений элементов группы заполнения на матрицы, отнесенные к предидеалам.

Возможно, такой вариант моделирования является более «богатым», чем вариант, основанный на ассоциативных множествах. Хотя, конечно, это может быть просто «другой язык». В любом случае это интересно.

Замечание 2. На основе знаковой группы можно преобразовать уравнения электродинамики, записанные на комбинаторной операции, в уравнения массодинамики (которые по своим свойствам превосходят стандартные уравнения гравитации), записанные на комбинаторной операции. Этот факт легко проверить, используя соответствующие произведения.

Замечание 3. Комбинаторная операция в состоянии «породить» самые разные уравнения, используя их определенный базовый вариант. По этой причине она выступает в роли инструмента физического моделирования. Мы получили запись уравнений электродинамики с использованием комбинаторной операции в двух вариантах: при использовании идеалов и предидеалов на матричной операции. Возможно представление уравнений на качественно других объектах. Одной и той же математической структуре соответствуют разные физические объекты и ситуации. Математика в её векторном виде скрывает систему физических возможностей.

Рассуждения о сути и форме зарядов

Возможно, общее различие зарядов обусловлено различием инерционных свойств для электрического и гравитационного зарядов, а также их проявлений. Массе присущ первый уровень инерции, обусловленный скоростями материи, а у электрического заряда его нет. В то же время и масса, и электрический заряд способны превращаться друг в друга. Следовательно, масса способна терять инерционные свойства, а электрический заряд способен их приобретать. Закон сохранения инерции при превращении зарядов становится средством диагностики меры такого превращения. Понятно, что предполагаемый механизм может привести к качественно новым физическим представлениям. С ними могут быть связаны новые технические устройства. Не исключено, что указанное свойство реализуется в динамике частиц света.

Примем гипотезу, что электрический заряд обусловлен вторым уровнем инерции. Он зависит от ускорений. В этом случае, как легко показать, математические структуры схожи как в случае симметричного, так и в случае антисимметричного тензора напряжений. Они имеют вид дифференциальных уравнений второго порядка с активной сигнатурой, дополненных градиентами от калибровочного условия:

$$\Xi^p = \nabla^2 v^p + w_g \partial_0^2 v^p + \partial_p \left(div\vec{v} + w_g \partial_0 v^0 \right) = 0.$$

Они входят в уравнения динамики аддитивно, будучи умноженными на плотность массы ρ и на вязкость μ (характеризующие жидкий объем и условия, в которых находятся структурные составляющие этого объема). Поэтому для электрического заряда естественно ввести динамические уравнения $\rho \Xi^p = \mu^{-1} \vartheta^p$. При условии

$$\left(div\vec{v} + w_g \partial_0 v^0 \right) = const$$

динамика электрического заряда подчинена дифференциальному уравнению с активной сигнатурой

$$\rho\,(\nabla^2 v^p + w_g \partial_0^2 v^p) = \mu^{-1} \vartheta^p .$$

Принимая точку зрения, что скорости зависят только от времени, получим дифференциальное уравнение для динамики электрического заряда в форме

$$\rho(q)\frac{d^2 v^p}{dt^2} = \vartheta^p(q).$$

Если представленная точка зрения правильна, динамика электрического и гравитационного зарядов качественно различна. Для масс важны первые производные от скоростей по времени, для электрического заряда важны вторые производные от скоростей по времени. Для масс важна скорость изменения скорости, для электрических зарядов важна скорость изменения ускорений. Конечно, рассматриваемая возможность ассоциирована лишь с движением жидкости. Ее реальный исток и реальные причины могут быть существенно глубже. Поэтому мы вправе рассмотреть более общий подход, отталкиваясь от идеи, указанной выше. Общековариантные уравнения для динамики электрического заряда приобретают тогда вид

$$\alpha^2 \frac{d^3 x^i}{d\sigma^3} + \beta \cdot \hat{\Gamma}_{jk}{}^{i} \left(\frac{d^2 x^j}{d\sigma^2}\frac{dx^k}{d\sigma} + \frac{dx^j}{d\sigma}\frac{d^2 x^k}{d\sigma^2} \right) + \gamma \cdot \breve{\Gamma}_{jk}{}^{i} \frac{dx^j}{d\sigma}\frac{dx^k}{d\sigma} + \delta \cdot Q^i = 0.$$

Поскольку в них обязательно войдут вторые и первые производные по координатам, следовательно, исходя из развиваемого подхода, динамика электрического заряда сопровождается превращением в гравитационный заряд, у которого есть своя инерция. Аналогично, превращение массового заряда в электрический становится возможным лишь в том случае, когда учитываются третьи производные от координат по времени. Поскольку мы предполагаем, что гравитационный и электрический заряды всегда дополняют друг друга, то предложенное уравнение можно интерпретировать как единое уравнение для заряда. В нем есть весовые множители $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, посредством которых учитываются «пропорции» наличия в динамическом уравнении электрической и массовой составляющих для единого заряда. Понятно, что речь идет о динамике уровневых зарядов. Ими могут быть, например, предзаряды, введённые в структурной теории света. Для них естественно соединение электрической и гравитационной составляющих. На этом этапе становится возможной гипотеза иерархической структуры зарядов: заряды гравитационного типа ассоциированы с четными производными по времени, заряды электрического типа ассоциированы с нечетными производными по времени.

Тогда производные первого и третьего порядка ассоциированы с первым и вторым уровнями электрического заряда. Производные второго порядка ассоциированы с первым уровнем гравитационного заряда. Есть ещё и производные более высоких порядком, с которыми ассоциированы новые уровни электрического и гравитационного зарядов.

В трансфинитной реальности мы имеем дело с согласованной системой уровневых зарядов, а также с системой уравнений для динамики уровневых тел с такими зарядами. В реальных ситуациях, которые реализуются при взаимодействии частиц света с физической средой, исходя из физических соображений, обязана реализоваться согласованная динамика электрического и массового предзарядов, содержащихся в частице света. По этой причине эксперимент и проводимые расчеты обязаны учесть отмеченные обстоятельства. Покажем, что косвенно они уже учитываются в модели релаксационного изменения параметров электромагнитного поля при его взаимодействии с физической средой. Действительно, для описания экспериментальных данных в электродинамике движущихся сред нам понадобилось уравнение для скоростей $\vec{u}$ вида

$$\frac{d\vec{u}}{d\xi} = -P_0\left(\vec{u} - \vec{u}_{\circ}\right).$$

Продифференцируем его дважды по независимой переменной ξ. Получим уравнение

$$\frac{d^3\vec{x}}{d\xi^3} + P_0\frac{d^2\vec{x}}{d\xi^2} = 0.$$

Оно принадлежит к типу динамических уравнений, ассоциированных с согласованной динамикой электрического и гравитационного зарядов. Если предлагаемый подход физически корректен, мы можем утверждать, что в процессах динамического изменения параметров электромагнитного поля (частиц света) реализуется механизм превращения электрического предзаряда в массовый предзаряд и массового предзаряда в электрический. Из этих рассуждений следует, что при анализе гравитационных явлений, сопровождающихся большими ускорениями и процессами взаимного превращения электрического и гравитационного зарядов, недостаточно использовать динамические уравнения второго порядка, недостаточно учитывать только скорости и ускорения. Общая динамика для электрических и гравитационных зарядов должна описываться, по меньшей мере, дифференциальными уравнениями третьего порядка.

Соответственно, в кодифференциальных уравнениях должен быть учтен третий и более высокие уровни движений. Поскольку нами принята софистатность движений и структур, мы вправе в теории и на практике учитывать всю систему «гравитационных» - лепестковых и «электрических» - шиповых предзарядов, а также разнообразных изделий из них. Заряды и взаимодействия едины: они реализуют обмен с тонкой материей. Различаются они по тому, как они изготовлены. В зависимости от структуры они способны иметь разные функции. Мы приняли точку зрения, что структуры и активности согласованы между собой. В трансфинитной реальности они софистатны. Отсюда следует идея, что рождение частиц света, как и гравитонов, есть в первую очередь создание изделий. Они могут иметь разные стороны и свойства, реализуя свою функциональность. В частности, может меняться скорость их движения.

Если это так, эволюция изделий тонкой материи, в которой не было частиц света, может привести к их созданию. Аналогично могут получаться и гравитоны. В силу различия их структур они могут иметь как разные скорости, так и разную динамику.

Мы предполагаем, что из тонкой материи изготовлены как предмассы, так и сами массы - гравитационные заряды, а также среда, посредством которой массы влияют друг на друга. Соответственно, как вне масс, так и внутри них и на их границе будут выполняться динамические уравнения для тонкой материи, софистатные уравнениям движения жидкости. Следовательно, теория гравитации обязана рассматриваться как модель, согласованная с движениями и превращениями праматерии. Принимая в качестве структурных элементов материи (как это следует из модели частиц света) пару элонов и пару пролонов, мы можем проводить анализ числа указанных элементов, а также учитывать структуру их Ритов. Если ограничиться 01-Ритами, то потребуется выяснить, в каком количестве и как представлены в гравитационных явлениях 0-Риты и 1-Риты.

Мы понимаем, что когда одноуровневая модель выдается взамен многоуровневой, у нее имеется множество ограничений. Некоторые из них неточны, а некоторые просто неверны. Поэтому следствия из одноуровневых моделей в чем-то неточны, а в чем-то неверны. Такова реальная картина анализа.

В каждом проведенном исследовании есть новые ростковые точки и перспективы для дальнейшего развития. Хорошая одноуровневая модель образует естественное начало трансфинитной модели. Трансфинитная модель отличается от одноуровневой модели пространством и временем, величинами, операторами и операциями, понятиями и экспериментом. Отметим специфику учета и проявлений Рит- структур в одноуровневых моделях. В качестве примера рассмотрим физическую реальность микромира, используя только 01-Риты и физическое представление о существовании четырех основных физических объектов, из которых образуются все остальные. Тогда естественно посчитать в каждой конструкции и явлении количество 0-Ритов, им соответствующих. Пусть оно задается в единице объема физического пространства-времени функциями $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Пусть количество 1-Ритов в единице физического объема задается функциями $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.. Дифференцирование этих функций по координатам задает элементы, из которых следует конструировать величины, относящиеся как к исследуемым конструкциям, так и к исследуемым явлениям (следуя принципу общей софистатности конструкций и их качеств). В рассматриваемом варианте, когда исходным становится тензор второго ранга, возможно его расщепление на симметричную и антисимметричную части. Из практики следует, что симметричная часть ассоциируется с гравитационным зарядом, а антисимметричная часть ассоциируется с электрическим зарядом. Мы связываем эту математическую возможность с физической возможностью, состоящей в том, что топологически возможны два типа предзарядов, построенных из праправатерии (атонов). Здесь мы следуем общей софистатности математических и физических конструкций, математических и физических качеств. Заметим, что указанные обстоятельства мы считаем пригодными к материи любых уровней. Так постулируются общие свойства физического мира на основе системы софистатностей одного уровня материи. Естественно ожидать, что высшие уровни Ритов: второй (гиперплоскости), третий (гиперобъемы) и т. д. индуцируют новые величины, новые операции и операторы. Обозначим число пролонов и элонов как 0-структур в единице объема «праматериальной жидкости» функциями

$$(\phi_1(\vec{x},t), \phi_2(\vec{x},t), \phi_3(\vec{x},t), \phi_0(\vec{x},t)) = (B_1, B_2, B_3, B_0) = B_l, l = 1,2,3,0.$$

При помощи «своего» метрического тензора (или другим способом) им будет поставлена в соответствие первая пара функций гравидинамики вида

$$(\phi^{ij}, \lambda^{kl}).$$

Первые производные от них покажут линейную часть неоднородностей их распределения в пространстве и во времени. При построении симметричного тензора ситуация становится схожей с механикой сплошной среды, что позволяет применить в гравитации ее подходы и методы. При этом появляется возможность по-новому учесть «инерционную часть» гравидинамики, обусловленную квадратичной формой, ассоциированной с четырехпотенциалом гравидинамики.

Основная идея модели массодинамики состоит в том, чтобы *в первом приближении* описывать экспериментальные проявления масс посредством величин, образующих симметричный тензор второго ранга. Для электрического заряда его «полевые» проявления задаются антисимметричным тензором второго ранга. В силу указанных обстоятельств теория электрона, будучи согласованной с электродинамикой и массодинамикой, должна содержать в себе свойства электрического заряда и массы. Поэтому ее величины должны быть заданы парой тензоров. Один из тензоров симметричен, а второй антисимметричен. Кроме этого, если электрон «порожден» свойствами электрического и гравитационного зарядов, а уравнения для них нам известны, то его поведение тоже должно как-то сводиться к аналогичным уравнениям. Другими словами, «дети могут быть похожи на родителей». Но, заметим, как сходство детей и родителей может быть сходством в поколениях, так и сходство электрона с электродинамикой и гравидинамикой может быть сходством софистатным, зависеть в разной мере от поведения разных уровней материи. Софистатность «родителей» и «детей» может быть косвенной.

Однако, следуя аналогии с электродинамикой, мы обязаны ввести в рассмотрение второй четырехпотенциал. Его можно ввести, учитывая число пролонов и элонов как 1-структур в единице объема «праматериальной жидкости». Зададим их функциями

$$(\varphi_1(\vec{x},t),\varphi_2(\vec{x},t),\varphi_3(\vec{x},t),\varphi_0(\vec{x},t)) = (C_1, C_2, C_3, C_0) = C_l,\ l = 1,2,3,0.$$

Со «своим» метрическим тензором они зададут вторую пару функций гравидинамики вида

$$\left(\varphi^{ij}, \Lambda^{kl}\right).$$

Примем предположение, что и для второго четырехпотенциала будут выполняться уравнения, аналогичные уравнениям движения материальной жидкости. Фактически, мы в явном виде используем принцип софистатности структур и их свойств для материального и праматериального уровней реальности. Уравнения

$$\frac{\partial \phi^{ij}}{\partial x^i} = 0,\ \frac{\partial \varphi^{ij}}{\partial x^i} = F^j$$

образуют начальную модель явлений массодинамики, построенную по аналогии с моделью поведения жидкостей. По своей сути она напоминает модель, в которой смешана пара жидкостей.

Ситуация становится понятийно достаточно простой. Но не так просты ее математические основы и выводы. Не так прост и эксперимент, который потребуется, чтобы верифицировать данную модель. Согласно новой модели гравитационного взаимодействия, материальные тела расположенные в «океане» праматерии, обладают гравитационным излучением, которое расталкивает праматерию между ними. Появляется «разреженность» праматерии, которая является физической причиной притяжения массивных тел. Если предположение о том, что тонкая материя «уходит» от привычной для нас макроскопической материи, то между Галактиками ее может быть достаточно много, что приведет к эффекту расталкивания Галактик. Именно такой эффект наблюдался в астрофизике с 1998 года. Когда подтвердится механическая модель частиц света, основанная на атонах, элонах и пролонах, мы сможем развивать начальную модель для тонкой материи между Галактиками как физической системе, содержащей указанные объекты. В модели гравитации Ньютона физическим конструкциям сопоставлены их размеры и расстояния между ними, а также масса - эмпирическая величина, физический смысл которой непонятен.

Все указанные величины могут быть прямо или косвенно измерены экспериментально и согласуются с принятой системой эмпирических понятий. Расчет основан на модели пространства и времени, свойства которых не согласуются с какой-либо моделью массы. Концепция силы базируется на аналитическом выражении, основанном на предыдущих понятиях. Модель подтверждена совпадением расчета с экспериментальными данными, которые невозможно получить в лабораторных условиях и за короткое время.. Позволяя решить ряд практически важных задач, она не раскрывает природу гравитации, в частности, механизм и динамику силы, как об этом говорил Ньютон. Неясна сущность и формы массы, ее связи с другими физическими зарядами.

В модели гравитации Эйнштейна расчетный механизм усилен. Он сопровождается существенным изменением самой концепции гравитации. Свойства пространства и времени согласованы и вытекают из свойств тензора энергии-импульса одноуровневой материи. Ни концепция массы, ни концепция силы в этом подходе не раскрыты. Пространство и время, как неоднократно указывал Эйнштейн, образуют в этой модели формы нашего восприятия действительности, которая реально может быть совсем иной. Различие внешних проявлений и внутренней сущности гравитации очевидно и естественно в модели Эйнштейна. Мы рассматриваем нотоны как трансфинитные конструкции, составленные из предзарядов, соединенных между собой рецепторами. Учтем факт их электрической и гравитационной нейтральности в свободном состоянии. Примем точку зрения, что предзаряды и рецепторы могут быть положительными и отрицательными, образуя, соответственно, элементарные составляющие для электрических и гравитационных зарядов. Попытаемся рассмотреть их как различные типовые трансфинитные конструкции из прапраматерии, которую назовем материей $(l-2)-$уровня, тогда как сами предзаряды и рецепторы назовем материей $(l-1)-$ уровня.

Введем модель прапраматерии, полагая, что ее образуют неточечные объекты, которые способны иметь ориентацию и обладают свойствами продольных и поперечных соединений, количество которых может быть разным.

Будем считать, что праматерия образуется из них, формируя конструкции открытого типа при продольном соединении, что соответствует предзарядам нотона и предшествует конструкциям электрического заряда, либо конструкции закрытого типа в форме "контуров" с разной ориентацией, что соответствует рецепторам нотона и предшествует конструкциям гравитационного заряда. Вследствие того, что продольные соединения могут быть дополнены поперечными, электрический заряд способен иметь массовые составляющие, а гравитационный заряд способен иметь электрические составляющие. Возможны и такие конструкции из прапраматерии, которые гравитационно и электрически нейтральны. В модели нотонов предзаряды притягиваются друг к другу электрическими силами, но они отталкиваются друг от друга гравитационными силами, что обеспечивает равновесие системы в целом. Когда же нотоны сталкиваются между собой, становится возможным объединение одинаковых предзарядов, хотя они отталкивают друг друга, если меняется ориентация рецепторов, при которой гравитационные силы становятся силами притяжения между предзарядами. Понятно, что эту качественную картину следует описать хорошей расчетной моделью и подтвердить экспериментально. Очевидно, что внутри нотонов происходит взаимное превращение электрических и гравитационных предзарядов.

На данной стадии появляется возможность построения частицы гравитационного излучения (гравитона), аналогичной «перевернутому» нотону. Расположим в центре μ-нотона элон, а на периферии – пролон. Тогда, следуя модели Томсона, энергия такого объекта будет мала из-за малости размеров центральной части изделия, что способно объяснить «слабость» гравитационного излучения.

Частицу света в форме q- нотона можно считать «перевернутым» μ- нотоном. Заметим дополнительно, что гравитон и нотон могут покоиться и двигаться с разными «равновесными» скоростями.

Исходя из указанных предположений, рассмотрим вариант динамического описания гравитационного взаимодействия между физическими телами. Мы обязаны принять версию, что материя содержит в себе праматерию и движется в ее потоке (некотором аналоге эфира), создавая при взаимодействии с ним потоки тонкой материи, названной праматерией. Тогда в промежутке между телами праматерия будет выталкиваться объединенными потоками прапраматерии, что уменьшает ее влияние между ними.

В итоге получается внешняя сила, которая приближает тела друг к другу, обусловленная давлением праматерии на тела. Другими словами, можно сказать так: прапраматерия расталкивает праматерию между телами, что приводит к эффекту сближения тел.

Реальная модель, как и ее механизм, предполагают изучение множества проблем:

Как праматерия и прапраматерия присоединены к материи, как происходит их взаимное превращение?
Как можно повлиять на реальное взаимодействие, в частности, меняя электрический заряд на гравитационный?
Как реализуется обратное превращение зарядов?

Многоуровневость материи позволяет по-новому подойти к известной информации о поведении объектов. Закон взаимодействия масс допускает новую интерпретацию в модели гравитации, базирующейся на концепции тонкой материи, концентрирующейся за пределами макроскопических тел.

В подходе, предложенном Эйнштейном, гравитация описывается на основе структуры псевдориманова многообразия, свойства которого ассоциированы с тензором энергии-импульса материи. Физика (структурные составляющие, их движение…) скрыта качественно новым способом: без обращения к волновой функции.

И здесь, как и в микротеориях, из рассмотрения выпали как физическое пространство-время, которому принадлежат измерительные приборы, так и процесс, а, равно, и алгоритм измерения. Отсутствуют в модели структурные составляющие гравитации, конструкции, которые «стоят» за ними, нет никакой физической модели гравитационного заряда. Совершенно искажена физическая сущность системы пространств, ассоциированных с физическими конструкциями и их движениями.

Произошло это потому, что не были приняты во внимание важные физические обстоятельства и факты:

1.Есть универсальное (имеющее единые свойства для всех уровней материи) пространство размеров со своими абсолютными и относительными свойствами. Оно имеет свои симметрии, но существуют независимо от них.

2. Есть универсальное (в указанном смысле) пространство скоростей, свойства и стороны которого следует изучать на основе анализа реальных экспериментов. Оно софистатно пространству размеров, но не обязано быть ему идентичным.

3. Есть универсальное пространство ускорений, как-то ассоциированное с пространством размеров и с пространством скоростей.

4. Есть пространство скоростей изменения ускорений….

Эта цепочка, вообще говоря, бесконечна… Не учтена многоуровневость материи, признание которой требует построения трансфинитных моделей физического мира, в том числе и гравитации, как одного из ее свойств. Выпал из рассмотрения вопрос об отрицательных массах, а также о движениях со сверхсветовыми скоростями, а также с очень высокими ускорениями (которые чрезвычайно высоки в задачах изменения параметров электромагнитных частиц света, когда они распространяются в средах с дискретно меняющимся показателем преломления).

Не рассмотрена связь теории гравитации с теорией электромагнитного поля, так как нейтральные частицы света, содержащие в себе предзаряды положительного и отрицательного электрического типа, «требуют» для своей стабильности положительных и отрицательных гравитационных зарядов.

К синтезу макро и микродинамик

С появлением моделей описания микромира пришла новая эра физики. В течение столетия микромир удивляет исследователей качественно новыми сторонами и свойствами. Поведение микрообъектов, как и их структурное описание, существенно отличаются от аналогичных характеристик для объектов макромира. Естественна проблема анализа сходства и различия качественно разных моделей и их предсказаний. Для её решения были предложены различные алгоритмы.

Однако ни физикам, ни математикам пока не удалось установить глубокую связь между макро и микродинамиками, которая позволила бы согласованно развивать оба указанные направления исследований. Кажется, что это вообще невозможно сделать, ведь физические основы, и математические модели для указанных объектов и разделов физики сущностно различны. Так не должно быть согласно концепции трансфинитной реальности.

Принимая идею софистатности различных уровней материи, мы вправе ожидать софистатности моделей для ее описания. Введенная ранее мною концепция трансфинитных (n, k) -Ритов допускает такую возможность, так как Риты математически едины для всех уровней материи. И хотя физически мы имеем дело с материей разных уровней, однако допустимо, что структура и динамика их объектов может быть единой. Мы можем попытаться использовать одни и те же уравнения динамики для разных уровней материи.

Используя обобщенные уравнения динамики вязкой жидкости и выражение для общей четырехметрики, характерной для электродинамики без ограничения скорости, мы можем получить аналог обобщенного уравнения Шредингера. Он ассоциирован с покоящейся тонкой материей, названной праматерией. Легко получить формальные обобщения для случая, когда праматерия движется.

Теперь возможны уравнения микродинамики, учитывающие турбулентные эффекты. Возможен алгоритм обобщения микродинамических моделей на основе известных уравнений динамики для макроскопических объектов: твердых тел, жидкостей, плазмы.

Используя модификацию модели частицы света по Томсону, согласно которой они представляют собой тор, образованный из реальных силовых линий, легко найти переход к матричной механике Гейзенберга.

Согласно новой точке зрения, механика Гейзенберга представляет собой алгоритм описания реальных протяженных объектов системой связанных между собой точечных объектов. Такой подход ранее был предложен Лагранжем при описании динамики струны и применялся, в частности, Релеем в теории звука. Очевидна физическая прагматичность такого подхода. Однако очевидна и его физическая неполнота, так как в его рамках решается только узкий класс реальных задач.

Доказательство неполноты модели микромира по Шрёдингеру, дополненное пониманием неполноты матричной механики Гейзенберга, приводит к новой оценке соответствия между ними. Мы вправе их рассматривать как неполные физические модели. Естественна постановка проблемы: какие модели возможны для описания одних и тех же изделий, одних и тех же явлений, как из анализа уравнений микродинамики для волновой функции получить уравнения, описывающие физические заряды?

