УРОК 4. ЗАКОНЫ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ СИСТЕМ

Физики достаточно хорошо исследуют динамику отдельных объектов. Многочисленные приложения и успехи имеет статистическая физика. Значительно скромнее выглядят результаты, относящиеся к моделированию конечных систем. Эта задача особо важна при анализе реальных изделий, изготовленных из конечной совокупности объектов. Было бы желательно получить некие общие условия и закономерность для таких систем. Поскольку, так или иначе, конечные системы имеют симметрийные свойства, хотелось бы найти искомые закономерности на объектах, которыми описываются симметрии. Обычно в роли таких объектов выступают матрицы. Следовательно, требуются некоторые функциональные уравнения на матрицах. Естественно опираться при проведении такого анализа на теорию когомологий групп.

В данном разделе показано, что некоторые общие результаты можно получить на основе системы циклических уравнений. Они задают определенный общий алгоритм отношений между объектами. С ними ассоциированы уравнения для когомологий.

Элементы группы $H^1(G,A)$ можно интерпретировать как классы автоморфизмов группы F, содержащейся в точной последовательности

$$1 \to A \to F \to G \to 1,$$

тождественные на A и на G по модулю сопряжений элементами $a \in A$.

Группа $H^2(G,A)$ задает классы расширений группы A с помощью G на основе эквивалентных наборов факторов. Группа H^3 описывает препятствия к расширению неабелевой группы с центром A с помощью G. Другие группы когомологий не имеют общепринятой интерпретации. Рассмотрим аспекты когомологического моделирования симметрий с целью построения алгоритма применения когомологий в физике. Приведем стандартную таблицу свойств коцепей:

$$df(g) = gf(g) - f(g),$$
$$df(g_1, g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1),$$
$$df(g_1, g_2, g_3) = g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2),$$
$$df(g_1, g_2, g_3, g_4) = g_1 f(g_2, g_3, g_4) - f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_1, g_2 g_3, g_4) -$$
$$- f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_1, g_2, g_3).$$

Группа $H^0(G, A)$. Она соответствует группе гомоморфизмов

$$H^0(G, A) \Rightarrow A^G = \{a \in A | ga = a, \forall g \in G\}.$$

Пример. Рассмотрим следующий вариант:

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, ga_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\gamma} \\ 0 & \tilde{\delta} \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, a_1^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, a(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$ga_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & 0 \\ \tilde{\beta} & 0 \end{pmatrix} = a_1.$$

Пара абелевых групп $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ расширена на основе группы G.

Группа $H^1(G, A)$. Согласно определению

$$H^1(G, A) = {Der(G, A)} \big/ {Ider(G, A)},$$

$$Der(G, A) = \{f : G \to A | g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1), \forall x, y \in G\},$$

$$Ider(G, A) = \{f : G \to A | f(g) = ga - a, \forall g \in G\}.$$

Пример: Решением функционального уравнения

$$g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1) = 0.$$

является, в частности, функция

$$f(g) = ga - a.$$

Другие решения с использованием чисел k_1, k_2 имеют вид

$$f^1(g) = k_1(ga - a),$$
$$f^2(g) = (ga - a)k_2.$$

Отсюда следует, что

$$H^1(G, A) \Rightarrow \{k_i : -k_n ... -k_1, 0, k_1 ... k_n\}.$$

С физической точки зрения функцию $f(g)$ можно рассматривать как характеристику отклонения элемента ga от элемента a. По существу подхода мы описываем таким образом, как структуру, так и активность изделий. Следовательно, когомологии могут иметь прямую связь с физическими свойствами исследуемых объектов и явлений.