Если расчет покажет, какие алгоритмы конструктивны в этом направлении, то по системе микродинамик для волновых функций можно будет «строить» систему моделей для физических зарядов.

Для описания микрообъектов и микроявлений требуются новые модели. В них, следуя практике, реализуется сочетание классических и квантовых свойств физического мира. Микрообъекты могут не образовывать статистический ансамбль. В то же время их может быть достаточно много.

Следует преодолеть непонимание тех возможностей, которые в состоянии «подарить» макрофизика для анализа структуры и свойств микромира и микроявлений.

Обобщение модели микродинамики Шрёдингера

В настоящее время актуальны качественно новые физические модели, пригодные для единого описания явлений в конечных физических системах. В моделях должны быть учтены разнообразные физические факторы: неизотермичность процессов, химические реакции и многое другое. Издавна принято изучать устройство и поведение физического микромира по моделям квантовой теории. Они во многом адекватны проводимым экспериментам и пригодны для конструирования новых технических устройств. По указанным причинам нет необходимости сомневаться в их полезности и прагматичности. Однако никто не отрицает потребности построения новых моделей микромира. Они необходимы для практического создания новых материалов и новых технологий. Исследования в таком направлении предполагают решение первой фундаментальной проблемы физики: как согласовать между собой макроскопическую (классическую) и микроскопическую (квантовую) теории? Речь идет не только о похожести моделей, описывающих физические явления. Важно проанализировать конструкции, которые стоят за ними: исследовать состав и свойства структурных элементов, из которых они образованы. Требуется решить также вторую фундаментальную проблему физики: согласовать микротеорию с теорией относительности. В частности, нужно корректно учесть скорости и ускорения в физических устройствах, а также физические факторы, управляющие ими, что не принято делать в квантовых теориях. Авторство этой проблемы определить сложно, о ней в разной мере говорили разные авторы. Ее решение сложно по ряду причин. Одной из них является факт, что релятивистская и нерелятивистская теории управляются неизоморфными симметриями. В микротеории применяют группу Лоренца, в макротеориях используют группу Галилея. Обусловлено это, в рамках концепции показателя отношения в электродинамике, тем обстоятельством, что в макрофизике большинство измерений не меняют параметры явлений, тогда как в микрофизике измерение способно существенно повлиять на явление. Различны также физические пространства, в которых описываются анализируемые явления. Исходным пунктом построения единой динамики естественно принять проблему, сформулированную Эйнштейном: насколько фундаментальна обычная квантовая теория для всей физики, является ли она базовым или вспомогательным ее элементом? По мнению Балентайна, Гейзенберг создал миф, что Эйнштейн не понял квантовой механики. На самом деле, Эйнштейн считал квантовую механику удовлетворительной теорией. Но она, с его точки зрения, не может быть исходным пунктом всей физики. Однако ни Эйнштейн, ни другие авторы не смогли найти решение поставленной проблемы. Долгое время было непонятно, как к ней подойти. Ведь модели разных разделов физики кажутся не только формально, но и сущностно разными. Существует мнение, что физика макро и микроявлений и конструкций, с ними связанных, различна и в ней мало общего. Отметим также проблему Шрёдингера. Он считал, что атомы, описываемые уравнениями электродинамики Максвелла «снаружи», могут описываться аналогичными уравнениями «внутри». Проблема такова: как согласовать и понять роль и значение скалярной волновой функции квантовой теории с четырехпотенциалами электродинамики? Как учесть в конкретной модели стороны и свойства физических материалов, с которыми проводятся эксперименты?

Каждая модель всегда имеет внешние и внутренние стимулы для развития, свои ростковые точки. В квантовой теории их достаточно много. Одним из вариантов ее развития, который может оказаться полезным для описания микросистем, является гидродинамическая модель микромира. Смысл развиваемого подхода состоит в том, чтобы найти место квантовой модели микромира в структуре уравнений гидродинамики. Если это будет реализовано, появляются варианты сопоставления и развития микро- и макромоделей физической реальности. Новый путь открывает новые возможности для решения проблемы Эйнштейна и проблемы Шрёдингера квантовой теории. В предлагаемом новом подходе, с одной стороны, мы получаем возможность использования моделирования, привычного в макромире, для анализа конструкций и явлений микромира. С другой стороны, ожидаемый анализ в состоянии обнаружить новые черты макромира, проявляющиеся через свойства микромира. Эти обстоятельства могут оказаться полезными при построении единой модели и динамики макро и микромира. Следуя опыту, мы вправе утверждать, что если физические явления аналогичны друг другу, то аналогичны и соответствующие физические конструкции, стоящие за ними. Модельная аналогия в описания макро и микроявлений может рассматриваться как первый шаг в направлении синтеза разных моделей. Модельная аналогия в описании макро и микроконструкций должна стать вторым шагом в направлении искомого синтеза. Нужна конструктивная реализация обоих указанных программ

Новый подход к микромиру

Будем рассматривать физический мир как многоуровневую материальную систему. Назовем физической материей все то, что имеет структуру и активность. Определим уровень физической материи совокупностью его базовых материальных объектов и их взаимодействий. Так, физические макротела состоят из атомов, которые образуют свой уровень материи. Атомы состоят из электронов и нуклонов, которые образуют новый уровень материи. Примем новую точку зрения, что электроны и нуклоны состоят из новых структурных составляющих (из которых состоят и частицы света): из элонов и пролонов. Пусть элоны и пролоны состоят из атонов – предполагаемых новых структурных составляющих, свойства которых требуется детально изучить. Назовем праматерией элоны, пролоны, атоны, все то, что из них образовано, а также то, что им предшествует. Физики давно признали факт и возможность сосуществования материи разных уровней. Разные базовые структурные составляющие используются в физическом эксперименте, анализируются численно и применяются на практике. Практика основана на информации о физических составляющих каждого уровня, их свойствах, а также о согласовании уровней друг с другом.

Сопоставим каждому уровню физического мира «свою физическую материю» в физическом и философском смыслах слова. Пусть для нее выполняются следующие условия:

- микроявления, аналогично макроявлениям, реализуются на основе свойств и движений структурных составляющих своего уровня материи, из них образованы также конструкции исследуемого уровня материи,
- свойства микроконструкций определяются свойствами взаимодействий, которым подчинены их физические составляющие,
- сами составляющие, их движения и взаимодействия могут быть верифицированы физическим экспериментом и расчетом,
- подходы, понятия и выводы, полученные при исследовании конструкций и явлений макромира, имеют свои приложения для конструкций и явлений микромира.

Будем рассматривать теорию физических микрообъектов и микроявлений как звено общей теории физических систем. Будем искать единые физические модели, пригодные для разных уровней физического мира. В основу анализа положим экспериментальную и теоретическую верификацию каждого уровня физического мира, практически подтверждая их материальные стороны и свойства.

Уточним идеологию.

Примем для любой физической системы и любой практики в качестве первого базового элемента физического моделирования факт наличия и сосуществования ассоциированной с практикой человека системы объективно существующих, имеющих структуру физических конструкций, занимающих свой уровень и свое место в реальной действительности – наличие сосуществующих реальных физических объектов. Зададим их свойства величинами.

Первым уровнем реальной практики будем считать теоретическое и экспериментальное отображение через систему величин по возможности полной совокупности сторон и свойств микроконструкций. Примем в качестве второго базового элемента физического моделирования факты взаимодействия реальных конструкций, проявляющие совокупность их свойств и реализующиеся через прикосновения, отношения, реакции и совокупность взаимных движений. Зададим их свойства через систему дифференциальных и кодифференциальных (или интегральных …) операторов. Вторым уровнем реальной практики будем считать построение системы операторов, эффективных для явлений, ассоциированных с данными конструкциями, создание и совершенствование на этой основе полезных технических устройств. Примем в качестве третьего базового элемента физического моделирование конструирование физической модели из пары указанных базовых элементов: величин и операторов. Создание работающих моделей будем считать третьим элементом физического моделирования. Реализуем указанную идеологию при структурном моделировании атомов и молекул, используя концепцию праматерии. Будем исходить из факта, что физические атомы и молекулы являются структурными элементами для образования физических макроскопических тел, они образуют свой уровень материи. Будем считать, что они, в свою очередь, образованы из новых физических, структурных составляющих, которые принадлежат другому уровню материи. Назовем его праматерией.

Задача физической теории сводится к тому, чтобы выразить стороны и свойства атомов и молекул (($l-1$)-уровня материи) через структурные составляющие и свойства системы $(l-k)-$уровней праматерии при $k=2,3,4...$. Модель должна быть такой, чтобы на ее основе можно было выразить как свойства атомов и молекул, так и свойства их составляющих. С одной стороны, атомы и молекулы следует рассматривать как тела, изготовленные из праматерии. С другой стороны, атомы и молекулы находятся в праматерии. По этим причинам требуется система из трех моделей: для самостоятельного описания материи, праматерии, а также для их взаимных влияний.

Предложим теоретическое описание структуры и свойств атомов и молекул на основе структуры и поведения праматерии. Выберем в качестве исходной точки анализа макроскопическую модель вязкой жидкости. Применим ее с уточнениями и дополнениями к праматерии. Будем считать известными плотность праматерии ρ и ее кинематическую вязкость η. Пусть величина σ дополнительно характеризует динамические свойства праматерии. Запишем модель поведения праматерии в форме, которая даёт, как легко показать, обобщенные уравнения гидродинамики вязкой жидкости

$$\partial_i\left(N^{ij}-\frac{\eta}{\sigma}\Phi^{ij}\right)=\partial_i\Psi^{ij}(1)=F^j.$$

Тензор скоростей N^{ij}, тензор напряжений Φ^{ij} и четырехвектор сил F^j выберем из дополнительных предположений, устанавливая вид конкретной модели. Он может меняться, если этого потребуют эмпирические данные.

На начальной стадии нового, структурного анализа микромира в соответствии с идеей физической праматерии, желательно найти подход, который приводит нас к известным результатам. В качестве модели микромира возьмем уравнение Шрёдингера квантовой теории:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{dt}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi.$$

В физическом пространстве выберем величины, характеризующие поведение праматерии:

$$N^{ij}=\rho v^i\otimes v^j=\rho\begin{pmatrix}v^1v^1 & v^1v^2 & v^1v^3 & v^1v^0\\ v^2v^1 & v^2v^2 & v^2v^3 & v^2v^0\\ v^3v^1 & v^3v^2 & v^3v^3 & v^3v^0\\ v^0v^1 & v^0v^2 & v^0v^3 & v^0v^0\end{pmatrix},\Phi^{ij}=g^{ik}\varphi_k^j=\begin{pmatrix}\partial_1 f^1 & \partial_2 f^1 & \partial_3 f^1 & \partial_0 f^1\\ \partial_1 f^2 & \partial_2 f^2 & \partial_3 f^2 & \partial_0 f^2\\ \partial_1 f^3 & \partial_2 f^3 & \partial_3 f^3 & \partial_0 f^3\\ \partial_1 f^0 & \partial_2 f^0 & \partial_3 f^0 & \partial_0 f^0\end{pmatrix}.$$

Здесь v^i – компоненты четырехскорости праматерии, $\delta_{ik}{}^j$ – тензор Кронекера, $f^j=\delta_{ik}{}^j v^i v^k$. Определим четырехсилу, действующую на элемент объема праматерии, выражением

$$F^j=-\Phi\frac{\rho}{\sigma}f^i=-\Phi\frac{\rho}{\sigma}\delta_{ik}{}^j v^i v^k.$$

Величины, характеризующие поведение праматерии, можно задать на основе комбинаторной операции:

$$N^{ij}=\rho I\overset{k}{\times}u^i u^j,\Phi^{ij}=\kappa I\overset{k}{\times}\partial^i u^j.$$

Будем считать, что величина Φ, с одной стороны, характеризует потенциал внешних сил, с другой стороны, учитывает влияние материальных конструкций, находящихся в праматерии. На данной стадии её невозможно задать в общем виде. Реальные задачи конкретны и обязаны соответствовать экспериментальной ситуации. Заметим, что модель микродинамики будет косвенно учитывать свойства конструкций, находящихся в праматерии. Для этого нужно задать форму и поведение этих конструкций через систему начальных и граничных условий. Однако для самих конструкций требуются дополнительные условия и модели. Другими словами, по самой постановке задачи, гидродинамика праматерии способна дать лишь косвенную информацию о поведении материальных конструкций, находящихся в ней. Зададим четырехскорости праматерии, опираясь на результаты, полученные в электродинамике движущихся сред. Выберем в физическом пространстве-времени $T^1\times R^3$ координаты $x^1=x,x^2=y,x^3=z,x^0=ic_g t$.

Воспользуемся тензорами, характеризующими структуру пространства скоростей вида

$$\gamma^{ij}=diag(1,1,1,1),\theta^{ij}=diag(1,1,1,\chi).$$

Пусть скалярная величина $\chi=\dfrac{\det\theta^{ij}}{\det\gamma^{ij}}$ принадлежит полю комплексных чисел. Примем точку зрения, что именно через структуру числовых множеств (алгебраических систем) в физических моделях учитываются как «внешние», так и «внутренние» стороны и свойства микроконструкций и микроявлений. Для четырехмерного интервала и четырехскорости получим

$$d\theta=\frac{ic_g dt}{\sqrt{\chi}}\left(1-\chi\frac{u^2}{c_g{}^2}\right)^{1/2},v^k=\frac{\sqrt{\chi}}{ic_g}\frac{dx^k}{dt}\left(1-\chi\frac{u^2}{c_g{}^2}\right)^{-1/2}.$$

Теперь у нас есть все элементы для начального анализа.

Микродинамика покоящейся праматерии

Покою праматерии соответствуют параметры $u^1 = u^2 = u^3 = 0$. В этом случае $v^0 = \sqrt{\chi}$. Для тензора скоростей, тензора вязких напряжений и силы получим выражения

$$N^{ij} = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^0 v^0 \end{pmatrix}, \Phi^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 (v^0 v^0) & \partial_2 (v^0 v^0) & \partial_3 (v^0 v^0) & \partial_0 (v^0 v^0) \end{pmatrix}, F^j = -\frac{\rho}{\sigma} \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Так как $v^0 v^0 = \chi$, получим

$$\partial_i N^{ij} = -i \frac{\rho}{c_g} \frac{\partial \chi}{\partial t} - i\chi \frac{1}{c_g} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\partial_i \Phi^{ij} = \frac{\eta}{\sigma} \left(\nabla^2 \chi - \frac{1}{c_g^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) + grad \frac{\eta}{\sigma} \cdot grad\chi - \frac{1}{c_g^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\eta}{\sigma} \right) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

$$F^j = -\Phi \frac{\rho}{\sigma} \chi.$$

Введем обозначения

$$\hbar_1(l) = \frac{\sigma}{c_g}, \eta = 0{,}5 \hbar_2{}^2(l).$$

По смыслу физического подхода величины $\hbar_j(l), j = 1{,}2$ характеризуют эмпирические свойства $l-$уровня материи. Они должны выбираться в соответствии с экспериментом и могут быть подчинены дополнительным динамическим уравнениям и ограничениям. Четвертая компонента скорости покоящейся праматерии описывается уравнением

$$i\hbar_1(l) \frac{\partial \chi}{dt} = -\frac{\hbar_2{}^2(l)}{2\rho} \nabla^2 \chi + \Phi(l)\chi + \Pi_1,$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{c_g^2} \frac{\eta}{\sigma} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\rho} grad \frac{\eta}{\sigma} \cdot grad\chi + \frac{\sigma}{\rho} \frac{1}{c_g^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\eta}{\sigma} \right) \frac{\partial \chi}{\partial t} - i \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} \frac{\sigma}{c_g} \chi.$$

Уравнение Шрёдингера для микрообъекта, имеющего массу m, имеет аналогичный вид. Для этого нужно выполнить несколько замен:

- четвертую компоненту скорости χ на волновую функцию ψ,
- величину $\hbar_1(l)$ на постоянную Планка $\hbar$,
- переменную плотность праматерии ρ на постоянную массу частицы m,
- потенциал Φ на потенциал V.
- равенство пары различных и в общем случае переменных эмпирических величин постоянной Планка в форме $\hbar_1(l) = \hbar_2(l) = \hbar(l)$,

- $\Pi_1 = 0$, что ограничивает диапазон динамического изменения величин модели.

Тогда получим уравнение Шрёдингера стандартного вида. Мы обнаружили математическую аналогию в описании динамики покоящейся праматерии, заданной стандартной моделью жидкости, имеющей внутренние напряжения и находящейся в поле сил, с динамикой материального микрообъекта, описываемого волновой функцией. Мы вправе ожидать физической аналогии в поведении праматериальной жидкости и «движении» волновой функции. Материальный объект, расположенный в праматерии, изготовлен из материи или из праматерии и будет влиять на нее. По такому алгоритму в рамках нового подхода задается потенциал для атома материи в модели Шрёдингера. Но в ней отсутствует предположение, что атом находится в жидкости из праматерии. По этой причине было невозможно описывать атом как «живое», активное изделие, имеющее внутреннее устройство и сложный обмен со своим окружением. Аналогично, трудно было сказать что-либо о физических процессах, которые происходят внутри атома. Другая физическая ситуация складывается, если рассматривать материальные объекты, например, атомы и молекулы, как конструкции из праматерии, добавляя условие, что они находятся в праматерии и имеют с ней сложный обмен. В модели движения праматерии материальные объекты следует рассматривать как внешние факторы, влияющие на праматерию. Мы обязаны учитывать это, используя разные средства. Одним из них будет изменение сообразно изучаемым конструкциям потенциала внешних сил вида

$$F^j(l, obj \neq 0) \neq F^j(l, obj = 0).$$

Такой вариант приведет к изменению правой части уравнений микродинамики. Понятно, что стандартный вариант описания материальных объектов, например, атомов вещества, находящихся в праматерии, на основе уравнения Шрёдингера, способен отобразить лишь очень простые ситуации и очень простые случаи. В реальной практике ситуации могут быть очень сложными, что требует использования обобщённой модели микродинамики.

Микродинамика движущейся праматерии

Используем уравнения гидродинамики для праматерии в случае, когда ее скорости ненулевые. Пусть выполняется уравнение неразрывности

$$\partial_1(\rho v^1) + \partial_2(\rho v^2) + \partial_3(\rho v^3) + \partial_0(\rho v^0) = 0.$$

Получим соотношения:

$$\rho v^0 \partial_0 v^0 + \rho(\vec{v}\nabla)v^0 - \frac{\eta}{\sigma}\left(\nabla^2 f^0 + \partial^2{}_0 f^0\right) - gradf^0 \cdot grad\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) - \partial_0 f^0 \cdot \partial_0\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) = F^0,$$

$$\rho v^0 \partial_0 v^1 + \rho(\vec{v}\nabla)v^1 - \frac{\eta}{\sigma}\left(\nabla^2 f^1 + \partial^2{}_0 f^1\right) - gradf^1 \cdot grad\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) - \partial_0 f^1 \cdot \partial_0\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) = F^1,$$

$$\rho v^0 \partial_0 v^2 + \rho(\vec{v}\nabla)v^2 - \frac{\eta}{\sigma}\left(\nabla^2 f^2 + \partial^2{}_0 f^2\right) - gradf^2 \cdot grad\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) - \partial_0 f^2 \cdot \partial_0\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) = F^2,$$

$$\rho v^0 \partial_0 v^3 + \rho(\vec{v}\nabla)v^3 - \frac{\eta}{\sigma}\left(\nabla^2 f^3 + \partial^2{}_0 f^3\right) - gradf^3 \cdot grad\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) - \partial_0 f^3 \cdot \partial_0\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) = F^3.$$

Отметим, что для записи этих уравнений в векторном виде понадобится введение новой математической операции: «выборки» элементов в соответствии с их структурным видом. Если $\vec{v} \neq 0, \dfrac{\eta}{\sigma} = const$, и можно пренебречь релятивистскими добавками, скалярный аналог уравнения Шрёдингера дополнится конвективным слагаемым. Кроме этого, появится векторное уравнение, задающее согласованную динамику для скорости праматерии $\vec{u}$ и вектора квадрата скоростей

$$\vec{Y} = u_x^2\vec{i} + u_y^2\vec{j} + u_z^2\vec{k}:$$

$$i\hbar_1(l)\left(\frac{\partial\chi}{dt} + (\vec{u}\nabla)\chi\right) = -\frac{\hbar_3^{\,2}(l)}{2\rho}\left(\nabla^2\chi - \frac{1}{c_g^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right) + 2\Phi(l)\chi,$$

$$\hbar_1(l)\left(\frac{\partial\vec{u}}{dt} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}\right) = \frac{\hbar_3^{\,2}(l)}{4\rho}\left(\nabla^2\vec{Y} - \frac{1}{c_g^2}\frac{\partial^2\vec{Y}}{\partial t^2}\right)\frac{1}{c_g} - \frac{1}{c_g}\Phi(l)\vec{Y}.$$

В новом подходе сохранена преемственность практики: уравнения Шрёдингера в частном случае получаются из уравнений микродинамики движущейся праматерии. В микродинамике скалярная волновая функция квантовой теории заменяется на обобщенную систему, состоящую из скалярной и векторной функций. В квантовой механике волновая функция не связана с физической структурностью микромира. В обобщенной микродинамике используемые функции обязаны выражать структурные свойства реальной праматерии. Коэффициенты уравнений микродинамики обязаны вычисляться на основе дополнительных уравнений и экспериментальных данных. В экспериментах 2005 годов на релятивистском коллайдере тяжелых ионов RHIC в Брукхейвенской национальной лаборатории сталкивались ядра золота при высоких энергиях порядка 200000 Гэв. Анализ экспериментальных данных показал, что вязкость сильно взаимодействующих кварков и глюонов должна быть очень низкой. Смесь кварков и глюонов при указанных энергиях ведет себя аналогично идеальной жидкости. Складывается впечатление, что при малых энергиях атомы и молекулы ведут себя как физические системы, подчиненные уравнениям микродинамики для покоящейся праматерии. Если же энергии высоки, то важно учитывать конвективные и волновые слагаемые. Следовательно, можно предположить, что уравнения микродинамики получили экспериментальное подтверждение при малых и больших энергиях. Если энергии будут еще больше, возможно, подтвердятся вязкостные и разнообразные силовые слагаемые микродинамики. При относительных скоростях ядер, близких к скорости света, в качестве составляющих ядерной материи выступают кварки и глюоны. Уравнения состояния такой системы основаны на фундаментальном лагранжиане КХД. Однако эта модель пригодна лишь для анализа свойств жестких процессов партон-партонного взаимодействия, идущего на малых расстояниях. Основную часть адронных сечений составляют мягкие процессы, для которых свойственны малые передачи поперечного импульса. Для их описания обычно используются феноменологические теории. Модель релятивистской гидродинамики является одним из вариантов анализа.

Плотность энергии $\varepsilon(x)$, энтропия $s(x)$, давление $p(x)$, температура $T(x)$, четырехскорость $u^{\mu}(x)$ задаются для микроматерии, выступающей в форме кварк-глюонной жидкости. Используются термодинамические тождества

$$\varepsilon + p = Ts, s = \frac{dp}{dT}.$$

В варианте скейлинговой гидродинамики, когда есть одно выделенное направление вдоль оси столкновений, формирование частиц происходит на гиперповерхности $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$. Тогда

$$u^{\mu} = \frac{\{t,0,0,z\}}{\sqrt{t^2 - z^2}}, p = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Расширение жидкости определяется продольным потоком большого числа термальных источников («файерболов»), каждый из которых при $T \geq T_c$ представляет собой квазиидеальный кварк-глюонный газ. Его параметры таковы:

$$\varepsilon_h = \sigma_h T^4, p_h = \frac{1}{3}\sigma_h T^4, s_h = \frac{4}{3}\sigma_h T^3, \sigma_h = \frac{\pi^2}{10}.$$

В случае цилиндрической симметрии профиля течения жидкости профиль скорости в цилиндре переменного эффективного радиуса $R(\tau)$ задается в гидравлическом приближении формулой $u^r = \frac{dR}{d\tau}\left(\frac{r}{R}\right)^n$. Учет «вязкости» кварк-глюонной жидкости дает дополнительные нелинейные члены в уравнения движения. Если рассматривается продольное расширение вязкой кварк-глюонной жидкости, то для энергии получится уравнение вида

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{\varepsilon + p}{\tau} - \frac{\chi}{\tau^2} = 0.$$

Здесь $\chi(\tau) = \frac{4}{3}\eta(\tau) + \varsigma(\tau)$, $\eta(\tau), \varsigma(\tau) -$ поверхностная и объемная вязкости соответственно. Анализ показал, что коэффициенты вязкости могут сильно расти вблизи критической температуры кварк-глюонного фазового перехода.

Если учесть релятивистские добавки, уравнение Шрёдингера получит вид

$$i\hbar_1(l)\left(\frac{\partial \chi}{dt} + (\vec{u}\nabla)\chi\right) = -\frac{\hbar_3{}^2(l)}{2\rho\Gamma^2}\left(\nabla^2(\chi\Gamma^2) - \frac{\partial^2(\chi\Gamma^2)}{c_g^2 \partial t^2}\right) + 2\Phi(l)\chi + +i\hbar_1(l)\chi\left(\frac{\partial \ln \Gamma^2}{dt} + (\vec{u}\nabla)\ln \Gamma^2\right).$$

Микродинамика в форме уравнений гидродинамики существенно усложнится, если учесть зависимость величин $\eta^2, \sigma, \rho, \Phi, c_g$ от координат и времени. Уравнения микромира становятся еще сложнее при учете релятивистских факторов: появляются дополнительные выражения, характеризующие вклад в физическую модель факторов динамики скоростей.

Возможны изменения в четырехметрике, что характерно для других физических явлений, например, для электродинамики. Одно это обстоятельство способно привести к новому качеству моделей микромира. Укажем вариант, подсказанный электродинамикой движущихся сред. Согласно ему, стандартная четырехметрика с интервалом

$$d\theta = \frac{ic_g dt}{\sqrt{\chi}}\left(1-\chi\frac{u^2}{c_g{}^2}\right)^{1/2}$$

при больших значениях скоростей должна быть заменена на величину

$$d\theta = \left(\left(1-\chi\frac{u^2}{c_g{}^2}\right)^{1/2} - \frac{u^2}{c^2}\Phi^{1/2}(1+\Phi)^{1/2}\right)\frac{\varphi}{1-\frac{u^2}{c^2}(1+\Phi)}.$$

Отсюда следует, что в общем случае четырехскорости управляются неримановым пространством скоростей. Этот факт имеет фундаментальное значение для физики в целом. Он позволяет иначе понять смысл и форму используемых нами приближений. Ситуация может быть обобщена на модель искривленного пространства размеров, обусловленную сложными условиями, в которых находятся исследуемые конструкции. Мы принимаем точку зрения, что для конструкций важно пространство размеров, а для движений важно пространство скоростей. Ситуация становится особо сложной, когда оба указанных пространства неримановы. Более того, ниоткуда не следует, что физика ограничивается движениями второго порядка. Ранг движений (и состояний конструкций) может быть более высокий, что приводит к качественно новым явлениям. Для учета указанных обстоятельств, с точки зрения физического моделирования, требуется сделать несколько шагов:

- в исходных уравнениях использовать обобщенные величины,
- заменить частные производные на ковариантные (учитывающие физику конструкций и явлений), в частности задать кривизну и кручение многообразия скоростей,
- выполнить новую компоновку величин и операторов для получения модели.

Каждый из указанных элементов может быть подчинен дополнительным условиям. Например, пространство скоростей может быть подчинено уравнениям Гильберта-Эйнштейна.

Неизотермическая праматерия

Покажем возможность описания микродинамики (поведения праматерии) по аналогии с поведением неизотермической вязкой жидкости. Во-первых, используем новые величины:

$$N^{ij} = \rho\begin{pmatrix} v^1v^1 & v^1v^2 & v^1v^3 & v^1v^0 \\ v^2v^1 & v^2v^2 & v^2v^3 & v^2v^0 \\ v^3v^1 & v^3v^2 & v^3v^3 & v^3v^0 \\ v^0v^1 & v^0v^2 & v^0v^3 & v^0v^0 \end{pmatrix}, \Phi^{ij}(2) = -\frac{\eta^2}{\sigma}\det{}^{1/2}\theta^{ij}\begin{pmatrix} \partial_1 v^1 & \partial_2 v^1 & \partial_3 v^1 & \partial_0 v^1 \\ \partial_1 v^2 & \partial_2 v^2 & \partial_3 v^2 & \partial_0 v^2 \\ \partial_1 v^3 & \partial_2 v^3 & \partial_3 v^3 & \partial_0 v^3 \\ \partial_1 v^0 & \partial_2 v^0 & \partial_3 v^0 & \partial_0 v^0 \end{pmatrix},$$

$$\psi^{ij}(2) = N^{ij} + \Phi^{ij}(2).$$

Во-вторых, зададим дифференциальные операторы $\partial_i, i = 1,2,3,0$ в физическом пространстве-времени $R^3 \times T^1$. В-третьих, рассмотрим модель $\partial_i \psi^{ij}(2) = F^{ij}$. Пусть $\eta^2 = \eta \cdot \eta^*$, η принадлежит полю комплексных чисел. Рассмотрим покоящуюся праматерию. В данном случае

$$\frac{1}{ic_g}\partial_t(\rho\chi) + \partial_1\left[\left(-\frac{\eta^2}{\sigma}\sqrt{\chi}\right)\partial_1\sqrt{\chi}\right] + \partial_2\left[\left(-\frac{\eta^2}{\sigma}\sqrt{\chi}\right)\partial_2\sqrt{\chi}\right] +$$
$$\partial_3\left[\left(-\frac{\eta^2}{\sigma}\sqrt{\chi}\right)\partial_3\sqrt{\chi}\right] + \partial_0\left[\left(-\frac{\eta^2}{\sigma}\sqrt{\chi}\right)\partial_0\sqrt{\chi}\right] = -\Phi\frac{\rho}{\sigma}\chi.$$

Учтем, что

$$\partial_1\left[\left(-\frac{\eta^2}{\sigma}\sqrt{\chi}\right)\partial_1\sqrt{\chi}\right] = -\partial_1\left(\frac{\eta^2}{\sigma}\sqrt{\chi}\right)\partial_1\sqrt{\chi} - \frac{\eta^2}{2\sigma}\partial_1^2\chi..\partial_t(\rho\chi) = \rho\frac{\partial\chi}{\partial t} + \chi\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Отсюда следуют уравнения:

$$i\hbar_1(l)\frac{\partial\chi}{\partial t} = -\hbar_2(l)\frac{1}{2\rho}\nabla^2\chi + \Phi\chi - \frac{\partial\rho}{\partial t}\chi + P,$$
$$P = -\frac{\sigma}{\rho}Q, Q = grad\left(-\frac{\eta^2}{\sigma}\sqrt{\chi}\right)grad\sqrt{\chi} + \partial_0\left(-\frac{\eta^2}{\sigma}\sqrt{\chi}\right)\partial_0\sqrt{\chi}.$$

Если малы градиенты указанных величин и слаба зависимость от времени, мы приходим к уравнениям, аналогичным уравнению Шрёдингера. В этом частном случае получим новые уравнения микродинамики для праматерии:

$$i\hbar_1(l)\left(\frac{\partial\chi}{dt} + (\vec{u}\nabla)\chi\right) = -\frac{\hbar_2{}^2(l)}{2\rho}\left(\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{c_g^2\partial t^2}\right) + \Phi(l)\chi,$$

$$\hbar_1(l)\left(\frac{\partial\vec{u}}{dt} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}\right) = \frac{\hbar_2{}^2(l)}{4\rho}\left(\nabla^2\vec{u} - \frac{1}{c_g^2}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\right)\frac{1}{c_g} - \frac{1}{c_g}\Phi(l)\vec{Y},$$

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k},$$

$$\vec{Y} = u_x^2\vec{i} + u_y^2\vec{j} + u_z^2\vec{k}\ .$$

Примем условие, что величинами

$$\frac{\partial^2\chi}{c_g^2\partial t^2}, \frac{\partial^2\vec{u}}{c_g^2\partial t^2}$$

можно пренебречь из-за большого значения скоростей c_g. Получим модель

$$\frac{\partial \vec{u}}{dt} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = A_1 \nabla^2 \vec{u} + B_1 \vec{Y},$$
$$\frac{\partial \chi}{dt} + (\vec{u}\nabla)\chi = A_2 \nabla^2 \chi + B_2 \chi.$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям движения неизотермической жидкости, в которой комплексная температура χ играет роль пассивной примеси. Другие варианты движения праматерии будут аналогичны некоторым моделям движения макроскопической жидкости, состоящей из атомов и молекул.

При решении конкретных задач по данной модели нужно эмпирически определить коэффициенты, входящие в указанные уравнения. Требуется корректно задать начальные и граничные условия, а также дополнительные физические обстоятельства. Они могут быть, в частности, учтены модификацией выражений для сил, а также изменением используемых коэффициентов в уравнениях. Заметим, что, используя уравнения Рейнольдса для турбулентных течений мы приходим к турбулентной микродинамике.

Новые ответы на вопросы квантовой теории

У нас есть новое решение первой фундаментальной проблемы физики: в новой модели микроявлений реализуется естественное согласование макро и микрофизики. Оно основано на едином механическом описании разных уровней физической материи. Естественно различие в них коэффициентов уравнений и «волновых функций». Оно обусловленное тем обстоятельством, что уровневая материя может иметь разные свойства и находиться в разных условиях. Никакой непреодолимой грани и принципиального различия между материей и праматерией, например, ассоциированного со свойствами структурных составляющих для новых материалов, в развиваемом подходе нет. Поскольку реальные макро жидкости структурны, они состоят из атомов и молекул, появляется потребность анализа структурных элементов микро жидкости, а также её «атомов» и «молекул». Из анализа коэффициентов, входящих в динамические уравнения, можно получить следствие, что они выражают энергию одномерных физических изделий. Поэтому естественна мысль, что глубинную основу праматерии, с физической точки зрения, образуют «струны». Их свойства и возможности следует изучать отдельно. Мы получили новое решение второй фундаментальной проблемы физики: микродинамика записана в тензорном виде, что гарантирует ее согласование с требованием общей ковариантности, следующим из теории относительности. В модели учтены скорости, что соответствует физическому содержанию теории относительности. Кажущийся ранее непреодолимый «отрыв» квантовой механики от теории относительности, согласно развиваемому подходу, был обусловлен тем, что проводился анализ неполной модели. Мы получили решение проблемы Эйнштейна в квантовой теории: уравнения Шрёдингера, используемые на начальной стадии развития квантовой микродинамики применительно к теории атомов, образуют лишь отдельный элемент общей модели. По этой причине они не могут считаться фундаментальными и исходными для всей физики. На их роль претендуют дифференциальные уравнения для тензоров скоростей и напряжений, задаваемых для материи разных физических уровней. Их математическое единство задает стимул для анализа физического единства материальной реальности.

Общая ковариантность в физике базируется на концепции группы. Поскольку симметрия процессов, как показано в электродинамике без ограничения скорости, выходит за пределы группы и задает систему новых свойств, общая ковариантность должна быть углублена до уровня трансфинитной ковариантности. Под трансфинитной ковариантностью будем понимать трансфинитный учет в модели всех сторон и граней любых симметрий, характеризующих явление. Симметрии не обязаны образовывать группу. Более того, независимость явления от выбора систем координат должна быть согласована с зависимостью явления от условий измерения, от системы отсчета. При таком подходе мера полноты и содержательности теории и практики зависит от того, какова мера их трансфинитности. Трансфинитная модель полна лишь тогда, когда в ней учтены все аспекты и грани трансфинитной реальности. Мы получили решение проблемы Шрёдингера в квантовой теории: полная система уравнений микродинамики не сводится к динамике скалярной функции. В полной модели необходимо использовать векторное уравнение, ассоциированное со скоростями. Новая микротеория «похожа» на электродинамику. Однако она является более общей моделью, потому что содержит конвективные слагаемые, которых нет в электродинамике. Она базируется на своем «четырехпотенциале». Так и должно быть, ведь в обсуждаемых моделях используются разные «волновые функции». Модель инициирует активность физиков. Физикам нужно найти аналог «неизотермичности» для микродинамики и корректно учесть все другие физические факторы и обстоятельства. Требуется учесть «турбулентность» в микромире, разную для разных уровней материи. В модели заложена структура «турбулентности» для микромира: исходные уравнения содержат квадраты скоростей праматерии, допуская и предполагая фундаментальную и «ненулевую» турбулентность уровневого микромира. В частности, следует изучить все аспекты турбулентности праматерии при изготовлении новых материалов. Нужна кинетическая теория праматерии, а также материи разных физических уровней, анализ их термодинамических свойств. Требуется решить проблему создания статистической теории для материи разных уровней.

Требуется создать гидродинамическую модель Солнца.

Модель инициирует активность математиков. Требуется найти общий математический алгоритм описания и согласования свойств и динамик материи разных уровней. Для этого, очевидно, понадобятся новые алгебры, топологии, геометрии. Представляет интерес задача изучения симметрийных аспектов физических моделей, описывающих материю разных уровней. Требуется разработать новый математический аппарат, который позволит корректно решать проблемы структурирования материи разных уровней для физической практики. Новая модель микроявлений специфична. В ней отсутствует привычная для квантовой теории линейная суперпозиция решений. Система более сложна, в ней есть ряд физических коэффициентов, которые пока неизвестны. Анализ необходимо проводить в разных числовых системах. Компоненты векторной и скалярной волновых функций должны быть согласованы между собой.

К системе микродинамик

Доказательство факта, что микродинамика является следствием уравнений гидродинамики, позволяет надеяться на получение обобщений микродинамики, ассоциированных с гидродинамикой и её обобщениями. Ранее мы установили, что волновая функция квантовой механики аналогична комплексной температуре в механике жидкости. Известно, что температура выражает энергию системы, задает меру кинетической энергии жидкости в системе координат, движущейся с локальной скоростью жидкости.

А. Турбулентная микродинамика

Рассмотрим уравнения Рейнольдса для жидкости. Они имеют вид

$$\partial_t U^i + U^j \partial_j U^i = -\frac{1}{\rho}\theta^{ij}\partial_j P + \nu \partial_{jj}{}^2 U^i - \partial_j \left\langle v^j v^i \right\rangle + F^i .$$

Фигурными скобками отмечены пульсационные составляющие скорости. Используя эти уравнения, мы получаем уравнения турбулентной микродинамики.

Б. Кинетическая микродинамика

Мы вправе использовать методы кинетической теории для расчета микропроцессов. Пусть, например,

$$\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\nabla\vec{u} - \nabla\vec{J}_2,$$

$$\vec{J}_2 = \sum^N{}_{i=1}\left(\frac{\vec{p}_i\vec{p}_i}{m} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \vec{r}^{\,i}}\vec{r}^{\,ij}\right)\delta\left(\vec{r}^{\,i} - \vec{R}\right).$$

В этом варианте микроскопические процессы будут выражаться через интегралы столкновений для частиц, образующих тонкую материю.

В. Световая микродинамика

Будем исходить из системы уравнений для четырехпотенциалов A_k, полагая, что их можно выразить через «тензор напряжений» и четырехскорости тонкой материи в виде $A_k = \sigma_{kn} v^n$. Тогда электродинамика будет представлена в форме гидродинамики без конвективных членов. Этот вариант естественен, так как масса покоя для частиц света равна нулю. Поэтому плотность массы следует считать нулевой. Переход к покоящейся праматерии нелинейные уравнения типа Шрёдингера для частицы света.

Г. Новые возможности моделирования

При описании связи между макро и микродинамиками мы исходили из обобщенных уравнений механики вязкой жидкости. Алгоритм вывода базируется на уравнениях

$$\partial_i \Pi^{ij} = F^j,\ \Pi^{ij} = \alpha p \delta^{ij} + \beta u^i u^j + \gamma \theta^{ik}\partial_k u^j .$$

Из них выводится обобщенное уравнение Шрёдингера. Если расширить систему уравнений для жидкости, мы придём к новому обобщению микродинамики.

Возможен такой вариант:

$$\Pi^{ij} = \alpha p \delta^{ij} + \beta u^i u^j + \gamma \theta^{ik} \partial_k u^j + \delta u^i u^l \partial_l u^j + ...$$

Заметим, что теория гравитации и теория электромагнетизма могут рассматриваться в качестве подразделов модели обобщенной механики вязкой жидкости. Если удастся показать, что в аналогичной форме могут быть представлены уравнения для слабых и сильных взаимодействий, физика элементарных частиц становится близкой к механике сплошных сред. Такая возможность реальна при представлении указанных моделей через четырехпотенциалы. Выражая систему четырёхпотенциалов через тензор напряжений и четырехскорость тонкой материи, мы приходим к аналогу механической модели, приняв соотношение $A_k^\alpha = \sigma^\alpha{}_{kp} u^p$. В этой модели требуется учесть реальные свойства тонкой материи, понять и экспериментально подтвердить которые достаточно сложно. Наличие нескольких четырехпотенциалов можно интерпретировать как «смешение» разных «жидкостей». Понять такую ситуацию несложно, если в Природе существуют качественно иные предзаряды. Они могут быть аналогичны предзарядам, которые используются в моделях электромагнетизма и гравитации. Это позволяет структурировать новые предзаряды из предзарядов теории электромагнетизма и гравитации. Например, это могут быть пары и тройки предзарядов, в частности, структурированные в кодоны. Кроме этого, следует принять во внимание возможность построения изделий, аналогичных молекулам ДНК. Возможны также структурные *образования, индуцированные неассоциативной операцией.* Создание начальной модели частиц света позволило принять гипотезу о наличии тонкой материи, базовые элементы которой имеют размеры порядка 10^{-25} м. Из них образуются 4 предзаряда: пара положительных и отрицательных электрических предзарядов, а также пара положительных и отрицательных гравитационных предзарядов. Эти предзаряды способны образовать систему новых объектов, которые можно на этой начальной стадии анализа предварительно охарактеризовать комбинаторно. Их количество комбинаторно задается формулой

$$N = C_4^{16} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1820.$$

Заметим, что в микромире экспериментально доказано существование самостоятельных объектов типа «кодонов». Так, рассмотрим четвёрку предзарядов $+q, -q, +\mu, -\mu \Rightarrow c, d, u, .s.$ Мы вправе скомпоновать всевозможные тройки:

$$ccc, ccd, ccu, ccs, cdu, cds, cus...$$

Согласно принципу софистатности, они выступают в роли объектов элементарного мира на субъядерном уровне. Возможны, в частности, объекты типа $(c,d),(u,s)$. Частицы в форме полимерных молекул из указанных слагаемых могут образовывать нейтрино. Объекты типа

$$(d,u),(c,u)$$

можно рассматривать как базовые элементы для электронов и позитронов. Уже на этом уровне мы обнаруживаем многообразие возможностей для элементарного мира, равно как и их продолжений на большее число слагаемых. Заметим, что введение *комбинаторных операций* превращает этот комбинаторный мир и райский «уголок конструктора», который позволяет создавать новые изделия и их свойства.

Обобщение матричной механики Гейзенберга

Матричная механика Гейзенберга, по его замыслу, была призвана заменить собой классическую механику с целью «постигнуть тайнопись атомных спектров». К этому времени «идеи Бора о наличии стационарных энергетических состояний получили прямое экспериментальное подтверждение в опытах Франка и Герца. Исследуя возбуждение спектральных линий атомов при облучении их электронами, Франк и Герц обнаружили, что переход энергии от электрона к атомам происходит лишь дискретными порциями, зависящими от природы атома. Возбужденный атом излучал затем световой квант энергии $\hbar\omega$, равный потерянной электронами энергии. Это был первый прямой метод измерения постоянной Планка».

Подход Гейзенберга базировался на нескольких гипотезах:

а) уравнения движения классической механики справедливы и в атомной физике, но координатам q следует придавать иной смысл,

б) классические координаты должны быть заменены системой матричных элементов, которые следует рассматривать как ненаблюдаемые величины, образующие «леса» физической модели,

в) в теории должны фигурировать только наблюдаемые оптические частоты, а «всякое упоминание о ненаблюдаемых механических частотах» должно отсутствовать.

В соответствии с такой идеологией микроскопические системы описывались математически, опираясь на некую макроскопическую физическую систему, однако микросистеме не приписывались ни механические движения, ни механическая структура. Модель Гейзенберга не претендовала на полное физическое объяснение происходящих явлений. В ней не предлагалась структурная, механическая интерпретация элементарных частиц, в частности, электронов или частиц света. Задача состояла в том, чтобы корректно описать экспериментальные факты.

Анализ световых явлений в электродинамике без ограничения скорости показал, что «за» явлениями «стоит» структурная, механическая модель частиц света. Изучая явления, мы в состоянии кое-что сказать об этих изделиях. С этой точки зрения проанализируем модель Гейзенберга.

Дополним его математический подход структурным, механическим содержанием. «Согласно замеченному Ритцем эмпирическому правилу, оптические частоты ω_{nm} выражались с помощью ряда «термов» $T_1, T_2, T_3, \ldots$ согласно формуле $\omega_{nm} = T_n - T_m$. Отсюда следует комбинационный принцип для частот:

$$\omega_{nk} + \omega_{kn} = \omega_{nm}.$$

Таким образом, оптические частоты содержали не один, а два «говорящих» индекса, и спектроскописты обычно располагали результаты своих измерений в виде квадратной таблицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & . \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} & . \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Представим в матричном виде совокупность амплитуд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Указанная пара задает элементы Гейзенберга в виде совокупности $\{a_{nm}\exp(i\omega_{nm}t)\}, n \geq 0, m \leq N^*$, применяемой для расчетов.

Произведение разных элементов должно давать элемент из этой же совокупности. Поэтому получим, используя правило Ритца, такой результат:

$$\{a_{nm}\exp(i\omega_{nm}t)\}\{b_{kl}\exp(i\omega_{kl}t)\} = \{\{a_{nm}b_{kl}\exp(i(\omega_{nm}+\omega_{kl})t)\}\} \to (m=k) = \{a_{nk}b_{kl}\exp(i\omega_{nl})t\}.$$

Правило дифференцирования

$$\frac{d}{dt}A = \dot{A} = \frac{d}{dt}\{a_{nm}\exp(i\omega_{nm}t)\} = i\omega_{nm}a_{nm}\exp(i\omega_{nm}t),$$

согласуется с условием Бора

$$\omega_{nm} = \frac{1}{\hbar}(E_n - E_m).$$

Задавая матрицу энергий $E_{\alpha\beta}$ диагональными элементами, получим в матричном виде

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar}(EA - AE).$$

Пусть полная энергия реальной физической частицы, представленной в форме материальной точки, есть

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q).$$

Тогда получим

$$\dot{q} = \frac{1}{\hbar}(Eq - qE) = \frac{im}{2\hbar}\left(\dot{q}^2 q - q\dot{q}^2\right) = \frac{im}{2\hbar}\left[\dot{q}(\dot{q}q - q\dot{q}) + (\dot{q}q - q\dot{q})\dot{q}\right].$$

Подставляя $p = mq,$ получим соотношение Борна

$$qp - pq = i\hbar I.$$

Таковы общеизвестные черты матричной механики Гейзенберга. Они получили теперь новую интерпретацию. Математическая интерпретация явлений дополнена физическими аргументами в пользу структурных свойств микромира. В таком варианте появляются возможности анализа микромира на основе моделей и явлений макромира.

Модель электромагнитного излучения и частиц света по Томсону

Напомним модель излучения света атомом, предложенную Томсоном Д. «Позвольте мне сказать несколько слов о линиях электрической силы. Я полагаю, что они представляют из себя не только геометрические фикции, но что они, или, вернее, группы их, образующие силовые трубки, оканчивающиеся на электроне, суть физические реальности и что энергия в электрическом поле связывается этими трубками». «Мысленная картина, которую я рисую о свете, испускаемом атомом или молекулой, такова, что она состоит из линий электрической силы. Расположение составляющих. в кванте…представляет собой «якорное кольцо», образованное замкнутыми линиями электрической силы, это кольцо движется вперед под прямым углом к своей плоскости со скоростью света». «Теперь мы переходим к рассмотрению того способа, по которому кольцо может образоваться. Рассмотрим, что произойдет с трубкой, соединяющей электрон E с положительным зарядом P, если дернуть внезапно любой из концов. Трубка придет в сильное движение и может, как веревочка для прыганья быть брошена в виде петли, так что часть трубки в петле, образующей замкнутую кривую, разорвется. Согласно взгляду, который я излагаю, кольцо, отделенное таким образом, есть кванта света, энергия, которую она несет, есть часть энергии, которая была первоначально в молекуле, упакованная в форме, удобной для перевозки».

Заметим, что Томсон предлагает структурную модель частиц света. Согласно развиваемому подходу, частицы счета макроскопичны на уровне атомов и молекул, но микроскопичны на уровне тонкой материи.

Согласование подходов к излучению Гейзенберга и Томсона

Покажем, что возможно согласование подходов к излучению света, развитых Гейзенбергом и Томсоном. Оно инициирует построение механической модели частиц света. Уточним идею Томсона. Примем предположение, что «линии электрической силы» идеально соответствуют структуре частиц света. Будем рассматривать силовую линию как систему строительных блоков, необходимых для образования частицы света. Согласно механической модели частиц света, они представляют собой систему плоских «дисков», соединенных между собой. Каждый «диск» имеет центральную часть и периферию. В центральной части расположен пролон – гравитационно нейтральный объект. На периферии движется элон – электрически нейтральный объект. Частота обращения ω_0 элона вокруг пролона характеризует энергетические свойства «диска». Следуя концепции Рит-представления физических изделий, сконструируем электрическую силовую линию, согласовав ее с механической моделью частиц света. Заменим «диски» частиц света 0-Ритами -- «точками». Соединим их в форме линейной молекулы. Представим связи «дисков» парой 1-Ритов -- «отрезков».

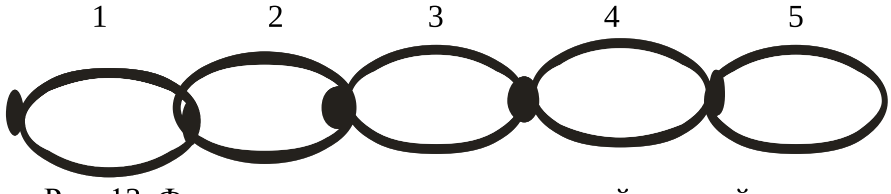


Рис. 13. Физическая модель электрической силовой линии.

В таком представлении электрической силовой линии 0-Риты связаны друг с другом посредством 1-Ритов. Следуя методу графов в теории симметрии, выразим их отношения друг к другу матрицей.

Примем предположение, что между собой согласованы только близкие 0-Риты. Пусть каждый 0-Рит относится к другому так же, как другой относится к нему. Согласно сделанным предположениям, матрица отношений для 0-Ритов получит вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & . \\ a & 0 & b & 0 & . \\ 0 & b & 0 & c & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

С одной стороны, она математически выражает симметрийные свойства изделия, представленного рис.13. С другой стороны, она становится «ловушкой» для физических параметров этого изделия. Наполним ее физическим содержанием. Примем в качестве средств заполнения матрицы отношений координаты q_{nm} и импульсы p_{nm} изделия. Для координат, представляющих базовые блоки электрической силовой линии, введем матрицу

$$q = \begin{pmatrix} 0 & q_{01} & 0 & 0 & . \\ q_{10} & 0 & q_{12} & 0 & . \\ 0 & q_{21} & 0 & q_{23} & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Матрица импульсов $(p = m\dot{q}) \to (p_{nm} = im\omega_{nm}q_{nm})$ примет вид

$$p = im\begin{pmatrix} 0 & \omega_{01}q_{01} & 0 & 0 & . \\ \omega_{10}q_{10} & 0 & \omega_{12}q_{12} & 0 & . \\ 0 & \omega_{21}q_{21} & 0 & \omega_{23}q_{23} & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Мы реализовали вложение электрической силовой линии в симметрийную математическую конструкцию. Воспользуемся этими данными, следуя подходу Гейзенберга, для модельного решения проблемы излучения света атомом.

Геометрическая модель структурной электрической силовой линии

Остановимся на примере гармонического осциллятора. Его энергия имеет вид

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2.$$

Согласно механике Гейзенберга, классические уравнения движения осциллятора

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

следует заменить на матричные уравнения вида $\ddot{q}_{nm} + \omega_0^2 q_{nm} = 0.$ Поскольку $q_{nm} = q_{nm}^{(0)} \exp(i\omega_{nm} t),$ получим $(\omega_0^2 - \omega_{nm}^2)q_{nm} = 0$. Тогда все элементы q_{nm}, исключая те, для которых $\omega_{nm} = \pm\omega_0$, равны нулю. Используя возможность произвола в нумерации, примем в качестве ненулевых матричные элементы, соответствующие переходам между соседними квантовыми состояниями. Математически это означает, что

$$
\begin{aligned}
q_{nm} &= 0 \to m \neq n \pm 1, \\
q_{nm} &\neq 0 \to m = n + 1.
\end{aligned}
$$

Полученная матрица q совпадет с указанной выше. Пусть $\omega_{n,n+1} = +\omega_0, \omega_{n,n-1} = -\omega_0$. Матрица для импульсов p будет изменена с учетом условия, принятого для частот. Получим

$$
p = im\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & q_{01} & 0 & 0 & . \\ -q_{10} & 0 & q_{12} & 0 & . \\ 0 & -q_{21} & 0 & q_{23} & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.
$$

Найдем квадраты величин:

$$
q^2 = \begin{pmatrix} q_{01}q_{10} & 0 & q_{01}q_{12} & 0 & . \\ 0 & q_{01}q_{10} + q_{12}q_{21} & 0 & q_{21}q_{23} & . \\ q_{21}q_{10} & 0 & q_{21}q_{12} + q_{32}q_{23} & 0 & . \\ . & . & 0 & . & . \end{pmatrix},
$$

$$
p^2 = -m\omega_0^2 \begin{pmatrix} -q_{01}q_{10} & 0 & q_{01}q_{12} & 0 & . \\ 0 & -q_{01}q_{10} - q_{12}q_{21} & 0 & q_{21}q_{23} & . \\ q_{21}q_{10} & 0 & -q_{21}q_{12} - q_{32}q_{23} & 0 & . \\ . & . & 0 & . & . \end{pmatrix}.
$$

Вычислим матрицу энергии осциллятора согласно формуле

$$
E = \frac{1}{2}\left(p^2 + m^2\omega_0^2 q^2\right).
$$

Получим

$$
E = m\omega_0^2 \begin{pmatrix} q_{01}q_{10} & 0 & 0 & . \\ 0 & q_{01}q_{10} + q_{12}q_{21} & 0 & . \\ 0 & 0 & q_{12}q_{21} + q_{23}q_{32} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}.
$$

Матрица энергии диагональна. Найдем ее явный вид. Используем правило коммутации операторов координат и импульсов. Вычислим разность

$$qp - pq = 2im\omega_0 \begin{pmatrix} q_{01}q_{10} & 0 & 0 & . \\ 0 & -q_{01}q_{10} + q_{12}q_{21} & 0 & . \\ 0 & 0 & -q_{12}q_{21} + q_{23}q_{32} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} = i\bar{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 1 & 0 & . \\ 0 & 0 & 1 & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Получим систему уравнений

$$q_{12}q_{21} - q_{01}q_{10} = \frac{\hbar}{2m\omega_0},$$

$$q_{01}q_{10} = \frac{\hbar}{2m\omega_0},\; q_{23}q_{32} - q_{12}q_{21} = \frac{\hbar}{2m\omega_0},$$

....

Ее решение

$$q_{n,n+1}q_{n+1,n} = (n+1)\frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

подставим в матрицу энергий. Общее выражение для диагональных членов матрицы

$$E_{nn} = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$n = 0,1,2,...$$

задает эквидистантный спектр энергий. Система имеет низшее состояние при $n = 0$, равное половине энергии кванта.

Геометрические свойства частиц света

При анализе энергетических свойств частиц света приходится рассматривать возможность дискретного изменения постоянной Планка. Действительно, приняв модель в форме линейной молекулы, мы можем приписать каждому блоку одинаковую частоту. Полная же энергия есть сумма энергий отдельных блоков. Поэтому постоянная Планка, отнесенная к отдельному блоку, будет делиться на число блоков. Рассматривая частицу света в форме элемента силовой линии, мы сталкиваемся с аналогичной ситуацией. В атоме силовая линия состоит из блоков, каждый из которых, согласно модели Гейзенберга, имеет энергию

$$E = \alpha\frac{e_*^2}{c_*}\omega_0 = \hbar\omega_0.$$

Здесь e_*- электрический заряд у элона, c_* – скорость, с которой вращается элон вокруг пролона. При соединении вместе N блоков энергия будет равна выражению

$$E = N\hbar\omega_0 = \hbar(N\omega_0).$$

Другими словами, частота света увеличится в N раз. Но тогда, следуя модели, ассоциированной с подходом Томсона, скорость вращения элона вокруг пролона станет также больше в N раз. Заряд элона, согласно опытным данным, от скорости не зависит. Поэтому в N раз уменьшится постоянная Планка, отнесенная к отдельному блоку частицы света. Энергия запишется формулой

$$E = N\left(\alpha \frac{e_*^2}{Nc_*}\right)(N\omega_0) = \hbar\omega.$$

Увеличивается частота, параллельно уменьшается постоянная Планка, но дополнительно сказывается число блоков, входящих в состав частицы света. Формальное выполнение закона сохранения энергии, состоящее в том, что сумма энергий начальных блоков равна сумме энергий конечных блоков, не раскрывает сущности изменений в частице света. Ведь изменение постоянной Планка обусловлено физическими факторами, которые в законе сохранения энергии представлены в скрытой форме. Для того, чтобы понять происходящие процессы, следует принять предположения о законе изменения скорости элонов вокруг пролонов в случае, когда силовая линия «освобождается» от связи с атомом. Если принять, что

$$\frac{dV}{dN} = c_*,$$

получим закон $V = c_* N$. Закон этот носит формальный характер, так как число блоков дискретно. Однако применение этого приема эффективно при расчете размеров частицы света и других ее параметров. Поэтому его можно применить для анализа скоростей. Соответствие между физическим изделием в форме «полимерной молекулы» и матричной механикой осциллятора влечет за собой ряд следствий:

- частицы света как «полимерные молекулы», а эта модель выдвинулась на первый план, можно описывать методами матричной механики, применяя к ним, в частности, модели осцилляторов,
- 1-Риты могут рассматриваться на своем уровне материи как «полимерные молекулы», подчиненные матричной механике,
- формализм матричной механики выступает в таком представлении как общий метод описания конечных физических изделий,
- если у изучаемого конечного физического изделия есть много свойств, они должны быть приведены в форму согласованной системы матричных уравнений,
- соединение наглядности с глубокой абстрактной реализацией позволяет правильно учесть и применить на практике новые возможности моделирования,
- соединение классических моделей с матричным методом описания конечных физических систем способно дать качественно новые предсказания, доступные широкому кругу потребителей.

К новым моделям матричных динамик

В познании реальности человечество прошло сложный путь. Динамика физических тел почти всегда выступала в роли центральной проблемы познания. Обусловлено это, во-первых, тем обстоятельством, что физическая реальность выступает в форме системы тел. С другой стороны, любые измерения проводятся устройствами, которые представляют собой систему функционирующих механических тел. В-третьих, в реальной практике используются самые разнообразные устройства. С утверждением волновой интерпретации в механике микромира концепция механических физических тел потеряла свое лидирующее положение в познании. Это место было занято концепцией поля, структурность которого никак не сводилась к механической структуре и движению некоторых базовых составляющих. Наиболее «прочной» казалась эта позиция для света. Она со всех сторон была обоснована теорией относительности. В геометрической теории гравитации Эйнштейна отсутствуют физические носители гравитационного взаимодействия в форме реальных физических объектов. И свету, и гравитации на длительное время был придан статус бесструктурных сущностей, механические модели для которых непригодны, равно как и попытки построения их базовых физических составляющих. Ситуация несколько изменилось с созданием классической электродинамики без ограничения скорости. Стало ясно, что релятивистские эксперименты можно описать, оставаясь в рамках макроскопического пространства и времени. Пространство Минковского получило статус пространства скоростей, подтвердив правильность подхода и интерпретации Зоммерфельда. Запись уравнений Максвелла в спинорной форме инициировала поиски базовых физических изделий, отношения между которыми выражаются парой кватернионов, принадлежащих группе заполнения $PSL(4,R)$. Следуя методам графического представления симметрий, в этом случае речь может идти о четверке объектов. Принимая концепцию света в форме системы реальных физических частиц, мы должны учесть их эмпирические свойства. Эксперименты показали, что частицы света являются нейтральными изделиями, как по электрическому, так и по гравитационному зарядам. Тогда логически ясно, что четверка объектов для частиц света образована двумя парами объектов. Одна пара задает положительные и отрицательные электрические предзаряды. Вторая пара задает положительные и отрицательные гравитационные предзаряды. Термин предзаряд появляется потому, что его следует считать строительным материалом для соответствующих зарядов. Развитие данной модели должно быть согласовано с алгоритмами расчета микросистем. Анализ показал, что достичь его возможно как в подходе Шредингера, так и в подходе Гейзенберга. В связи с этим результатом возникла проблема углубления динамик с учетом полной совокупности ожидаемых сторон и свойств реальности. Некоторым нетривиальным импульсом для новой деятельности явилось построение гравидинамики на основе тройки антикватернионов, принадлежащих группе заполнения $PSL(4,R)$. Антикватернионы подчинены антикоммутативной алгебре. Кватернионы подчинены коммутативной алгебре. Возникла идея, что возможно семейство динамик, качественно отличающихся друг от друга. Правильно было бы первоначально обосновать все семейство динамик, используя обобщение подхода, принятого в классической механике макротел. Переход к микродинамике можно выполнить после прохождения этого первого этапа.

Концепция трансфинитной физической материи и её Рит-представления дают философское и логическое обоснования для поиска единой модели любых изделий, справедливой для всех уровней материи. Для этого требуется совершенная модель изделий для одного уровня материи, а также разные алгоритмы ее проектирования на другие уровни материи. Ограничим себя рассмотрением одного уровня материи. Примем за основу анализа подход Лагранжа и Гамильтона к механике материальных тел, подверженных действию сил. Будем рассматривать функции, зависящие от времени t, координат q_i, импульсов p_i. Действие $S(t, q_i, p_i)$ по Лагранжу выразим через функцию Гамильтона $H(q_i, p_i) = T - U$ и через его характеристическую функцию $F(q_i)$ выражением вида

$$S = -Ht + F.$$

Дифференцируя действие Лагранжа по времени, получим

$$H + t\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t}\right) + \frac{\partial S(t, q_i)}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{\partial S(t, q_i)}{\partial t} + H = 0, \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t}\right) = 0.$$

Так выражена фундаментальная идея Гамильтона о независимости физических законов от хода времени. При выводе уравнений использовано равенство вида

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}.$$

Так как по определению имеем

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i},$$

и простые преобразования дают стандартные уравнения динамики материальных тел в форме Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Эти выражения можно получить упрощенным способом, требуя при независимости гамильтониана от времени обращения в ноль производной по времени. Действительно, они возможны, если

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i = 0.$$

Изменение физической величины A по времени задается выражением

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial A}{\partial p_i} = \frac{\partial A}{\partial t} + \left[\hat{A}(q_i, p_i), \hat{H}(q_i, p_i)\right]$$

Так записывается в общем виде динамика физических величин с использованием скобки Пуассона. Всякое обобщение динамики может стартовать с этого выражения. Известно, что динамика микромира была приведена к аналогичному виду в матричной модели Гейзенберга. В ней для величины A и гамильтониана H, заданных в виде бесконечномерных матриц, было постулировано уравнение вида

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar}\left(HA - AH\right).$$

Выполним обобщение динамики материальных тел, следуя указанному алгоритму. На первом этапе учтем «подсказку», следующую из анализа структуры группы $PSL(4,R)$. Она состоит в том, что динамика, базирующаяся на антикоммутативной алгебре, должна быть дополнена динамикой, базирующейся на коммутативной алгебре. Для нее будут справедливы выражения вида

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Они следуют из выражения

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i = 0.$$

Соответственно следует ожидать изменения закона динамики для величин в форме

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar}\left(HA + AH\right).$$

Физическая аргументация для таких изменений недостаточно ясна. Частично она следует из экспериментального различия в поведении одинаковых электрических и гравитационных зарядов. Примем вариант многоуровневого изменения математических операций, используемых в физической модели. На первом этапе учтем различие в поведении одинаковых электрических и одинаковых гравитационных зарядов. Поскольку одинаковые электрические заряды отталкиваются, взаимодействие способно в отсутствие других факторов увеличить расстояние R между ними. Другими словами $\sigma(e) = \frac{dR}{dt} \geq 0$. Поставим такой ситуации в соответствие каноническую величину отношений по электрическому взаимодействию $\sigma(e) = 1$. Поскольку одинаковые гравитационные заряды притягиваются, взаимодействие способно в отсутствие других факторов уменьшить расстояние R между ними. Другими словами $\sigma(m) = \frac{dR}{dt} \leq 0$. Поставим такой ситуации в соответствие каноническую величину отношений по гравитационному взаимодействию

$$\sigma(m) = -1.$$

На втором этапе примем во внимание обстоятельство, что механические движения имеют разный ранг p. Он определен нами ранее степенью производных по времени:

$$q \to 0, \dot{q} \to 1, \ddot{q} \to 2, \dddot{q} \to 3...$$

На третьем этапе введем обобщенные дифференцирования:

$$\frac{DA(e)}{\partial q_i} = \frac{\partial A(e)}{\partial q_i}\sigma^0(e) = \frac{\partial A(e)}{\partial q_i}, \frac{DA(e)}{\partial p_i} = \frac{\partial A(e)}{\partial q_i}\sigma^1(e) = \frac{\partial A(e)}{\partial q_i},$$

$$\frac{DA(m)}{\partial q_i} = \frac{\partial A(m)}{\partial q_i}\sigma^0(m) = \frac{\partial A(m)}{\partial q_i}, \frac{DA(m)}{\partial p_i} = \frac{\partial A(m)}{\partial p_i}\sigma^1(m) = -\frac{\partial A(m)}{\partial q_i}.$$

Рассмотрим варианты динамик, следующие из предложенного подхода.

Вариант 1. Гамильтониан H и величина A зависят от отношения по электрическому взаимодействию. Тогда

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(e)}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H(e)}{\partial q_i}.$$

Величина A подчинена динамике вида

$$\frac{\partial A(e)}{\partial t} + \frac{\partial A(e)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H(e)}{\partial p_i} - \frac{\partial H(e)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial A(e)}{\partial p_i} = 0.$$

Вариант 2. Гамильтониан H и величина A зависят от отношения по гравитационному взаимодействию. Тогда

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(m)}{\partial p_i}, \dot{p}_i = \frac{\partial H(m)}{\partial q_i}.$$

Величина A подчинена динамике вида

$$\frac{\partial A(m)}{\partial t} + \frac{\partial A(m)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H(m)}{\partial p_i} - \frac{\partial H(m)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial A(m)}{\partial p_i} = 0.$$

Вариант 3. Гамильтониан H зависит от отношения по электрическому взаимодействию, а величина A зависит от отношения по гравитационному взаимодействию.

Тогда

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(e)}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H(e)}{\partial q_i}.$$

Величина A подчинена динамике вида

$$\frac{\partial A(m)}{\partial t} + \frac{\partial A(m)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H(e)}{\partial p_i} + \frac{\partial H(e)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial A(m)}{\partial p_i} = 0.$$

Вариант 4. Гамильтониан H зависит от отношения по гравитационному электрическому взаимодействию, а величина A зависит от отношения по электрическому взаимодействию. Тогда

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(m)}{\partial p_i}, \dot{p}_i = \frac{\partial H(m)}{\partial q_i}.$$

Величина A подчинена динамике вида

$$\frac{\partial A(e)}{\partial t} + \frac{\partial A(e)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H(m)}{\partial p_i} + \frac{\partial H(m)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial A(e)}{\partial p_i} = 0.$$

Из предложенной модели приходим к ряду следствий:

- динамика изменения величин при взаимодействиях между зарядами разных типов вида (e, m) качественно отличается от взаимодействия между зарядами одинаковых типов вида $(e,e),(m,m)$,
- динамика взаимодействия зарядов одного типа, но разных знаков имеет черты, дополнительные к динамике зарядов одного типа и разных знаков.

Эта информация может быть полезна при решении проблемы построения полной системы физических моделей. Рассматриваемый вариант является частным случаем значительно более общей динамической модели. Её вид можно постулировать, исходя из принципа формального соответствия исходной и расширенной моделей. Постулируем закон динамического изменения параметров физической величины по правилу

$$-K_e \frac{\partial A(e)}{\partial t} = S_e A(e) H - R_e H A(e),$$
$$-K_m \frac{\partial A(m)}{\partial t} = S_m A(m) H + R_m H A(m).$$

Здесь K_i, S_i, R_i - присоединенные матрицы физического явления. Их конкретный вид нужно находить из дополнительных соображений. Стандартная теория соответствует случаю, когда все присоединенные матрицы равны единичной матрице. Произведение единичной матрицы на разные числа становится простым обобщением стандартной динамики. Тогда

$$K = kI, S = sI, R = rI .$$

Предлагаемый вариант соответствует композитному углублению физической модели. В этом случае возможно разнообразное изменение величин и операций стандартной модели. В частности, оно может реализовать себя в форме умножения используемых величин на разные матрицы. Композитное – нетензорное – умножение величин друг на друга способно существенно расширить возможности модели и горизонты ее развития. Отдельной гранью углубления физических моделей становится учет в ней движений высоких рангов. Рассмотрим простой пример. Пусть

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial \dot{p}} \ddot{p} = 0.$$

Если

$$\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p} + \ddot{p}\alpha,$$

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} + \ddot{p}\beta,$$

то $\alpha + \beta + \frac{\partial H}{\partial \dot{p}} = 0.$ Если $\alpha = \beta,$ то

$$\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{1}{2}\ddot{p}\frac{\partial H}{\partial \dot{p}},$$

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{1}{2}\ddot{p}\frac{\partial H}{\partial \dot{p}}.$$

Указанные формальные изменения динамики имеют право на существование как математические модели. Однако, очевидно, они могут быть полезны для физической практики.

К структурной микромеханике элементарных частиц

Из физических соображений следует, что нейтральная система (например, атом водорода), в которой есть минус и плюс заряды, может описываться парой различных уравнений, из объединения которых следуют уравнения, доступные экспериментальной проверке. Найдем такую возможность, полагая, что существует новый алгоритм вывода уравнений микродинамики.

Составим его из нескольких элементов:

1) сопоставим разным зарядам метрики событий разной сигнатуры, полагая, что минус заряду соответствует $r^{ij} = diag(1,1,1,-1)$, а плюс заряду соответствует $g^{ij} = diag(1,1,1,1)$;

2) введем множители $(-1)^p$ для минус заряда и плюс для $(1)^p$ заряда, которые назовем слаженностями, где *p* – порядок конструируемых исходных уравнений;

3) примем предположение, что волновые функции для минус и плюс зарядов пропорциональны друг другу, так что $\Psi_2 = a\Psi_1$;

4) построим исходные уравнения из производных одного порядка, согласуя их соединение между собой согласно метрикам событий;

5) используя весовые функции, аддитивно или мультипликативно соединим исходные уравнения между собой;

6) рассмотрим некоторые следствия из полученных уравнений.

Рассмотрим вариант, соответствующий $a = const$.

$$\Psi_1 = \Psi, \quad \Psi_2 = a\Psi, \quad \Phi_0 = \Psi_1 + \frac{1}{a}\Psi_2 = 2\Psi .$$

$$(-1)\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{1}{c_1}\frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\right) = A_1,$$

$$(+1)\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{1}{c_2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}\right)=B_1.$$

Так учтены весовые множители (α_i, β_i), слаженности $(-1)^p$, 1^p, метрик r^{ij}, g^{ij}. Отсюда

$$\Phi_1 = A_1+\frac{1}{a}B_1=\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{1}{c_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{1}{c_2}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

$$\nabla^2\Psi_1-\frac{\beta_3}{\alpha_3}\frac{1}{c_3}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}=A_2,$$

$$\nabla^2\Psi^2+\frac{\beta_4}{\alpha_4}\frac{1}{c_4}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial t^2}=B_2,$$

$$\Psi_2 = A_2+\frac{1}{a}B_2=2\nabla^2\Psi.$$

Аналогично получим

$$\Psi_3=\left(\frac{\beta_5}{\alpha_5}\frac{1}{c_5}+\frac{\beta_6}{\alpha_6}\frac{1}{c_6}\right)\frac{\partial^3\Psi}{\partial t^3},$$

$$\Phi_4=2\nabla^4\Psi=2\left(\frac{\partial^4\Psi}{dx^4}+\frac{\partial^4\Psi}{dy^4}+\frac{\partial^4\Psi}{dz^4}\right)\ldots$$

Рассмотрим варианты их аддитивного сплетения. Уравнение

$$a\nabla^2\Psi+b\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t}+r\Psi=\Phi \text{, если } \frac{\beta_i}{\alpha_i}\frac{1}{c_i}=const$$

описывает диффузию, теплопроводность. Для комплексных величин получим уравнение Шредингера

$$\nabla^2\Psi+i\frac{2\mu}{\hbar}\frac{\partial\Psi}{\partial t}-2\mu\frac{u}{\hbar^2}\Psi=0.$$

В нем постоянная Планка имеет аналитическое выражение вида $\frac{b}{a}\frac{\beta}{\alpha}$. Аналогично можно получить уравнение

$$a\nabla^4\Psi+b\frac{\partial^3\Psi}{\partial t^3}+c\nabla^2\Psi+d\frac{\partial\Psi}{\partial t}+e\Psi=\Phi.$$

Мультипликативное сплетение даёт нелинейные уравнения.

Рассмотрим вариант, соответствующий $a \neq const$:

$$\Psi_1 = \Psi, \quad \Psi_2 = a\Psi, \quad \Phi_0^* = \Psi_1 + \frac{1}{a}\Psi_2 = 2\Psi .$$

$$(-1)\left(\nabla\Psi_1 - \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\right) = A_1^*,$$

$$(+1)\left(a\nabla\Psi_1 + \Psi_1 \cdot \nabla a + \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}a\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}\Psi_1\frac{\partial a}{\partial t}\right) = B_1^* .$$

$$\Phi_1^* = A_1^* + \frac{1}{a}B_1^* = 2\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} + \frac{1}{a}\Psi_1 \cdot \nabla a + \frac{1}{a}\frac{\beta}{\alpha}\Psi_1\frac{\partial a}{\partial t} .$$

$$\nabla^2\Psi_1 - \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2} = A_2^*,$$

$$\nabla^2\Psi_2 = a\nabla^2\Psi_1 + 2\nabla a \cdot \nabla\Psi_1 + \Psi_1 \cdot \nabla^2 a ,$$

$$\partial_t^2\Psi_2 = a\partial_t^2\Psi_1 + \Psi_1\partial_t^2 a ,$$

$$\nabla^2\Psi_2 + \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial t^2} = B_2^*,$$

$$\Phi_2^* = A_2^* + \frac{1}{a}B_2^* = 2\nabla^2\Psi_1 + \frac{1}{a}\left(2\nabla a \cdot \nabla\Psi_1 + \Psi_1 \cdot \nabla^2 a\right) + \frac{1}{a}\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}\Psi_1\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} .$$

Их аддитивное сплетение с весовыми функциями дает уравнение

$$2\sigma\nabla^2\Psi_1 + \sigma\frac{2}{a}\nabla a \cdot \nabla\Psi_1 + \sigma\frac{1}{a}\Psi_1\nabla^2 a + \frac{\sigma}{a}\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}\Psi_1\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} +$$

$$+2\chi\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} + \frac{1}{a}\chi\Psi_1\nabla a + \frac{\chi}{a}\frac{\beta}{\alpha}\Psi_1\frac{\partial a}{\partial t} + 2\rho\Psi_1 = \Phi .$$

Кроме "перекрестного" члена $\nabla a \cdot \nabla\Psi_1$ уравнение состояний дополнилось выражением, которое задает динамическую массу m^*:

$$\sigma\nabla^2 a + \frac{\sigma}{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \chi\nabla a + \frac{\chi}{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial a}{\partial t} = m^*.$$

Следовательно, алгоритм активного сплетения полей позволяет ввести массу как активную переменную. В этом подходе масса подчинена динамическому уравнению. Поэтому к её анализу можно применить методы и алгоритмы, использованные для других физических величин. При анализе структуры частиц света была принята точка зрения, что заряды изготовлены из предзарядов. При таком подходе устойчивость заряда и закон его сохранения является следствие сохранения изделия, состоящего из предзарядов. Поскольку в данном случае речь идет о конструкции, которая имеет внутреннюю динамику и взаимодействие с окружением, её свойства будут неизменны только при усреднении параметров, ей соответствующих. Отсюда следует. что в динамических процессах заряды могут меняться. Это обстоятельство важно исследовать во всех отношениях. От понимания законов жизнедеятельности зарядов зависит глубина проникновения нашей практики в сущность химических и других связей. Физическое представление электрических и гравитационных предзарядов в форме изделий, изготовленных из открытых и замкнутых 1-Ритов, ставит перед нами задачу расчета таких объектов. С практической точки зрения нам хотелось бы иметь алгоритм, допускающий такую возможность. Рассмотрим, например, «паутинку зарядов» в форме системы концентрических окружностей, пересекаемых системой прямых линий, проходящих через начало координат. Координаты выберем не пространственно-временные, а зарядовые, обозначив их через x, y. Пусть они задают число разных базовых 0-Ритов, из которых образуются 1-Риты.

Из исходных положений вытекает ряд предположений:

- у зарядов может быть несколько слагаемых, функциональная сумма которых дает эмпирический эффект, разный для разных уровней материи,
- разные слагаемые могут быть подчинены разным динамическим уравнениям и разным физическим условиям,
- дискретность заряда может быть обусловлена физической дискретностью слагаемых, формирующих заряд,

Геометрические аспекты теории когомологий

Элементы группы $H^1(G,A)$ можно интерпретировать как классы автоморфизмов группы F, содержащейся в точной последовательности

$$1 \to A \to F \to G \to 1,$$

тождественные на A и на G по модулю сопряжений элементами $a \in A$. Группа $H^2(G,A)$ задает классы расширений группы A с помощью G на основе эквивалентных наборов факторов. Группа H^3 описывает препятствия к расширению неабелевой группы с центром A с помощью G. Другие группы когомологий не имеют общепринятой интерпретации. Предыдущий анализ показал, что при деформации физической модели могут меняться только элементы симметрий. Мы вправе ожидать, что аналогично будут использоваться элементы теории когомологий.

Рассмотрим аспекты когомологического моделирования симметрий с целью построения алгоритма применения когомологий в физике.

Приведем стандартную таблицу свойств коцепей:

$$\begin{aligned}
&df(g) = gf(g) - f(g),\\
&df(g_1, g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1),\\
&df(g_1, g_2, g_3) = g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2),\\
&df(g_1, g_2, g_3, g_4) = g_1 f(g_2, g_3, g_4) - f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_1, g_2 g_3, g_4) -\\
&- f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_1, g_2, g_3).
\end{aligned}$$

Группа $H^0(G,A)$. Она соответствует группе гомоморфизмов

$$H^0(G,A) \Rightarrow A^G = \left\{ a \in A \middle| ga = a, \forall g \in G \right\}.$$

Пример. Рассмотрим следующий вариант:

$$g = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, a_1^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, a(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ga_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & 0 \\ \tilde{\beta} & 0 \end{pmatrix} = a_1,$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, ga_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\gamma} \\ 0 & \tilde{\delta} \end{pmatrix}.$$

Пара абелевых групп $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ тривиально расширена на основе группы G.

Группа $H^1(G,A)$. Согласно определению

$$H^1(G,A) = {Der(G,A)} \big/ {Ider(G,A)},$$

$$Der(G,A) = \left\{ f : G \to A \middle| g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1), \forall x, y \in G \right\},$$

$$Ider(G,A) = \left\{ f : G \to A \middle| f(g) = ga - a, \forall g \in G \right\}.$$

Пример: Решением функционального уравнения

$$g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1) = 0.$$

является, в частности, функция $f(g) = ga - a.$ Другие решения с использованием чисел k_1, k_2 имеют вид

$$f^1(g) = k_1(ga - a),$$
$$f^2(g) = (ga - a)k_2.$$

Отсюда следует, что

$$H^1(G,A) \Rightarrow \{ k_i : -k_n ... -k_1, 0, k_1 ... k_n \}.$$

С физической точки зрения функцию $f(g)$ можно рассматривать как характеристику отклонения элемента ga от элемента a. По существу подхода мы описываем таким образом, как структуру, так и активность изделий. Следовательно, когомологии могут иметь прямую связь с физическими свойствами исследуемых объектов и явлений. Естественно рассмотреть другие варианты.

Так, например, для функции

$$f_a(g) = ga - ka.$$

получим неоднородное функциональное уравнение

$$f_a(g_1g_2) - g_1 f_a(g_2) - k \cdot f_a(g_1) = k(1-k)a.$$

Для функции

$$f_a(g) = \varphi(a)(ga - ka).$$

получим функциональное уравнение вида

$$f_a(g_1g_2) - g_1 f_a(g_2) - k \cdot f_a(g_1) = \varphi(a)k(1-k)a.$$

Рассмотрим ещё одну возможность. Пусть

$$f(g_1g_2) - f(g_1)g_2 - g_1 f(g_2) = 0.$$

Тогда

$$f(g_1g_2) - g_1 f(g_2) - f(g_1) = f(g_1)(g_2 - I) = \Delta_1.$$

Группа $H^2(G, A)$**.** Она характеризует систему функций, которые принято называть факторами расширения группы. Тогда

$$df(g_1, g_2, g_3) = g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2g_3) - f(g_1, g_2).$$

В частности, возможен вариант

$$g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2g_3) - f(g_1, g_2) = 0.$$

Рассмотрим это выражение с другой точки зрения. Учтём стандартное условие ассоциативности для матриц: $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$. Запишем его функционально в двух допустимых формах:

$$g_1 f(g_2, g_3) = f(g_1, g_2)g_3,$$
$$f(g_1, g_2g_3) = f(g_1g_2, g_3).$$

Просуммируем эти выражения:

$$g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2g_3) - f(g_1, g_2)g_3 = 0.$$

Дополним их нулевой суммой из двух слагаемых $f(g_1, g_2)$.

Получим функциональное уравнение

$$g_1 f(g_2,g_3) - f(g_1g_2,g_3) + f(g_1,g_2g_3) - f(g_1,g_2) = \Delta_2,$$

$$\Delta_2 = f(g_1,g_2)(g_3 - I).$$

Оно аналогично уравнению для когомологий второго ранга. Отличие в том, что уравнение неоднородно, имеет ненулевую правую часть. Уравнение имеет систему частных решений:

$$f_1(g_1,g_2) = (g_1g_2),\ f_2(g_1,g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2),\ \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)g_2 + g_1\varphi(g_2).$$

Действительно, первое решение проверяется тривиально, а для второго решения выполняется условие

$$\begin{aligned}&g_1(\varphi(g_2)\varphi(g_3)) - (\varphi(g_1)g_2)\varphi(g_3) - (g_1\varphi(g_2))\varphi(g_3)\\&+\varphi(g_1)(\varphi(g_2)g_3) + \varphi(g_1)(g_2\varphi(g_3)) + (\varphi(g_1)\varphi(g_2))g_3 = 0.\end{aligned}$$

Функция $\varphi(g)$ может иметь матричный вид, что позволяет рассматривать разные её представления. Все они будут принадлежать классу неоднородных когомологий второго ранга. Поскольку указанные действия напоминают дифференцирование с правилом Лейбница, мы получили функциональное дифференцирование с дополнительными степенями свободы.

Группа H^3. Она характеризует препятствия для расширения симметрий. Когомологическое условие имеет вид

$$\begin{aligned}&\Phi(g_1,g_2,g_3,g_4) =\\&= g_1 f(g_2,g_3,g_4) - f(g_1g_2,g_3,g_4) + f(g_1,g_2g_3,g_4) - f(g_1,g_2,g_3g_4) + f(g_1,g_2,g_3) = 0.\end{aligned}$$

Проблема состоит в том, чтобы найти условия физического плана, из которых следует данное выражение. Поскольку число положительных и отрицательных слагаемых различно, решения могут иметь вид, аналогичный решениям, полученным для скрещенных когомологий. Рассмотрим уравнение

$$g_1 f(g_2,g_3,g_4) - f(g_1g_2,g_3,g_4) + f(g_1,g_2g_3,g_4) - f(g_1,g_2,g_3g_4) + f(g_1,g_2,g_3)g_4 = 0.$$

Пусть

$$f(g_1,g_2,g_3) = f(g_1)f(g_2)f(g_3),\ f(g_1g_2) = f(g_1)g_2 + g_1 f(g).$$

Тогда, используя условие ассоциативности, получим тождество на матричнозначных функциях:

$$\begin{aligned}&g_1 f(g_2)f(g_3)f(g_4) - (f(g_1)g_2)f(g_3)f(g_4) - (g_1 f(g_2))f(g_3)f(g_4) +\\&+ f(g_1)(f(g_2)g_3)f(g_4) + f(g_1)(g_2 f(g_3))f(g_4) - f(g_1)f(g_2)(f(g_3)g_4) -\\&- f(g_1)f(g_2)(g_3 f(g_4)) + f(g_1)f(g_2)f(g_3)g_4 = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta_3 = f(g_1, g_2, g_3)(g_4 - I) = -\Phi(g_1, g_2, g_3, g_4) =$$

$$= -g_1 f(g_2, g_3, g_4) + f(g_1 g_2, g_3, g_4) - f(g_1, g_2 g_3, g_4) + f(g_1, g_2, g_3 g_4) - f(g_1, g_2, g_3).$$

Когомологический полином в этом частном случае показывает отклонение функции $f(g_1, g_2, g_3) g_4$ от значения $f(g_1, g_2, g_3)$:

$$\Phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = f(g_1) f(g_2)\big(f(g_3)(I - g_4)\big).$$

Поскольку возможны другие решения, смысловое значение и физическое наполнение когомологического полинома может быть другим. В этом случае, равно как и при решении системы дифференциальных уравнений, мы сталкиваемся с трансфинитностью решений. В зависимости от того, какие условия накладываются на функции, мы будем иметь разные решения на основе одного и того же функционального уравнения.

$$\begin{aligned} &H_1 \Rightarrow \Delta_1 = f(g_1)(g_2 - I),\\ &H_2 \Rightarrow \Delta_2 = f(g_1, g_2)(g_3 - I),\\ &H_3 \Rightarrow \Delta_3 = f(g_1, g_2, g_3)(g_4 - I)\ldots \end{aligned}$$

Цепочку можно продолжить на когомологии более высоких порядков. В рассмотрение введён новый математический объект. Он имеет физическую интерпретацию. Подойдём к исследуемому уравнению для когомологий третьего ранга с другой стороны. Выполним циклическую замену индексов в исходном когомологическом полиноме. На её основе введём систему ассоциированных когомологических уравнений:

$$\varphi^0(g_1, g_2, g_3, g_4) = g_1 f(g_2, g_3, g_4) + g_2 f(g_3, g_4, g_1) + g_3 f(g_4, g_1, g_2) + g_4 f(g_1, g_2, g_3),$$

$$\varphi^1(g_1, g_2, g_3, g_4) = f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_2 g_3, g_4, g_1) + f(g_3 g_4, g_1, g_2) + f(g_4 g_1, g_2, g_3),$$

$$\varphi^2(g_1, g_2, g_3, g_4) = f(g_1, g_2 g_3, g_4) + f(g_2, g_3 g_4, g_1) + f(g_3, g_4 g_1, g_2) + f(g_4, g_1 g_2, g_3),$$

$$\varphi^3(g_1, g_2, g_3, g_4) = f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_2, g_3, g_4 g_1) + f(g_3, g_4, g_1 g_2) + f(g_4, g_1, g_2 g_3),$$

$$\varphi^4(g_1, g_2, g_3, g_4) = f(g_1, g_2, g_3) + f(g_2, g_3, g_4) + f(g_3, g_4, g_1) + f(g_4, g_1, g_2),$$

$$\varphi^5(g_1, g_2, g_3, g_4) = f(g_1, g_2, g_3) g_4 + f(g_2, g_3, g_4) g_1 + f(g_3, g_4, g_1) g_2 + f(g_4, g_1, g_2) g_3.$$

Альтернированные столбцы этой системы функций при нулевом весе функции φ^5 задают стандартные условие для коцикла вида

$$g_1 f(g_2, g_3, g_4) - f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_1, g_2 g_3, g_4) - f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_1, g_2, g_3) = 0.$$

Альтернированные столбцы этой функций при нулевом весе функции φ^4 задают неоднородные когомологические уравнения вида

$$g_1 f(g_2,g_3,g_4) - f(g_1g_2,g_3,g_4) + f(g_1,g_2g_3,g_4) - f(g_1,g_2,g_3g_4) + f(g_1,g_2,g_3)g_4 = 0.$$

Расположим в одном месте систему ассоциированных когомологических уравнений для разных групп когомологий. На группе H^3 имеем (с точностью до цикла по переменным) уравнения вида

$$g_1 f(g_2,g_3,g_4) + g_2 f(g_3,g_4,g_1) + g_3 f(g_4,g_1,g_2) + g_4 f(g_1,g_2,g_3) = 0,$$

$$f(g_1g_2,g_3,g_4) + f(g_2g_3,g_4,g_1) + f(g_3g_4,g_1,g_2) + f(g_4g_1,g_2,g_3) = 0.$$

На группе H^2 имеем уравнения вида

$$g_1 f(g_2,g_3) + g_2 f(g_3,g_1) + g_3 f(g_1,g_2) = 0,\ f(g_1g_2,g_3) + f(g_2g_3,g_1) + f(g_3g_1,g_2) = 0,$$

$$f(g_1,g_2g_3) + f(g_2,g_3g_1) + f(g_3,g_1g_2) = 0,$$

$$f(g_1g_2) + f(g_2g_3) + f(g_3g_1) = 0.$$

На группе H^1 имеем уравнения вида

$$g_1 f(g_2) + g_2 f(g_1) = 0,\ f(g_1g_2) + f(g_2g_1) = 0,\ f(g_1) + f(g_2) = 0.$$

Стандартные уравнения для коциклов и неоднородные когомологические уравнения получаются для групп H^1, H^2 аналогично алгоритму, предложенному для группы H^3. Подойдём к исследуемому уравнению для когомологий третьего ранга с другой стороны. Рассмотрим таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|c|cccc}
1 & + & g_1 f(g_2,g_3,g_4) & g_2 f(g_3,g_4,g_1) & g_3 f(g_4,g_1,g_2) & g_4 f(g_1,g_2,g_3) \\
2 & - & f(g_1g_2,g_3,g_4) & f(g_2g_3,g_4,g_1) & f(g_3g_4,g_1,g_2) & f(g_4g_1,g_2,g_3) \\
3 & + & f(g_1,g_2g_3,g_4) & f(g_2,g_3g_4,g_1) & f(g_3,g_4g_1,g_2) & f(g_4,g_1g_2,g_3) \\
4 & - & f(g_1,g_2,g_3g_4) & f(g_2,g_3,g_4g_1) & f(g_3,g_4,g_1g_2) & f(g_4,g_1,g_2g_3) \\
5 & + & f(g_1,g_2,g_3) & f(g_2,g_3,g_4) & f(g_3,g_4,g_1) & f(g_4,g_1,g_2) \\
6 & - & f(g_1,g_2,g_3)g_4 & f(g_2,g_3,g_4)g_1 & f(g_3,g_4,g_1)g_2 & f(g_4,g_1,g_2)g_3
\end{array}\right)$$

Суммируя элементы таблицы по строкам, получим систему циклических уравнений:

$$\varphi^0(g_1,g_2,g_3,g_4) = g_1 f(g_2,g_3,g_4) + g_2 f(g_3,g_4,g_1) + g_3 f(g_4,g_1,g_2) + g_4 f(g_1,g_2,g_3),$$

$$\varphi^1(g_1,g_2,g_3,g_4) = f(g_1g_2,g_3,g_4) + f(g_2g_3,g_4,g_1) + f(g_3g_4,g_1,g_2) + f(g_4g_1,g_2,g_3),$$

$$\varphi^2(g_1,g_2,g_3,g_4) = f(g_1,g_2g_3,g_4) + f(g_2,g_3g_4,g_1) + f(g_3,g_4g_1,g_2) + f(g_4,g_1g_2,g_3),$$

$$\varphi^3(g_1,g_2,g_3,g_4)=f(g_1,g_2,g_3g_4)+f(g_2,g_3,g_4g_1)+f(g_3,g_4,g_1g_2)+f(g_4,g_1,g_2g_3),$$

$$\varphi^4(g_1,g_2,g_3,g_4)=f(g_1,g_2,g_3)+f(g_2,g_3,g_4)+f(g_3,g_4,g_1)+f(g_4,g_1,g_2),$$

$$\varphi^5(g_1,g_2,g_3,g_4)=f(g_1,g_2,g_3)g_4+f(g_2,g_3,g_4)g_1+f(g_3,g_4,g_1)g_2+f(g_4,g_1,g_2)g_3.$$

Альтернированные суммы элементов, представленных столбцами этой системы функций при нулевом весе функции φ^5, задают стандартные условие для коцикла вида

$$g_1f(g_2,g_3,g_4)-f(g_1g_2,g_3,g_4)+f(g_1,g_2g_3,g_4)-f(g_1,g_2,g_3g_4)+f(g_1,g_2,g_3)=0.$$

Альтернированные суммы элементов, представленных столбцами этой системы функций при нулевом весе функции φ^4 , задают неоднородные уравнения

$$g_1f(g_2,g_3,g_4)-f(g_1g_2,g_3,g_4)+f(g_1,g_2g_3,g_4)-f(g_1,g_2,g_3g_4)+f(g_1,g_2,g_3)g_4=0.$$

Расположим в одном месте систему уравнений, ассоциированных с когомологиями. На группе H^3 имеем (с точностью до цикла по переменным) уравнения вида

$$g_1f(g_2,g_3,g_4)+g_2f(g_3,g_4,g_1)+g_3f(g_4,g_1,g_2)+g_4f(g_1,g_2,g_3)=0,$$

$$f(g_1g_2,g_3,g_4)+f(g_2g_3,g_4,g_1)+f(g_3g_4,g_1,g_2)+f(g_4g_1,g_2,g_3)=0.$$

На группе H^2 имеем таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|c|ccc}
1 & + & g_1f(g_2,g_3) & g_2f(g_3,g_1) & g_3f(g_1,g_2)\\
2 & - & f(g_1g_2,g_3) & f(g_2g_3,g_1) & f(g_3g_1,g_2)\\
3 & + & f(g_1,g_2g_3) & f(g_2,g_3g_1) & f(g_3,g_1g_2)\\
4 & - & f(g_1,g_2) & f(g_2,g_3) & f(g_3,g_1)\\
5 & + & f(g_1g_2)g_3 & f(g_2g_3)g_1 & f(g_3g_1)g_2\\
6 & - & f(g_1,g_2,g_3) & f(g_2,g_3,g_1) & f(g_3,g_1,g_2)
\end{array}\right).$$

Их сумма по строкам даёт циклические уравнения:

$$g_1f(g_2,g_3)+g_2f(g_3,g_1)+g_3f(g_1,g_2)=0,$$

$$f(g_1g_2,g_3)+f(g_2g_3,g_1)+f(g_3g_1,g_2)=0,$$

$$f(g_1,g_2g_3)+f(g_2,g_3g_1)+f(g_3,g_1g_2)=0,$$

$$f(g_1,g_2)+f(g_2,g_3)+f(g_3,g_1)=0,$$

$$f(g_1g_2)g_3+f(g_2g_3)g_1+f(g_3g_1)g_2=0,$$

$$f(g_1,g_2,g_3)+f(g_2,g_3,g_1)+f(g_3,g_1,g_2)=0.$$

Сумма четырёх элементов по столбцам с учётом знаков таблицы даёт когомологические уравнения:

$$g_1 f(g_2,g_3) - f(g_1g_2,g_3) + f(g_1,g_2,g_3) - f(g_1,g_2) = 0,$$

$$g_1 f(g_2,g_3) - f(g_1g_2,g_3) + f(g_1,g_2g_3) - f(g_1,g_2)g_3 = 0,$$

$$g_1 f(g_2,g_3) - f(g_1g_2,g_3) + f(g_1,g_2,g_3) - f(g_1,g_2) = 0.$$

На группе H^1 имеем уравнения вида

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & + & g_1 f(g_2) & g_2 f(g_1) \\ 2 & - & f(g_1,g_2) & f(g_2,g_1) \\ 3 & + & f(g_1) & f(g_2) \\ 4 & - & f(g_1g_2) & f(g_2g_1) \\ 5 & + & f(g_1)g_2 & f(g_2)g_1 \end{array}\right).$$

Их сумма по столбцам даёт когомологические уравнения:

$$g_1 f(g_2) - f(g_1,g_2) + f(g_1) = 0,$$

$$g_1 f(g_2) - f(g_1,g_2) + f(g_1)g_2 = 0,$$

$$g_1 f(g_2) - f(g_1,g_2) - f(g_1g_2) + f(g_1)g_2 = 0.$$

Их сумма по строкам даёт циклические уравнения:

$$g_1 f(g_2) + g_2 f(g_1) = 0,$$

$$f(g_1g_2) + f(g_2g_1) = 0,$$

$$f(g_1) + f(g_2) = 0.$$

При альтернированном сложении элементов некоторые циклические уравнения берется с нулевым весом. Они задают обобщение теории когомологий. Дифференциалы от функций получают дополнительные слагаемые. Так учитываются свойства объектов и явлений, «упущенные» при стандартном анализе коцепей и их дифференциалов.

Анализ группы H^1 позволяет предложить физическую интерпретацию функциям ассоциированным с когомологиями. Назовём элементы g объектами. Назовём функцию $f(g)$ воздействием объекта на себя. Функция $f(g_1g_2)$ пусть задает воздействие первого объекта на второй объект. Функция $g_1 f(g_2)$ задает изменение объекта g_1 под воздействием справа объекта g_2 с влиянием $f(g_2)$. Речь идет о совокупности объектов с согласованными воздействиями друг на друга.

По этой причине ясно, что начальные группы когомологий описывают систему свойств для 2,3,4 объектов.

Когомологиям H^N более высоких порядков соответствует система свойств для $N+1$ объекта. Возможна «физическая» интерпретация формул, соответствующих ассоциированным когомологическим функциям.

На примере группы H^1 интерпретация выглядит так:

- а) изменение первого объекта под воздействием второго объекта уравновешено изменением второго объекта под воздействием первого; б) воздействие первого объекта на влияние второго объекта уравновешено воздействием второго объекта на влияние первого:

$$g_1 f(g_2) + g_2 f(g_1) = 0,$$

- влияние первого объекта на второй уравновешено влиянием второго объекта на первый (аналог закона Ньютона о равновесии действия и противодействия):

$$f(g_1 g_2) + f(g_2 g_1) = 0,$$

- в системе объектов их влияние на себя уравновешено:

$$f(g_1) + f(g_2) = 0.$$

Для ассоциированных когомологических групп более высоких порядков речь идет о совокупности свойств большего числа объектов:

$$H^1 \to 2, H^2 \to 3, H^3 \to 4 ... H^N \to N+1...$$

Покажем, что рассматриваемые уравнения задают дополнительные свойства физической реальности. Проанализируем некоторые частные решения. Уравнение

$$\varphi^0(g_1, g_2, g_3, g_4) = g_1 f(g_2, g_3, g_4) + g_2 f(g_3, g_4, g_1) + g_3 f(g_4, g_1, g_2) + g_4 f(g_1, g_2, g_3) = 0$$

допускает решение в виде совокупности функций, согласованных с их множителем:

$$\begin{aligned} g_1 f(g_2, g_3, g_4) &= g_1 \left(g_2 - g_1^{-1} g_2 g_1 + g_3 - g_1^{-1} g_3 g_1 + g_4 - g_1^{-1} g_4 g_1 \right) = \\ &= g_1 g_2 - g_2 g_1 + g_1 g_3 - g_3 g_1 + g_1 g_4 - g_4 g_1. \end{aligned}$$

Эти уравнения инициируют построение коммутаторов алгебры симметрии. Уравнение

$$\varphi^1(g_1, g_2, g_3, g_4) = f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_2 g_3, g_4, g_1) + f(g_3 g_4, g_1, g_2) + f(g_4 g_1, g_2, g_3) = 0$$

допускает решение

$$f(g_1 g_2, g_3, g_4) = \varphi^1(g_1) + \varphi^2(g_2) - \varphi^3(g_3) - \varphi^4(g_4).$$

Оно задаёт линейную суперпозицию независимых функций, ассоциированных с исследуемыми объектами. Решения имеют аналогичный вид для других когомологических групп. В общем случае решения ассоциированных когомологических уравнений имеют систему новых свойств. Они могут найти применение в физике. Неоднородные когомологические уравнения можно рассматривать как обобщение стандартной когомологической системы уравнений. Покажем на примере электромассодинамики, что развиваемый подход позволяет получить алгоритм вывода данной системы дифференциальных уравнения. Рассмотрим функциональное уравнение

$$\xi_k \xi_l \varphi_{mn}^A + \xi_l \xi_m \varphi_{nk}^A + \xi_m \xi_n \varphi_{kl}^A + \xi_n \xi_k \varphi_{lm}^A = 0.$$

Пусть

$$\xi_k = \partial_k, \varphi_{mn}^A = \partial_m A_n(\zeta) \pm \partial_n A_m(\zeta).$$

Подставляя их в функциональное уравнение, получим аналог уравнений электромассодинамики. Так строки функциональных уравнений выступают в качестве «строительных элементов» для физических теорий. Покажем, что варианты расширения симметрий, применяемые в физике, приводят к моделям, описываемым обобщенными когомологиями. Рассмотрим на конкретных примерах варианты построения функциональных отношений в системах матриц. Из них следуют обобщенные уравнения когомологий.

Вариант 1. Изучим расширение группы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используем для этого знаковую группу. Получим соответствия вида

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to b_1 : \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix} \to a_1 : \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix}, f_1 : \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix}, c_1 : \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \\ + \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to b_2 : \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix} \to a_2 : \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, f_2 : \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix}, c_2 : \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \\ + \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to b_1 : \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix} \to a_1 : \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix}, f_1 : \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, c_1 : \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix}.$$

Построим функциональное уравнение на основе рассмотрения данной системы матриц. Они образуют группу, которая получена применением знаковой группы к исходной группе

(E,e_1,e_2,e_3). Введём функцию $\Phi(g_1...g_n)=n\varphi$. Здесь $n-$ число аргументов функции Φ, $\varphi-$ элемент знаковой группы. Выберем $\varphi=column(+,+,-,-)$. Пусть, например,

$$a_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(ab)=\Phi(a)b+a\Phi(b).$$

Пусть, например,

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(\alpha\beta)=\Phi(\alpha)\beta-\alpha\Phi(\beta).$$

Следовательно, знаковая группа подчинена паре функциональных уравнений. Введём соответствие

$$f(g_1,g_2)=\Phi(g_1)\Phi(g_2).$$

При условиях, указанных выше, им подчинены, соответственно, уравнения

$$g_1f(g_2,g_3)-f(g_1g_2,g_3)+f(g_1,g_2g_3)-f(g_1,g_2)=0,$$
$$g_1f(g_2,g_3)+f(g_1g_2,g_3)+f(g_1,g_2g_3)-f(g_1,g_2)=0.$$

Вариант 2. Рассмотрим функциональное уравнение, построенное по правилу «учёта внешнего фактора». В его роли используем матрицу

$$a_0=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Функцию сопоставления сконструируем по формуле

$$f(g_1...g_n)=n(g_1\cdots g_n)a_0.$$

Пусть

$$g_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}, g_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}; g_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}, g_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Получим соотношение

$$f(g_1g_2)=f(g_1)g_2+g_1f(g_2).$$

Вариант 3. Пусть матрицы подчинены комбинаторному произведению. Выберем

$$g_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, g_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, a_0=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Получим

$$f(g_1g_2)=f(g_1)g_2-f(g_2).$$

Пусть

$$g_1=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}, g_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, a_0=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Получим

$$f(g_1g_2)=f(g_1)g_2+f(g_2).$$

Вариант 4. Известно, что совокупность единичных матриц образует группу. Выполним её расширение посредством комбинаторной операции

$$K=column(\leftarrow,\rightarrow,\leftarrow,\rightarrow).$$

Получим совокупность матриц:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, K(E)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=e_1,$$

$$K(e_1)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=e_2, K(e_2)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=e_3, K(e_3)=E.$$

Применим формулу

$$K(g_1 \cdots g_n) = nK(g_1 \cdots g_n).$$

Таблица произведений такова:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & E & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline E & E & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_1 & E & e_3 & e_2 \\ e_2 & e_2 & e_3 & E & e_1 \\ e_3 & e_3 & e_2 & e_1 & E \end{array}\right).$$

Анализ показал подчинение этой группы системе степенных функциональных уравнений

$$K^p(g_1 g_2) = K^q(g_1)g_2 + g_1 K^r(g_2).$$

Они образуют три класса:

$$\begin{aligned} &K(g_1 g_2) = K(g_1)g_2 + g_1 K(g_2), \\ &K^3(\eta\eta) = K(\eta)\eta + \eta K(\eta), \\ &K(\alpha\beta) = K^3(\alpha)\beta + \alpha K(\beta). \end{aligned}$$

Вариант 5. Рассмотрим возможность построения нелинейных функциональных уравнений на матрицах. В качестве базового множества рассмотрим размерностное расширение группы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данное множество не является группой. Оно образует совокупность матриц, полученную на основе указанного выше комбинаторного приема. Ему можно придать функциональные свойства.

Введём функцию приведения матрицы или их произведения к некоторой другой матрице из данной совокупности. Вес функции зададим числом начальных элементов в её аргументе. Пусть

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f(g_1 g_2) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, f(g_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно принятому алгоритму получим связь

$$g_1 g_2 f(g_1 g_2) = g_1 f(g_1) + g_2 f(g_2).$$

Если матрицы выбраны так, что

$$g_1 g_2 = f(g_1 g_2),$$

получим нелинейное функциональное соотношение

$$f^2(g_1 g_2) = g_1 f(g_1) + g_2 f(g_2).$$

В нём содержится информация на элементах, которые находятся за пределами исходного множества. В данном случае их роль выполняют матрицы

$$f(g_1 g_2) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данные матрицы можно использовать для вторичного приведения. Если в такой роли используются $f(g_1), f(g_2)$, получим функциональное уравнение более сложного типа. Есть эффект «инфицирования» канонической группы деформированным её элементом. Он состоит в том, что при произведении элементов появляются новые деформированные элементы со сложной структурой.

Действительно, получим, например

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & w_1 a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & w_2 b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 & a_1 b_2 + a_2 w_2 b_4 \\ a_3 b_1 + w_1 a_4 b_3 & a_3 b_2 + w_1 w_2 a_4 b_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & w_2 b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 & a_1 b_2 + a_2 w_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + w_2 a_4 b_4 \end{pmatrix}\ldots$$

Физическая сущность деформации симметрий сводится к изменению системы отношений между объектами, которые задаются системой матриц. При этом допускается неэквивалентность отношений. При деформации уравнений электродинамики получаем, например, вариант изменения вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(w) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -w^2 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & -w & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку деформированные элементы симметрии принадлежат алгебре, в том числе алгебре Йордана, их действие естественно назвать действием алгебры. Дело здесь не в формальном изменении слов, а в глубинном различии действия групп и действия алгебр. Классификация состояний реализуется на основе действия групп. Классификация процессов реализуется на основе действия алгебр. В качестве элементов таких алгебр могут использоваться деформированные элементы групп.

Деформация симметрий представляет собой алгоритм исследования совокупности скрытых свойств симметрий. Для применения деформированных симметрий в физических моделях возможны разнообразные приемы и методы. Они раскрывают скрытые от поверхностного анализа свойства физических изделий и явлений, которые им присущи. В силу указанных обстоятельств мы вправе на начальной стадии анализа конструировать физическую модель на некоторой группе симметрии и на этой основе анализировать свойства объектов и явлений.

На второй стадии требуется анализ разнообразных деформаций физической модели, который позволит обнаружить и использовать на практике новые стороны и свойства физической реальности. Деформация физических моделей реализуется на всех её элементах. Таковы величины, используемые в модели, дифференциальные и интегральные операторы, начальные и граничные условия. Могут меняться также используемые математические операции, что позволит учесть новые свойства взаимодействия и отношений между физическими объектами.

Деформация модели предполагает также деформацию логической структуры подхода и деформацию её интерпретаций. Представляет интерес задача деформации дифференциальных и интегральных операторов. Если дифференциальный или интегральный оператор обладает избирательностью по отношению к элементам, используемым в физической модели, получим новые возможности моделирования и анализа ситуаций.

Так, например, деформированная частная производная от произведения функций при условии, что она «не чувствует» одну из функций, будет «рассматривать её» как постоянную. Аналогично частные производные «чувствуют» координаты. В рассматриваемом случае они не «чувствуют» своих координат, которые спрятаны в «неощущаемой» функции.

Алгоритм геометризации реальных отношений

К модели реальных отношений мы относим систему уравнений, которая связывает между собой величины и систему дифференциальных операторов. Таковы, в частности, уравнения электродинамики и массодинамики. Так, система уравнений для потенциалов в электродинамике может быть представлена в виде

$$h_i^{\alpha\alpha\beta}\left(x^j,u^\gamma\right)P^i_{\alpha\beta}+h^\alpha\left(x^j,u^\gamma,P^k_i\right)=0,$$

$$h_i^\alpha\left(x^j,u^\gamma\right)P^i_\alpha+h\left(x^j,u^\gamma\right)=0.$$

Здесь использованы обозначения

$$x^j=\left(A^1,A^2,A^3,A^0,w\right),\ j=1,2,3,4,5\to n=5,$$
$$u^\alpha=\left(x,y,z,ct\right),\alpha=1,2,3,4\to m=4,$$
$$I^a=\left(I^1,I^2,I^3,I^0\right),a=1.2.3.4\to r=4,$$

$$P^i_\alpha=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha},P^i_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2x^i}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}.$$

Величины x^i,u^α,P^i_α являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы

$$\omega^i=0,\Theta^\alpha=0,\Theta^i_\alpha=dP^i_\alpha+P^k_\alpha\omega^i_k-P^i_\beta\Theta^\beta_\alpha.$$

На этой основе математиками разработан общий алгоритм геометрического анализа систем дифференциальных уравнений. В частности, он позволяет сконструировать тензоры кручения и кривизны, ассоциированные с параметрами исследуемого физического явления. В модели электродинамики без ограничения скорости они индуцируются внутренним образом. Размерность соответствующего геометрического пространства в данном случае равна 85. В рамках такого алгоритма естественно анализировать разные топологические аспекты изделий и их динамик.

С физической точки зрения такой подход не очень удобен. Конечно, полезна принятая математики общность подхода к любым явлениям, которые описываются дифференциальными уравнениями. Однако в нем нет элементов, соотносящихся с практикой поиска новых возможностей эксперимента и технологическуого модклирования. Такие элементы необходимо ввести в физическую модель.

По сути дела, дифференциальные уравнения отображают реакции измерительных устройств на то или другое состояние объектов в разных условиях наблюдения. Однако они не задают внутренних параметров исследуемых объектов и явлений. Более того, теоретики «укладывают» экспериментальные данные в математическую модель, соответствующую достигнутой практике.

С философской точки зрения такие математические и экспериментальные средства всегда могут быть изменены. Впереди есть лучшие приборы, математический аппарат, новые логические средства. На них нужно «нацеливаться», реализуя текущую практику. Однако не всегда правильно и удобно описывать физические явления геометрически. Геометрия задает только один аспект структуры и явления. В реальной практике требуется знание всех сторон и граней явлений.

Операционное расширение четверной группы Клейна

Применим к четверной группе Клейна структурную операцию. Получим группу на структурной операции порядка 16. Она имеет 4 идеала и 4 предидеала. Дополнение к группе Клейна можно трактовать как предгруппу на матричной операции. Совокупность матриц совместно с обозначениями мест значимых элементов такова:

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&1&4&3\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}3&4&1&2\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4&3&2&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&4&3&2\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&3&4&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}3&2&1&4\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4&1&2&3\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&2&2&2\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}3&3&3&3\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4&4&4&4\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&3&1&3\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}2&4&2&4\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}3&1&3&1\end{pmatrix}\\ \hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4&2&4&2\end{pmatrix}\\ \hline\end{array}.$$

Мы имеем 4 набора матриц, каждая совокупность заполняет все значимые места. По этой причине их можно применять для моделирования элементов матричной алгебры.

В сочетании со знаковой группой мы имеем элементы, достаточные для конструирования систем уравнений, ассоциированных с ними. В данном случае возможны 4 системы уравнений. Их достаточно для первоначального моделирования Тел, Сознаний и пары Чувств.

Полная совокупность матриц получена на основе группы, применяемой для моделирования электромагнетизма и гравитации: фундамента физических тел. По этой причине в силу принципа софистатности Тел, Сознаний, Чувств мы имеем математический фундамент для моделирования всей указанной совокупность сторон любого физического объекта. Модель изначально основана на системе, состоящей из 4 предзарядов: пары предзарядов электрического типа и пары предзарядов гравитационного типа.

Группа Клейна абелева. По этой причине получено *операционное расширение* абелевой группы до новой абелевой группы. Оно сопровождается изменением нормальной подгруппы. С другой стороны, объединяя группа Клейна с её смежным классом по матричной операции, заданной матрицами второй строки, мы имеем дело с неабелевой группой.

Зависимость богатства от знания

Пусть объект непрерывно учится, увеличивается его знание t, базируясь на некоторой начальной величине a. Пусть будет достигнуто знание

$$t' = t + a.$$

Пусть объект дополнил богатство x с базовым значением b пропорционально своему знанию. Пусть новое состояние богатства задано законом

$$x' = ut + x + b.$$

Примем модель стабильных социальных условий y: $y' = y$. Запишем эту систему законов матричным уравнением с применением стандартного матричного произведения

$$\begin{pmatrix} y' \\ t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ t \\ x \end{pmatrix}.$$

Сопоставим набору параметров величину $\delta = \begin{pmatrix} a & u & b \end{pmatrix}$. Рассмотрим социальные условия, знания и богатство второго поколения объектов. Подчиним их закону, который аналогичен указанному выше. Другими словами, сохраним тип поведения:

$$y'' = y', \ \ x'' = wt' + x' + d, \ t'' = t' + c.$$

$$\begin{pmatrix} y'' \\ t'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ t' \\ x' \end{pmatrix}.$$

Сопоставим набору параметров величину $\mu = \begin{pmatrix} c & w & d \end{pmatrix}$. Заменим величины, штрихованные один раз, величинами без штрихов. Произведения матриц некоммутативны:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & w & 1 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & u & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c + a & 1 & 0 \\ d + wa + b & w + u & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & u & 1 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & w & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a + c & 1 & 0 \\ b + ua + d & u + w & 1 \end{pmatrix}.$$

В пространстве параметров имеет место суперпозиция

$$\begin{pmatrix} a & u & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & w & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & u + w & b + ua + d \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} c & w & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & u & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & u + w & b + wa + d \end{pmatrix}.$$

Операция суммирования параметров ассоциирована с произведением матриц, у которых треугольный вид и на диагонали стоят единицы. Такие матрицы образуют группу, по этой причине мы можем рассматривать пространство параметров как группу Ли с операцией суммирования согласно приведенным правилам. Согласно идеологии Клейна группа определяет структуру пространства параметров. Структура группы преобразований параметров исследуемой модели хорошо известна. Укажем её основные свойства. Единичной группе соответствуют параметры $E \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Обратный элемент группы имеет параметры вида $-\delta = \begin{pmatrix} -a & -u & -b+au \end{pmatrix}$. Суммирование элементов группы подчинено закону

$$n\delta = \begin{pmatrix} na & nu & nb + \dfrac{n(n-1)}{2} au \end{pmatrix}.$$

Коммутатор рассматриваемой группы имеет вид

$$[g,\mathrm{g}] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & Q \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [g,\mathrm{g}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -Q \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратный элемент группы есть величина

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b+au & -u & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямой проверкой убеждаемся в том, что $\big[[g,g],[g,g]\big] = E = \big[[g,g],\mathrm{g}\big]$. Следовательно, группа разрешима ступени 2 и нильпотентна ранга 2. Мы видим, что рассматриваемое пространство параметров ассоциировано с нильпотентной группой. Это модель нильпотентного пространства параметров. Аналогичные формулы применяются при анализе одномерного инерциального движения точечного объекта. Мы имеем аналогию механического движения и изменения богатства в зависимости от уровня знания. Аналогично можно рассматривать зависимость скалярной характеристики физического тела от состояния Сознания или Чувств. Соответственно динамике материальных точек, мы, следуя принципу софистатности для Тел, Сознаний и Чувств можем задать закон динамики

$$\sigma \frac{d^2\vec{\eta}}{d\xi^2} = \vec{\pi}.$$

Пространство, в котором анализируются величины, будет задано системой математически независимых величин. Простым параметром этого пространства ранее предложено рассматривать, например, знание.

Замечание: Аналогичные свойства имеет группа с элементами, расположенными выше диагонали с единичными элементами. Элементы

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

задают разрешимую группу ступени 2. Она также есть нильпотентная группа ранга 2.

Генерация новых групп на основе группы перестановок S_3

Для решения ряда физических задач желательно знать и применять на практике алгоритмы изменения отношений в системе объектов. В частности, стоит задача генерации новых множеств на основе некоторого стандартного множества. На простом примере легко видеть, что эта задача не является простой и она интересна не только для физиков, но и для математиков.

Проанализируем алгоритмы генерации новых множеств на основе группы перестановок из трех элементов. Пронумеруем ее элементы:

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline 1\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline 2\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline 3\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\\hline 4\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\hline 5\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\\hline 6\\\hline\end{array}.$$

Таблица стандартных матричных произведений имеет вид

$\overset{m}{\times}$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	6	4	5
3	3	1	2	5	6	4
4	4	5	6	1	2	5
5	5	6	4	3	1	2
6	6	4	5	2	3	1

Эта группа разрешима, но не нильпотентна.

Первый алгоритм генерации новой группы базируется на перестановке в таблице произведений второй и третьей строк с последующим формированием матриц в соответствии с расположением одинаковых номеров. Получим группу, изоморфную исходной группе перестановок из трех элементов:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 2&0\\\hline 0&2\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 3&0\\\hline 0&3\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 0&4\\\hline 4&0\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 0&5\\\hline 5&0\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 0&6\\\hline 6&0\\\hline\end{array}.$$

Второй алгоритм генерации новой группы основан на системе матриц, ассоциированной со стандартным расположением номеров значимых элементов в таблице произведений:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 5&0\\\hline 0&2\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 6&0\\\hline 0&3\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 4&0\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 0&2\\\hline 5&0\\\hline\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 0&3\\\hline 6&0\\\hline\end{array}.$$

Уникальность этого множества в том, что произведения элементов генерируют только новые элементы.

Имеем таблицу произведений:

$\overset{m}{\times}$	$\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&0\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6&0\\0&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&2\\5&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&3\\6&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&4\\4&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&5\\5&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&6\\6&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}5&0\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&5\\6&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&6\\4&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&4\\5&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}6&0\\0&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&6\\5&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&4\\2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&5\\4&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&2\\5&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6&0\\0&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&0\\0&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&0\\0&4\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&3\\6&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&3\\2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&0\\0&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&0\\0&5\end{pmatrix}$

.

Общее количество элементов нового множества равно 72. Оно имеет подгруппы. Например,

$$H \to \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2&0\\\hline 0&2\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 3&0\\\hline 0&3\\\hline\end{array}.$$

Однако даже эта подгруппа не инвариантна:

$$\begin{pmatrix}5&0\\0&2\end{pmatrix}H \to \begin{pmatrix}5&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&0\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}, H\begin{pmatrix}5&0\\0&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}5&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&0\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Здесь имеет место частичное совпадение элементов. В других подгруппах ситуация еще сложнее. Следовательно, мы имеем **простую группу**.

«Сила» пары кватернионов

Кватернион есть элемент алгебры вида

$$q = d + ia + jb + kc,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1_n,$$
$$ij = k,\ jk = i, ki = j,\ ji = -k, kj = -i, ik = -j\ .$$

Единицы кватерниона подчинены условиям

$$i^4 = i^2 j^2 = ijij^{-1} = 1.$$

В частности, есть модель на матрицах

$$i=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, j=\sigma\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \sigma^2=-1.$$

Единицы кватерниона задают метабельную 2-группу и её класс нильпотентности равен 2. В этой модели кватернион записан на основе комплексных чисел. Явного применения этой модели в физике нет.

Ситуация меняется при рассмотрении пары кватернионов:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, i=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}, j=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, k=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, i=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}, j=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}, k=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Известно, что этой пары достаточно, чтобы записать в матричном виде уравнения многих физических моделей. Особенно элегантно выглядят в такой записи уравнения релятивистской электродинамики. Пара кватернионов имеет реальное применение в физике. Паре кватернионов доступно то, что недоступно одному кватерниону.

Есть и дополнительные свойства. Произведения элементов пары кватернионов генерируют тройку антикватернионов:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, \mathrm{k}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Этих элементов достаточно, чтобы сконструировать физическую модель гравитации по аналогии с моделью электродинамики.

Она обобщает геометрическую модель Эйнштейна и допускает объединение с релятивистской электродинамикой. Так утверждается дополнительная «сила» пары кватернионов.

Указанная совокупность с точностью до умножения на минус единицу есть группа на матричной операции: группа заполнения физических моделей. Она достаточна, чтобы на этой основе смоделировать элементы матричной алгебры. Поскольку это так, любую матрицу степени 4 можно выразить на основе элементов группы заполнения физической модели. Следовательно, пара кватернионов имеет фундаментальное значение для всей физики. Заметим дополнительно, что матрицы указанного типа описывают отношения между некоторыми 4 объектами. С физической точки зрения, в силу общности анализируемой модели, мы вправе ожидать наличия системы фундаментальных объектов, отношения между которыми формируют такие явления как электромагнетизм и гравитация. Этот вариант проанализирован. На основе указанной идеологии предложена механическая модель частиц света. Согласно ей, каждая частица света образована из элементарных частиц света. Элементарная частица состоит из пары предзарядов электрического и пары предзарядов гравитационного типа, имеющих разные знаки. Предзаряды электрического типа двигаются на периферии объекта. Предзаряды гравитационного типа находятся в центральной части объекта. Физическая общность модели группы заполнения физических моделей состоит в том, что все они обусловлены структурой и активностью электромагнетизма и гравитации.

Заметим, что все указанные матрицы могут быть получены на основе применения знаковой группы к четверной группе Клейна вида

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\alpha=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\mathrm{k}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Эти элементы не «исчерпывают» всей совокупности элементов группы перестановок. По этой причине есть дополнительные возможности анализа и применения в физике всех элементов группы перестановок.

Алгебраические законы на группах перестановок

У каждого множества есть совокупность законов, которым подчинены элементы. Часто применяются алгебраические зависимости, характеризующие порождающие элементы рассматриваемых множеств. Однако есть также законы, справедливые для пар элементов, для троек элементов. Понятно, что их можно рассматривать как некоторое средство классификации анализируемых математических изделий: совокупности объектов в сочетании с совокупностью операций.

Проанализируем с этой точки зрения группу перестановок из 3 элементов. Она содержит матрицы

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.
a	b	c	d	e	f

Для каждой пары элементов, исключая единичную матрицу, справедлив закон $\xi\eta\eta\xi = a.$ Если дополнить расчет единичной матрицей, получим квадратичный закон $(\xi\eta\eta\xi)^2 = a.$ Аналогичные законы справедливы для элементов четверной группы Клейна. Для неё выполняется также закон $\left(\xi\eta\xi\right)^2 = \left(\eta\xi\eta\right)^2$. Он не выполняется на группе перестановок из 3 элементов. Можно в качестве критерия «силы» множества принять количество законов, которые выполняются в нем для всех элементов множества. По этому критерию «сила» четверной группы Клейна больше «силы» группы перестановок из 3 элементов.

Дополним группу S_3 элементами

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Проанализируем её свойства на комбинаторной операции. Получим уникальные свойства. У этого множества есть единичная матрица, относительно которой все элементы имеют *единую обратную* матрицу:

$$\xi \overset{k}{\times} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \xi, \xi \overset{k}{\times} \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Когомологии групп в физической теории

0 - когомологии группы G с коэффициентами в модуле M ,согласно определению, задают группу $G-$инвариантных элементов в M :

$$H^0\left(G,M\right) = Inv_G M = \left\{m \leftarrow M, gm = m\right\}.$$

Исследуем с этой точки зрения уравнения Фарадея-Ампера в электродинамике:

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\begin{pmatrix}E_x - iB_x\\E_y - iB_y\\E_z - iB_z\\0\end{pmatrix} +$$

$$+\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_y + \begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\partial_z + \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{(i)}{c}\partial_t\right\}\begin{pmatrix}E_x + iB_x\\E_y + iB_y\\E_z + iB_z\\0\end{pmatrix} = 0.$$

Мы имеем дифференциальный модуль, посредством которого представлена система дифференциальных уравнений. Легко показать, что он инвариантен относительно действия на него слева элемента группы заполнения физических моделей.

Для примера выполним умножение исходных уравнений на элемент, принадлежащий кватерниону

$$g=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Получим матричные уравнения другого вида:

$$\left\{\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{(-i)}{c}\partial_t\right\}\begin{pmatrix}E_x-iB_x\\E_y-iB_y\\E_z-iB_z\\0\end{pmatrix}+$$

$$+\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{(i)}{c}\partial_t\right\}\begin{pmatrix}E_x+iB_x\\E_y+iB_y\\E_z+iB_z\\0\end{pmatrix}=0.$$

Запишем на его основе дифференциальные уравнения. Получим

$$-\partial_x\left(E_x-iB_x\right)-\partial_y\left(E_y-iB_y\right)-\partial_z\left(E_z-iB_z\right)+$$
$$+\partial_x\left(E_x+iB_x\right)+\partial_y\left(E_y+iB_y\right)+\partial_z\left(E_z+iB_z\right)=0\to div\vec{B}=0,$$
$$-\partial_x\left(E_y-iB_y\right)+\partial_y\left(E_x-iB_x\right)+\frac{(-i)}{c}\partial_t\left(E_z-iB_z\right)+$$
$$-\partial_x\left(E_y+iB_y\right)+\partial_y\left(E_x+iB_x\right)+\frac{(i)}{c}\partial_t\left(E_z+iB_z\right)=0\to\partial_xE_y-\partial_yE_x+\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}=0,$$
$$-\partial_x\left(E_z-iB_z\right)+\partial_z\left(E_x-iB_x\right)-\frac{(-i)}{c}\partial_t\left(E_y-iB_y\right)+$$
$$-\partial_x\left(E_z+iB_z\right)+\partial_z\left(E_x+iB_x\right)-\frac{(i)}{c}\partial_t\left(E_z+iB_z\right)=0\to\partial_zE_x-\partial_xE_z+\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}=0,$$
$$-\partial_y\left(E_z-iB_z\right)+\partial_z\left(E_y-iB_y\right)+\frac{(-i)}{c}\partial_t\left(E_x-iB_x\right)+$$
$$-\partial_y\left(E_z+iB_z\right)+\partial_z\left(E_y+iB_y\right)+\frac{(i)}{c}\partial_t\left(E_x+iB_x\right)=0\to\partial_yE_z-\partial_zE_y+\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}=0.$$

В векторном виде они таковы:

$$rot\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0\to\begin{vmatrix}i&j&k\\\partial_x&\partial_y&\partial_z\\E_x&E_y&E_z\end{vmatrix}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0.$$

В обоих рассмотренных случаях ассоциированная система дифференциальных уравнений одна и та же. Следовательно, дифференциальный $G-$модуль инвариантен относительно действия слева элементов группы заполнения физических моделей. Мы можем дополнить данный модуль нулевым слагаемым, а также слагаемым с изменением знака матриц. По этой причине речь идет об абелевой группе, элементами которой являются дифференциальные $G-$ модули. Эти уравнения имеют форму $G-$модуля, инвариантного относительно действия слева группы заполнения физических моделей. Её элементы задают нульмерную группу когомологий $H^0(G,M)$. Аналогичные результаты получаются для величин в электродинамике. Их можно представить выражением в форме нового $G-$модуля:

$$\left\{i\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\partial_x+i\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+i\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{(-1)}{c}\partial_t\right\}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\\-i\varphi\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}\Psi_1\\\Psi_2\\\Psi_3\\\Psi_4\end{Vmatrix}.$$

Из него следуют компоненты спинора, указанного выше

$$\Psi_1=-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right),...$$

Умножим данный $G-$модуль слева на указанную выше матрицу. Получим

$$\left\{i\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\partial_x+i\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\partial_y+i\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\partial_z+\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{(-1)}{c}\partial_t\right\}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\\-i\varphi\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}\Psi_1\\\Psi_2\\\Psi_3\\\Psi_4\end{Vmatrix}.$$

Следовательно, величины в электродинамике задают другую нульмерную группу когомологий по группе заполнения физических моделей. В указанных двух моделях можно применить группу перестановок 4 элементов. При умножении на их элементы уравнений электродинамики и величин, заданных в матричной форме, получается одна и та же система

Величины и дифференциальные уравнения, заданные в матричной форме, принадлежат нульмерной группе когомологий как по группе заполнения физических моделей, так и по группе перестановок для 4 элементов. В частности, есть инвариантность относительно четверной группы Клейна. С аналогичной ситуацией мы имеем дело при записи других уравнений физики в матричном виде на основе группы заполнения физических моделей.

1-когомологии характеризуют структуру группового модуля на функциях, подчиненных функциональному уравнению

$$f(g_1g_2)=g_1f(g_2)+f(g_1).$$

Эти условия выполняются тождественно на функции $f(g)=ga-a.$ Группа 1-когомологий есть система элементов, факторизованная этим условием: «удалением» из рассматриваемых функций слагаемых данного типа и аналогичных им самостоятельных элементов.

Сконструируем модель 1-когомологий, обеспечив «выход» на физические модели. Введем функцию

$$f(g) = gha - ha = g(ha - a) + (1 - h)a + (ga - a).$$

Тогда получим

$$g_1 g_2 ha - ha = g_1(g_2 ha - ha) + g_1 ha - ha.$$

Следовательно, элементами группы 1-когомологий будут функции

$$\varphi(g,h,a) = g(ha - a) - (ha - a).$$

$G-$модуль, деформированный указанным образом, принадлежит к группе 1-когомологий. Ранее было отмечено, что когомологии ассоциированы с физическими условиями равновесия в системе физических объектов. По этой причине желательно находить связь этих условий равновесия с технологическим их воплощением. В идеальном случае было бы желательно знать все связи указанных условий и алгоритмы их реализации. Тогда физическая практика обогатит математику спектром новых результатов и идей.

Трансформация коммутативности и фазовые состояния множеств

Известно, что коммутативность и некоммутативность зависят от типа операций, действующих на множестве в форме системы математических объектов. Такое изменение, с точки зрения физика, аналогично изменению фазового состояния в системе физических объектов: например, вода может иметь твердое, жидкое и газообразное состояние. С аналогичной ситуацией мы имеем дело при рассмотрении системы операций на множестве. В частности, операция может изменить коммутативность.

Примем гипотезу о возможности *фазовых состояний системы математических объектов*, связывая их с действием на множестве системы операций.

Рассмотрим конкретный пример: произведение пары некоммутативных матриц. На матричной операции получим

$$a \overset{m}{\times} b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b \overset{m}{\times} a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{m}{\times} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведение этих матриц на координатной операции коммутативно и генерирует новую матрицу:

$$a \overset{c}{\times} b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = b \overset{c}{\times} a.$$

Произведение этих матриц на логической операции, ассоциированной с четверной группой Клейна, коммутативно и генерирует новую матрицу:

$$\overset{l}{a \times b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overset{l}{b \times a}.$$

Произведение этих матриц на комбинаторной операции некоммутативно:

$$\overset{k}{a \times b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overset{k}{b \times a}.$$

Свойства и действия «итоговых» матриц различны, *множество имеет разные фазы*.

Перестановочная инвариантность матричных уравнений электродинамики

Уравнения электродинамики записаны ранее на основе пары кватернионов. Дифференциальные уравнения проще связей между полями и индукциями. Однако в обоих случаях они не меняются при умножении их слева на матрицы группы перестановок. Проиллюстрируем это обстоятельство на уравнениях для связей. Получим перестановку строк:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \to$$

$$\to \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \to$$

$$\to \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\times\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&-w\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\w^{-1}&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-w\\1&0&0&0\\0&w^{-1}&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-w\\0&0&w^{-1}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right\}\to$$

$$\to\left\{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&-1&0&0\\w^{-1}&0&0&0\\0&0&0&-w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&-w\\1&0&0&0\\0&w^{-1}&0&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&-w\\0&0&w^{-1}&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\right\},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\times\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&w\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-w^{-1}&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&w\\1&0&0&0\\0&-w^{-1}&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&w\\0&0&-w^{-1}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right\}\to$$

$$\to\left\{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-w^{-1}&0&0&0\\0&0&0&w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&w\\1&0&0&0\\0&-w^{-1}&0&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&w\\0&0&-w^{-1}&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

В этом случае уравнения для связей между полями и индукциями не меняются. Аналогично анализируются дифференциальные уравнения.

Ситуация несколько иная, если выполнить умножение уравнений электродинамики слева на матрицы более общего вида. Рассмотрим, например, произведение

$$\begin{pmatrix}\alpha&0&0&\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\delta&0&0&\alpha\end{pmatrix}\times\left\{\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\right\}\to$$

$$\to\left\{\begin{pmatrix}0&-\beta&\alpha&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-\alpha&\delta&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta&0&0&-\alpha\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\\alpha&0&0&-\delta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\alpha&0&0&-\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\delta&0&0&-\alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&\delta&\alpha&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Выполнено согласованное дополнение элементов в строках, которое не разрушает исходные уравнения. В частности, такие изменения вносит в модель группа Лорентца. Аналогично действует на дифференциальных уравнениях группа Галилея.

Рассмотрим матрицы более общего вида. Они образуют группу:

$$\begin{pmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\c_1&0&0&d_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_2&0&0&b_2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\c_2&0&0&d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2+c_1c_2&0&0&a_1b_2+b_1d_2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\c_1a_2+d_1c_2&0&0&c_1b_2+d_1d_2\end{pmatrix}.$$

Матричное произведение ассоциативно. Есть обратные элементы, следующие из системы уравнений

$$a_1a_2+c_1c_2=1,$$
$$c_1a_2+d_1c_2=0,$$
$$a_1b_2+b_1d_2=0,$$
$$c_1b_2+d_1d_2=1.$$

Например, получим

$$a_2=-\frac{d_1}{c_1}c_2, c_2=\left(c_1-\frac{d_1}{c_1}a_1\right)^{-1},$$
$$b_2=-\frac{b_1}{a_1}d_2, d_2=\left(d_1-\frac{c_1}{a_1}b_1\right)^{-1}.$$

Естественна группа «вихрь» с элементами

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & e_1 & f_1 & 0 \\ 0 & g_1 & h_1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Возможно рассмотрение нелинейного пространства параметров, согласованного с произведением матриц. Получим соответствия для пар векторов, имеющих 4 компоненты:

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\hat{+}(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1a_2+c_1c_2,b_1d_2+a_1b_2,c_1a_2+d_1c_2,d_1d_2+c_1b_2),$$

$$(e_1,f_1,g_1,h_1)\hat{+}(e_2,f_2,g_2,h_2)=(e_1e_2+g_1g_2,f_1h_2+e_1f_2,g_1e_2+h_1g_2,h_1h_2+g_1f_2).$$

Мы вправе сказать, что инвариантность $G-$модулей обеспечивается совокупностью алгоритмов, реализующихся в нелинейном пространстве параметров.

Параметрическое обобщение группы подстановок не меняет существа подхода. Рассмотрим, например, произведение вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\times\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\to$$
$$\to\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Каждая строка умножена на один и тот же ненулевой параметр. Поэтому для уравнений с нулевой правой частью ситуация не изменяется.

Уравнения инвариантны относительно совокупности «масштабных» преобразований, так как эти масштабы можно применять для изменения координат в каждой строке.

Фактически речь идет об обнаружении нового свойства рассматриваемых уравнений: уравнения могут применяться на разных масштабах длин и времен. Более того, они действительны на спектре размеров.

Заметим, что обычно рассматривается изменение элементов некоторого множества под действием операции или системы операций. Можно условно считать, что «жизнь элементов множества» зависит от операций.

С другой стороны, следуя алгоритму структурной операции, есть операции, зависящие от структуры анализируемых элементов. Эта «подсказка» инициирует идею, что «жизнь системы операций» зависит от элементов множеств, на которых эти операции реализуют себя.

В общей формулировке примем закон: *элементы множеств софистатны операциям, действующим в этих множествах.*

Согласно ранее принятому определению софистатность есть взаимная трансфинитность. Другими словами, указанная связь может и должна иметь много граней, сторон, свойств, функций.

Многообразие элементов софистатно многообразию операций.

Согласно принятому подходу, в частности, конечному набору элементов может и должна быть сопоставлена конечная система операций. В алгебре обычно поступают именно так.

С физической точки зрения, у объектов может быть много свойств, ассоциированных не только с их структурой, но и с системой взаимодействий, которые характерны для них. Принятые условия анализа естественно усложняются при согласованном рассмотрении не только физических тел, но и тел Сознаний и Чувств.

Модель неассоциативной алгебры Лейбница

Проанализируем свойства системы элементов, подчиненных паре структурных мультипликативных операций. Зададим эти операции на основе структуры матриц группы перестановок S_3. Введем 1-операцию для трех произвольных элементов:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{array}{|c|ccc|}\hline \overset{1}{\times} & a & b & c\\ \hline a & a & b & c\\ b & c & a & b\\ c & b & c & a\\ \hline\end{array}.$$

Введем 2-операцию для трех произвольных элементов:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{array}{|c|ccc|}\hline \overset{2}{\times} & a & b & c\\ \hline a & a & b & c\\ b & b & c & a\\ c & c & a & b\\ \hline\end{array}.$$

Определим коммутатор на двух операциях, применяя стандартным образом операцию вычитания, выражением

$$[\xi,\eta]=\xi\overset{1}{\times}\eta-\eta\overset{2}{\times}\xi.$$

Получим коммутаторы

$$[a,b]=[a,c]=0,[b,c]=b-a,[c,b]=c-a,[b,a]=c-b,[c,a]=b-c.$$

Анализируемое множество неассоциативно. Например, получим

$$[b,[a,c]]=0,[[b,a],c]=2(a-b).$$

В рассматриваемом случае

$$\langle\xi,\eta\rangle=[\xi,\eta]-[\eta,\xi],$$

$$\langle a,b\rangle=\langle b,c\rangle=\langle c,a\rangle=b-c\,.$$

Отсюда следует, что

$$[a,\langle b,c\rangle]+[b,\langle c,a\rangle]+[c,\langle a,b\rangle]=0.$$

Действительно, получим

$$(a+b+c)\overset{1}{\times}(b-c)-(b-c)\overset{2}{\times}(a+b+c)=0.$$

В другой записи получим выражение

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=[a,[c,b]]+[b,[a,c]]+[c,[b,a]].$$

Эти формулы задают неассоциативную алгебру Лейбница, в которой $[\xi,\eta]\neq-[\eta,\xi]$.

Геометрия обобщенной алгебры Лейбница

Определим пару ассоциированных операций для 4 объектов произвольной природы в форме элементов(a,b,c,d) на основе четверной группы Клейна и её смежного класса. Получим ассоциированную 1-операцию вида

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$\overset{as}{\times\Rightarrow1}$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

.

Получим ассоциированную 2-операцию вида

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$\overset{as}{\times\Rightarrow2}$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	c	b	a
c	c	d	a	b
d	b	a	d	c

.

Рассмотрим обобщенный коммутатор

$$[\xi,\eta]=\xi(1)\eta-\eta(2)\xi.$$

Получим выражения

$$\begin{gathered}[a,b]=b-d,[a,c]=0,[a,d]=d-b,\\ [b,a]=0,[b,c]=0.[b,d]=c-a,\\ [c,a]=0,[c,b]=d-b,[c,d]=b-d,\\ [d,a]=0,[d,b]=c-a,[d,c]=0.\end{gathered}$$

Определим *основной закон* как зависимость, которая имеет место для большинства сочетаний элементов множества. Определим *сопутствующий закон* как зависимость, которая имеет место для некоторого меньшинства сочетаний элементов множества. В рассматриваемом случае для обычных коммутаторов и для сложного коммутатора справедлив основной закон

$$\big[a,\big[b,[c,d]\big]\big]+\big[b,\big[c,[d,a]\big]\big]+\big[c,\big[d\,[a,b]\big]\big]+\big[d,\big[a,[b,c]\big]\big]=0.$$

Его структура аналогична структуре дифференциальных уравнений, на основе которых объединена гравитация и электромагнетизм

$$\partial_i\partial_j\Phi_{kl}+\partial_j\partial_k\Phi_{li}+\partial_k\partial_l\Phi_{ij}+\partial_l\partial_i\Phi_{jk}=0.$$

Его структура аналогична условиям физического равновесия для объектов вида

$$g_i g_j f(g_k,g_l)+g_j g_k f(g_l,g_i)+g_k g_l f(g_i,g_j)+g_l g_i f(g_j,g_k)=0.$$

Теперь функциональные условия равновесия, система дифференциальных уравнений, основной закон в обобщенной алгебре Лейбница имеют одинаковый структурный тип.

Второй основной закон имеет вид

$$\big[a,[a,b]\big]+\big[b,[b,c]\big]+\big[c,[c,d]\big]+\big[d,[d,a]\big]=0.$$

Сопутствующий закон для первой и второй операций таков:

$$\big[a,[b,c]\big]+\big[b,[c,a]\big]+\big[c,[a,b]\big]=0.$$

Каждое произведение, равно как и сложное произведение задают *основной закон треугольника отношений:*

$$\big[\big[[\xi,\eta]\big]\big[[\eta,\zeta]\big]\big]=\big[[\xi,\zeta]\big]\to a^2\cdot b^2=c^2.$$

Аналогом этого закона в евклидовой геометрии является закон для прямоугольного треугольника: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. В пространстве отношений сложение заменяется умножением, в качестве аналога расстояния применяется коммутатор.

Есть сопутствующий закон вида

$$\left[[\xi,\eta],[\eta,\zeta]\right]=[\xi,\zeta].$$

Расположим элементы на одной линии:

a	$\leftrightarrow$	b	$\leftrightarrow$	c	$\leftrightarrow$	d

.

На указанных ассоциативных операциях получим основной закон

$$\left[[a,b],[c,d]\right]=\left[[a,d],[c,b]\right]\to ab\cdot cd=ad\cdot cb.$$

Он нарушается при изменении порядка сомножителей. Назовем изменение порядка сомножителей изменением ориентации. Тогда справедливо заключение: *изменение ориентации способно нарушить основной закон.*

С принятием принципа трансфинитности реальности по её структуре и активности, мы принимаем основные законы, не отрицая и не опровергая сопутствующие законы. Каждый закон имеет право на жизнь при оптимальных для него условиях реализации. Многое необычное возможно, и не всегда оптимален для конкретной ситуации основной закон функционирования структур и активностей.

С логической точки зрения ясно, что объекты и операции могут быть значительно более сложные. В частности, это могут быть многократные операции с дополнительными свойствами. Это могут быть сочетания операций в определенной последовательности. Ситуация усложняется при введении элементов динамики для операций. Естественна эволюция операций.

Наложение ассоциированных операций

Выполним наложение таблиц ассоциированных произведений друг на друга, задавая произведение совпадающих элементов в соответствии с исходными таблицами произведений. Получим такие варианты:

$\underset{1}{\overset{n}{1\times 1}}$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	a	a

,

$\underset{2}{\overset{n}{2\times 2}}$	a	b	c	d
a	a	c	a	c
b	c	a	c	a
c	a	c	a	c
d	c	a	c	a

,

$\underset{1}{\overset{n}{1\times 2}}$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	c	c	c	c
c	a	a	a	a
d	c	c	c	c

,

$\underset{2}{\overset{n}{2\times 1}}$	a	b	c	d
a	a	c	a	c
b	a	c	a	c
c	a	c	a	c
d	a	c	a	c

,

$1\underset{2}{\overset{n}{\times}}2$	a	b	c	d
a	a	c	a	c
b	a	c	a	c
c	a	c	a	c
d	a	c	a	c

,

$2\underset{1}{\overset{n}{\times}}1$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	c	c	c	c
c	a	a	a	a
d	c	c	c	c

.

Произведения указанного вида применялись ранее на основе других предположений. Это обстоятельство свидетельствует о наличии системы условий, достаточных для реализации одной системы произведений. На основе принципа софистатности операций и условий их реализации мы вправе предположить, что одному условию может соответствовать система операций. Интерес представляет факт симметрии при взаимном наложении пары произведений. Общая структура новых произведений имеет характерную черту, состоящую в том, что они «способны к генерации» только выделенных элементов, хотя в динамических явлениях участвуют все объекты. В частном случае система генерирует только объекты одного типа. Эта модель подсказывает возможность создания качественно новых технологических устройств. Генерация объектов одного типа из системы разных объектов может быть принципиально важна при создании новых материалов и энергетических устройств. Наложению операций логически можно поставить в соответствие последовательность технологических операций разных типов. Их реализация может сущностно отличаться от математической модели, на основе которой делаются оценки ситуации и предположения о возможности новых экспериментальных реализаций.

Многообразие коммутаторов и взаимосвязи между ними

В рассматриваемом случае на паре ассоциированных операций действуют 4 операции. Пара операций в коммутаторе может соответствовать одному типу произведений, операции могут в разном порядке следовать друг за другом. По этой причине к коммутаторам можно присоединить нижний и верхний индексы, указывая принятую последовательность операций в коммутаторах. Получим таблицу коммутаторов на паре ассоциированных операций:

$[\xi,\eta]$	$[\xi,\eta]_2^1$	$[\xi,\eta]_1^1$	$[\xi,\eta]_1^2$	$[\xi,\eta]_2^2$
$[a,a]$	0	0	0	0
$[a,b]$	0	0	$b-d$	$b-d$
$[a,c]$	0	0	0	0
$[a,d]$	0	0	$d-b$	$d-b$
$[b,a]$	$d-b$	0	0	$d-b$
$[b,b]$	$c-a$	0	$a-c$	0
$[b,c]$	$b-d$	0	0	$b-d$
$[b,d]$	$a-c$	0	$c-a$	0
$[c,a]$	0	0	0	0
$[c,b]$	0	0	$d-b$	$d-b$
$[c,c]$	0	0	0	0
$[c,d]$	0	0	$b-d$	$b-d$
$[d,a]$	$b-d$	0	0	$b-d$
$[d,b]$	$a-c$	0	$c-a$	0
$[d,c]$	$d-b$	0	0	$d-b$
$[d,d]$	$c-a$	0	$a-c$	0

.

Система коммутаторов подчинена закону

$$[\xi,\eta]_2^1+[\xi,\eta]_1^2=[\xi,\eta]_2^2.$$

Сумма пары коммутаторов на разных операциях равна коммутатору на одной операции. Коммутаторы на двух операциях «охватывают» все элементы исходного множества. Коммутаторы на одной операции произведения «охватывают» часть элементов исходного множества. Коммутаторы равны нулю на коммутативной операции.

Многообразие содержит 16 элементов вида $\sigma=\mp(b-d)$. Они подчинены закону

$$\{\sigma,\sigma\}_i^j=\sigma(i)\sigma+\sigma(j)\sigma=0.$$

Многообразие содержит 8 элементов вида $\pi=\mp(c-a)$. Они подчинены закону

$$[\pi,\pi]_i^j=\pi(i)\pi-\pi(j)\pi=0.$$

Коммутаторное управление

Группа перестановок 4 элементов содержит матрицы, относящиеся к сектору управления физическими объектами и явлениями, выполняя функции, аналогичные четверной группе Клейна. В частности, таков смежный класс E. Таблица ассоциированных произведений для матриц этого типа имеет вид

$\overset{as}{\times}$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	d	c	b	a
d	b	a	d	c

,

Прямой расчет показал, что это произведение не подчиняется основным и вспомогательным законам, указанным выше. Следовательно, оно генерирует некоторый другой закон, который может выполнять функции дополнительного основного закона. Получим новый закон, анализируя соотношение

$$[a,b]\cdot[b,a]\mp[b,c]\cdot[c,b]+[c,d]\cdot[d,c]\mp[d,a]\cdot[a,d]=0.$$

Он естественно выполняется на четверной группе Клейна, так как коммутаторы для неё равны нулю. Он выполняется на смежном классе E с таблицей ассоциированных произведений, указанной выше.

Получим соотношения

$$[a,b]=b-c,[b,a]=c-b,[a,b]\cdot[b,a]=a-d-b+c=(a+c)-(b+d),$$
$$[b,c]=a-c,[c,b]=c-a,[b,c]\cdot[c,b]=-a+d-b+c=-(a-c)-(b-d),$$

$$[c,d]=a-d,[d,c]=d-a,[c,d]\cdot[d,c]=-a+d+b-c=-(a+c)+(b+d),$$
$$[d,a]=b-d,[a,d]=d-b,[d,a]\cdot[d,a]=a-d+b-c=-(a-c)+(b-d).$$

На смежном классе B выполняется закон

$$[a,b]\cdot[b,a]-[b,c]\cdot[c,b]+[c,d]\cdot[d,c]-[d,a]\cdot[a,d]=0.$$

Его можно рассматривать как основной закон для четверной группы Клейна, а также для смежных классов A, B, E.

Мы получили циклическое условие нового типа. В нем соединены условия для волновых функций вида

$$f(g_i,g_j)\cdot f(g_j,g_i)+f(g_j,g_k)\cdot f(g_k,g_j)+f(g_k,g_l)\cdot f(g_l,g_k)+f(g_l,g_m)\cdot f(g_m,g_l)=0.$$

Согласно принципу соответствия между функциональными и дифференциальными уравнениями, на практике могут найти применение дифференциальные уравнения второго порядка для скалярных функций, подчиненные указанному соотношению.

Антикоммутаторы на ассоциированных операциях

Следуя принятой идеологии, алгебраические свойства многообразий необходимо анализировать с трех сторон: на основе структуры и законов, соответственно, для коммутаторов, антикоммутаторов и моделей их смешения. По этой причине естественно рассмотреть соотношения для антикоммутаторов.

В качестве базовых элементов примем выражения

$$\theta_i^j(a)=\{a\{b\{cd\}\}\}_i^j,\theta_i^j(b)=\{b\{c\{da\}\}\}_i^j,\theta_i^j(c)=\{c\{d\{ab\}\}\}_i^j,\theta_i^j(d)=\{d\{a\{bc\}\}\}_i^j.$$

Из прямого расчета согласно таблице произведений получим такие результаты:

$$\theta_1^1(a)=\theta_1^1(b)=\theta_1^1(c)=\theta_1^1(d)=a,$$

$$\theta_2^2(a)=\theta_2^2(b)=\theta_2^2(c)=\theta_2^2(d)=2(a+c),$$

$$\theta_2^1(a)=\theta_2^1(b)=\theta_2^1(c)=\theta_2^1(d)=2(a+c),$$

$$\theta_1^2(a)=\theta_1^2(a)=\theta_1^2(a)=\theta_1^2(a)=2(a+c).$$

Следовательно, справедлив циклический закон

$$\theta_i^j(a)-\theta_i^j(b)+\theta_i^j(c)-\theta_i^j(d)=0.$$

Его элементы обладают свойством сохранять сумму элементов a, c.

В другой записи закон выглядит так

$$\left\{a\left\{b\left\{cd\right\}\right\}\right\}_i^j-\left\{b\left\{c\left\{da\right\}\right\}\right\}_i^j+\left\{c\left\{d\left\{ab\right\}\right\}\right\}_i^j-\left\{d\left\{a\left\{bc\right\}\right\}\right\}_i^j=0.$$

Закон ассоциирован с упорядоченным расположением элементов согласно геометрическому «циклу»

d	$\rightarrow$	a
$\uparrow$		$\downarrow$
c	$\leftarrow$	b

.

Эти обстоятельства интересны с разных точек зрения.

Во-первых, полученное циклическое уравнение на антикоммутаторах аналогично введенному ранее циклическому уравнению на коммутаторах. Поскольку с уравнениями такого типа мы ассоциируем циклические дифференциальные уравнения, мы вправе ожидать наличие пары уравнений, дополнительных друг другу.

Во-вторых, антикоммутаторы инвариантны относительно выбора ассоциированной операции: получаются одинаковые выражения на разных операциях.

В-третьих, так или иначе, анализ учитывает геометрическую цикличность элементов анализируемого множества.

В-четвертых, структура базовых объектов не детализируется, законы верны для любой совокупности объектов, если они подчинены системе ассоциированных произведений.

В-пятых, если антикоммутаторам соответствует генерация гравитации, мы получаем новый аргумент в пользу фундаментальности гравитационных свойств для любых физических объектов.

Выражения, полученные на основе анализа коммутаторов и антикоммутаторов, скореллированы с матричным произведением элементов четверной группы Клейна. Действительно, обозначим её элементы

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.
a	b	c	d

Тогда

$$a+c=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},b+d=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Эти матрицы подчинены соотношениям

$$(a+c)\overset{m}{\otimes}(a+c)=(a+c)+(a+c)=2(a+c),$$

$$(b+d)\overset{m}{\otimes}(b+d)=2(a+c),$$

$$\left(a+c\right)\overset{m}{\otimes}\left(b+d\right)=\left(b+d\right)\overset{m}{\otimes}\left(a+c\right)=2\left(b+d\right).$$

Аналогично получим

$$a-c=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b-d=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы подчинены соотношениям

$$\left(a-c\right)\overset{m}{\otimes}\left(a-c\right)=\left(a-c\right)+\left(a-c\right)=2\left(a-c\right),$$

$$\left(b-d\right)\overset{m}{\otimes}\left(b-d\right)=2\left(a-c\right),$$

$$\left(a-c\right)\overset{m}{\otimes}\left(b-d\right)=\left(b-d\right)\overset{m}{\otimes}\left(a-c\right)=2\left(b-d\right).$$

Выражения вида

$$\left(a-c\right),\left(a+c\right),\left(b-d\right),\left(b+d\right)$$

задают «алфавит» для коммутаторов и антикоммутаторов.

Следовательно, с одной стороны, данные циклические законы *наследуют свойства* матричного произведения базовых матриц. С другой стороны, циклические коммутаторы и антикоммутаторы есть элементы алгебры для данного алфавита.

Множество элементов имеет делители нуля:

$$\left(a-c\right)\overset{m}{\otimes}\left(a+c\right)=\left(b-d\right)\overset{m}{\otimes}\left(b+d\right)=0_4.$$

Суммирование пар элементов четверной группы Клейна генерирует элементы алгебры. Их взаимные произведения не выходят за пределы рассматриваемой совокупности.

На смежном классе E справедлив закон

$$\left\{a,b\right\}\cdot\left\{b,a\right\}-\left\{b,c\right\}\cdot\left\{\mathrm{c},b\right\}+\left\{c,d\right\}\cdot\left\{d,c\right\}-\left\{d,a\right\}\cdot\left\{a,d\right\}=0.$$

Каждое из указанных произведений пары антикоммутаторов дает результат вида

$$\left\{a,b\right\}\cdot\left\{b,a\right\}=\left(a+c\right)+\left(b+d\right),...$$

Многообразие антикоммутаторов имеет однородную структуру, оно инвариантно относительно выбора пары соседних элементов.

Логическая трансформация объектов

Психологи исследуют объекты, которые имеют ощущения и способны к изменениям на основе не только внешних воздействий, но и внутренних оценок и побуждений. Для математического описания явлений указанного типа желательно сконструировать модели, вмещающие в себя элементы творчества и психологической практики. Конечно, такие возможности есть. Рассмотрим, в частности, вариант самовоздействия на основе операций, учитывающих структуру изделия и алгоритмы её логической трансформации сообразно модели изделия.

Примем операцию перестановки значимых элементов на количество шагов сообразно сумме номеров, соответствующих строке и столбцу, оцениваемых по модулю числа, равного размерности рассматриваемых матриц. Конкретно алгоритм на операции, обозначенной символом $\left(\overset{*}{+}\right)$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \left(1+1=2, \quad 2+2=1, \quad 3+3=3\right) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \left(1+3=1, \quad 2+3=2, \quad 3+3=3\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить соответствия элементов пары множеств, имеющих разные свойства. Одно множество есть группа на матричной операции. Другое множество на этой операции есть полугруппа. Соответствие представим таблицей:

G	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\updownarrow\left(\overset{*}{+}\right)$	$\updownarrow\left(\overset{*}{+}\right)$	$\updownarrow\left(\overset{*}{+}\right)$	$\updownarrow\left(\overset{*}{+}\right)$
P	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

.

Логическое самовоздействие реализует не только взаимную трансформацию группы и полугруппы. Мы имеем модель взаимного превращения друг в друга объектов разного типа. Имеет место взаимное превращение мономиальных матриц в идеалы. Согласно интерпретации, принятой для описания тонкой материи, ему соответствует взаимное превращение электрических и гравитационных предзарядов. При моделировании явлений в психологии можно говорить о взаимном превращении мужских и женских типов.

Поскольку в физической теории используются группы, полугруппу можно рассматривать в качестве пассивной, скрытой группы, способной превратиться в неё при реализации самовоздействия. С другой стороны, группа способна на основе самовоздействия превратиться в полугруппу. Принимая софистатность математики и физики, следует найти в физической практике проявления обнаруженных математических свойств.

Указанная операция позволяет по элементам четверной группы Клейна ввести элементы смежного класса этой группы:

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$
$(2424)\downarrow$	$(3333)\downarrow$	$(4242)\downarrow$	$(1111)\downarrow$
$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

.

Вторая пара матриц смежного класса получается при суммировании разных матриц на данной операции. Получим

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}*\\+\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$
(2424)	$\begin{pmatrix}*\\+\end{pmatrix}$	(3333)	$=$	(1313)

.

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}*\\+\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$
(2424)	$\begin{pmatrix}*\\+\end{pmatrix}$	(1111)	$=$	(3131)

.

Следовательно, операция самогенерации и взаимной генерации генерирует из четверной группы Клейна элементы смежного класса. Мы получаем операционное расширение группы перестановок. В рассматриваемом случае обратной генерации на указанной операции не происходит.

Изменение расположения элементов на основе суммы или наличия по модулю значимых мест меняет ситуацию. Примем модель расположения элементов в итоговой матрице по строкам, согласно полученным значениям. Так формально реализуется вариант «самовоздействия» объектов, базирующийся на алгоритме оценки ситуации и «ключа» к её изменению.

В анализируемом варианте имеют место соответствия согласно таблице:

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\left(\overset{*}{+}\right)$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2&4&2&4\end{pmatrix}$	$+$	$\begin{pmatrix}2&4&2&4\end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix}4&4&4&4\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\left(\overset{*}{+}\right)$	$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3&3&3&3\end{pmatrix}$	$+$	$\begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix}3&3&3&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\left(\overset{*}{+}\right)$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3&3&3&3\end{pmatrix}$	$+$	$\begin{pmatrix}3&3&3&3\end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix}2&2&2&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\left(\overset{*}{+}\right)$	$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}$	$+$	$\begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}$

.

К аналогичным результатам мы приходим при указанном суммировании элементов смежного класса. Следовательно, есть операторный алгоритм преобразования матриц одного типа в матрицы другого типа. Анализируемые матрицы имеют *векторное представление* по сумме номеров значимых мест в строках и столбцах:

$$a=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\2\\4\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$e=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix},f=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix},g=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4\end{pmatrix},h=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Их свойства на новой операции «обратны» свойствам, которые имела система элементов на матричной операции. На матричной операции есть группа Клейна и её смежный класс.

На новой операции получим соотношения

$$aa=cc=4444, bb=dd=2222, ab=cd=1313, bc=ad=3131,$$
$$ee=gg=4444, ff=hh=2222, ef=gh=1313, eh=fg=3131.$$

Согласно им, теперь смежный класс генерирует себя, четверная группа Клейна генерирует смежный класс. У смежного класса есть единица и обратные элементы. В системе элементов *операция изменила «лидерство»*: элементы группы на матричной операции стали элементами смежного класса на новой операции. Одно множество генерирует две групп: группу на матричной операции и группу на операции суммирования номеров значимых мест. Операция «проявляет» группу.

Таблицы логического и матричного произведений имеют вид:

$\overset{l}{+}$	g	h	e	f
g	g	h	e	f
h	h	e	f	g
e	e	f	g	h
f	f	g	h	e

,

$\overset{m}{\times}$	e	f	g	h
e	a	b	c	d
f	d	c	b	a
g	c	d	a	b
h	b	a	d	c

.

Анализируемые матрицы имеют другое *векторное представление* при расположении «индикаторов» по номерам значимых мест в строках:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}.$$

Эти элементы на рассматриваемой операции суммирования компонент «векторов» по модулю числа, равного размерности матриц, образуют группу. Она не изоморфна предыдущей группе. Следовательно, «векторное» представление системы матриц генерирует пару неизоморфных групп, имеет две грани, две стороны. Это обстоятельство «скрыто» на матричной операции. Аналогичное свойство было обнаружено ранее при анализе операций с числами в рамках модели проективной геометрии. Числа «ведут себя» по-разному на операции суммировании и на операции умножения.

На данной стадии анализа ясно, как можно учесть иерархию *в любой системе* исследуемых объектов. Мы вправе дополнить каждый её элемент «вектором иерархии», ассоциируя с ним «векторы», которые представляют матрицы. Тогда оценка объектов и их взаимодействий может проводиться не по внешним проявлениям объектов, например, на основе анализа их структуры, а по внутренним признакам, соответствующим его «векторному» статусу. Тогда итоги и механизмы взаимодействия объектов с присоединенным к ним «векторным» свойствам будут дополнять те свойства, которые были у них до введения этой операции. Аналогично к элементам множество можно «прикрепить» другие величины и операторы. Так конструируется изделие, содержащее систему «рецепторов» с разными реакциями на одно и то же воздействие. При дополнении модели комбинаторикой соединения элементов и динамическими процедурами, мы приближаем формальную задачу к реальным задачам взаимодействия объектов, обладающих совокупностью свойств. Представляет интерес задача анализа системы функций, сконструированных на «векторах» матриц. Применим к анализируем матрицам структурную операцию, согласно которой пара матриц генерирует номера значимых элементов новой матрицы. Суммирование выполняется по модулю числа, равного размерности матриц. Получим, например, соотношения

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2\\4\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

«Вектор» номеров может быть материализован по-разному. Результат зависит от того, какой операции подчинено рассматриваемое множество. В частности, следуя предыдущему анализу, имеем соответствие

$$\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ldots$$

Расчетная ситуация становится более сложной при дополнении модели элементами аддитивной неассоциативности. Для каждой пары величин введем 4 типа аддитивных операций:

$$(+,+),(+,-),(-,-),(-,+).$$

Им соответствуют формулы сложения вида

$$x\overset{1}{\oplus}y=+x+y,\, x\overset{2}{\oplus}y=+x-y,\, x\overset{3}{\oplus}y=-x-y,\, x\overset{1}{\oplus}y=-x+y.$$

Первая операция ассоциативна, три других операции не имеют свойства ассоциативности:

$$x\overset{1}{\oplus}\left(y\overset{1}{\oplus}z\right)=x+y+z,\quad \left(x\overset{1}{\oplus}y\right)\overset{1}{\oplus}z=x+y+z,$$

$$x\overset{2}{\oplus}\left(y\overset{2}{\oplus}z\right)=x-y+z,\quad \left(x\overset{2}{\oplus}y\right)\overset{2}{\oplus}z=x-y-z,$$

$$x\overset{3}{\oplus}\left(y\overset{3}{\oplus}z\right)=-x+y+z,\quad \left(x\overset{3}{\oplus}y\right)\overset{3}{\oplus}z=x+y-z,$$

$$x\overset{4}{\oplus}\left(y\overset{4}{\oplus}z\right)=-x-y+z,\quad \left(x\overset{4}{\oplus}y\right)\overset{4}{\oplus}z=x-y+z.$$

Суммы слагаемых таковы:

$$\sum_{i=1}^{4}\left(a\overset{i}{\oplus}\left(b\overset{i}{\oplus}c\right)\right)_i=2z,\sum_{i=1}^{4}\left(\left(a\overset{i}{\oplus}b\right)\overset{i}{\oplus}c\right)_i=2x.$$

Принимая интерпретацию плюсов и минусов как характеристику отношения объекта к предлагаемой информации, мы получаем отношение факторов ассоциативности к факторам отсутствия ассоциативности в форме закона $p=\frac{1}{3}$. Физические уравнения дополнительно могут быть представлены в разных формах, которые зависят от выбора представления модели. Известен стандартный вариант конструирования присоединенного представления

$$\begin{gathered}gYg^{-1}=\left(1+tX\right)Y\left(1-tX\right)=Y+t\left(XY-YX\right)...\\ g_1g_2Yg_2^{-1}g_1^{-1}=T\left(g_1g_2\right)=T\left(g_1\right)T\left(g_2\right)=g_1(g_2Yg_2^{-1})g_1^{-1}.\end{gathered}$$

Его можно дополнить вариантом, пригодным для коммутативного множества:

$$\begin{gathered}gYg=\left(1+tX\right)Y\left(1+tX\right)=Y+t\left(XY+YX\right)...\\ g_1g_2Yg_2g_1=P\left(g_1g_2\right)=P\left(g_1\right)P\left(g_2\right)=g_1(g_2Yg_2)g_1.\end{gathered}$$

Таковы, в частности, антикоммутаторы. В первом варианте мы имеем дело с коммутатором, удовлетворяя потребности электродинамики. Во втором варианте мы имеем дело с антикоммутатором, удовлетворяя потребности гравитации. При анализе моделей динамики явлений естественно *объединить* два типа представления в одном выражении, дополнив коммутаторы и антикоммутаторы весовыми множителями:

$$\left\langle XY\otimes YX\right\rangle_p^s=p\left(XY-YX\right)+s\left(XY+YX\right).$$

«Игры» расчета и формального анализа могут иметь разные формы и содержание. Однако физическая реальность не обязана подчиняться им. Более того, логика и творчество объективной реальности подчинены, скорее всего, более тонким и совершенным алгоритмам и приемам. Они доступны нам только частично в меру совершенства и ограниченности реализуемой практики.

Заключение

В монографии рассмотрены проблемы единого описания физических и математических объектов и их свойств. Основу анализа составляет концепция отношений. Отношения введены как совокупность свойств изделий, ассоциированных с их структурой и активностью. Структуры анализируются в основном на модели системы матриц, которым сопоставляются реальные физические изделия, в частности, частицы света. Активности рассматриваются на основе реализации системы операций. Принята идеология динамики и эволюции структур и активностей. Теория отношений представлена в формальной, математической форме с истоками в стандартной математике. Она представлена также физическими моделями электромагнетизма, гравитации, системы динамик микромира. Обоснована гипотеза субъядерной структуры генетики, в частности, модель субъядерных кодонов. Указаны новые грани аффинной и проективной геометрий. Обоснованы возможности конструирования новых топологий, индуцированных динамикой и эволюцией структур и активностей.

Литература

1. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел. / Собрание научных трудов. - М.: Наука, 1966, -Т.I-4. -С. 7.
2. Мандельштам Л. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. - М.: Наука, 1972. -432 с.
3. Минковский Г. Вывод основных уравнений для электромагнитных процессов в движущихся телах с точки зрения теории электронов. // Эйнштейн. сборник: 1978-79. - М.: Наука, 1983 С. 64-91.
4. Логунов А.А. Лекции по теории относительности и гравитации. М.: Наука, 1987, 271с.
5. Барыкин В.Н. Новые пространственно-временные симметрии в электродинамике сред. // Изв. вузов. Физика. - 1986. - № 10. - с. 26-30.
6. Барыкин В.Н. О физической дополнительности групп Галилея и Лорентца в электродинамике изотропных инерциально движущихся сред. // Изв. вузов. Физика. - 1989. –N 9. -С. 57-66.
7. Барыкин В.Н. К математическому моделированию электромагнитных явлений в движущемся разреженном газе. // Изв. вузов. Физика. - 1990. -№ 10. - с.54-58.
8. Барыкин В.Н. Атом света. Мн.: изд. Скакун, 2001, -278 с.
9. Барыкин В.Н. Новая физика света. Мн.: «Ковчег», 2003, 434 с.
10. Барыкин В.Н. Электродинамика Максвелла без относительности Эйнштейна. М.: УРСС. 2005.
11. Барыкин В.Н. Лекции по электродинамике и теории относительности без ограничения скорости. М.: УРСС, 2005 (второе издание).
12. Барыкин В.Н. Основы трансфинитной теории относительности. Мн.: «Ковчег», 2007,315 с.
13. Барыкин В.Н. К новому качеству физической теории света. Мн.: «Ковчег», 2011,76 с.
14. Барыкин В.Н. Философия современной физики. Мн.: «Ковчег», 2011, 236 с.
15. Барыкин В.Н. Неассоциативность на комбинаторной операции. Мн.: «Ковчег», 2003, 234 с.
16. Барыкин В.Н. Деформация физических моделей. Мн.: «Ковчег», 2012, 176 с.
17. Барыкин В.Н. Курс фундаментальной физики. Мн.: «Ковчег», 2003, 442 с.
18. Барыкин В.Н. Уроки света. Мн.: «Ковчег», 2013, 172 с.
19. Барыкин В.Н. К новому качеству физической теории. Мн.: «Ковчег», 2003, 214 с.
20. Барыкин В.Н. Модели сознаний и чувств. Мн.: «Ковчег», 2013, 279 с.
21. Барыкин В.Н. Новые математические операции. Мн.: «Ковчег», 2013, 279 с.