Естественно рассмотреть другие варианты. Так, например, для функции

$$f_a(g) = ga - ka.$$

получим неоднородное функциональное уравнение

$$f_a(g_1 g_2) - g_1 f_a(g_2) - k \cdot f_a(g_1) = k(1-k)a.$$

Для функции

$$f_a(g) = \varphi(a)(ga - ka).$$

получим функциональное уравнение вида

$$f_a(g_1 g_2) - g_1 f_a(g_2) - k \cdot f_a(g_1) = \varphi(a)k(1-k)a.$$

Рассмотрим ещё одну возможность. Пусть

$$f(g_1 g_2) - f(g_1)g_2 - g_1 f(g_2) = 0.$$

Тогда

$$f(g_1 g_2) - g_1 f(g_2) - f(g_1) = f(g_1)(g_2 - I) = \Delta_1.$$

Группа $H^2(G, A)$**.** Она характеризует систему функций, которые принято называть факторами расширения группы. Тогда

$$df(g_1,g_2,g_3)=g_1 f(g_2,g_3)-f(g_1g_2,g_3)+f(g_1,g_2g_3)-f(g_1,g_2).$$

В частности, возможен вариант

$$g_1 f(g_2,g_3)-f(g_1g_2,g_3)+f(g_1,g_2g_3)-f(g_1,g_2)=0.$$

Рассмотрим это выражение с другой точки зрения. Учтём стандартное условие ассоциативности для матриц:

$$g_1(g_2g_3)=(g_1g_2)g_3.$$

Запишем его функционально в двух допустимых формах:

$$g_1 f(g_2,g_3)=f(g_1,g_2)g_3,$$
$$f(g_1,g_2g_3)=f(g_1g_2,g_3).$$

Просуммируем эти выражения:

$$g_1 f(g_2,g_3)-f(g_1g_2,g_3)+f(g_1,g_2g_3)-f(g_1,g_2)g_3=0.$$

Дополним их нулевой суммой из двух слагаемых $f(g_1,g_2)$. Получим функциональное уравнение

$$g_1 f(g_2,g_3)-f(g_1g_2,g_3)+f(g_1,g_2g_3)-f(g_1,g_2)=\Delta_2,$$

$$\Delta_2=f(g_1,g_2)(g_3-I).$$

Оно аналогично уравнению для когомологий второго ранга. Отличие в том, что уравнение неоднородно, имеет ненулевую правую часть. Уравнение имеет систему частных решений:

$$f_1(g_1,g_2)=(g_1g_2),$$

$$f_2(g_1,g_2)=\varphi(g_1)\varphi(g_2),$$

$$\varphi(g_1g_2)=\varphi(g_1)g_2+g_1\varphi(g_2).$$

Действительно, первое решение проверяется тривиально, а для второго решения выполняется условие

$$g_1(\varphi(g_2)\varphi(g_3))-(\varphi(g_1)g_2)\varphi(g_3)-(g_1\varphi(g_2))\varphi(g_3)$$
$$+\varphi(g_1)(\varphi(g_2)g_3)+\varphi(g_1)(g_2\varphi(g_3))+(\varphi(g_1)\varphi(g_2))g_3=0.$$

Функция $\varphi(g)$ может иметь матричный вид, что позволяет рассматривать разные её представления. Все они будут принадлежать классу неоднородных когомологий второго ранга. Поскольку указанные действия напоминают дифференцирование с правилом Лейбница, мы получили функциональное дифференцирование с дополнительными степенями свободы.

Группа H^3. Она характеризует препятствия для расширения симметрий. Когомологическое условие имеет вид

$$\Phi(g_1,g_2,g_3,g_4)=$$
$$=g_1 f(g_2,g_3,g_4)-f(g_1g_2,g_3,g_4)+f(g_1,g_2g_3,g_4)-f(g_1,g_2,g_3g_4)+f(g_1,g_2,g_3)=0.$$

Проблема состоит в том, чтобы найти условия физического плана, из которых следует данное выражение. Поскольку число положительных и отрицательных слагаемых различно, решения могут иметь вид, аналогичный решениям, полученным для скрещенных когомологий.

Рассмотрим уравнение

$$g_1 f(g_2,g_3,g_4)-f(g_1g_2,g_3,g_4)+f(g_1,g_2g_3,g_4)-f(g_1,g_2,g_3g_4)+f(g_1,g_2,g_3)g_4=0.$$

Пусть

$$f(g_1,g_2,g_3)=f(g_1)f(g_2)f(g_3),$$

$$f(g_1g_2)=f(g_1)g_2+g_1f(g).$$

Тогда, используя условие ассоциативности, получим тождество на матричнозначных функциях:

$$g_1 f(g_2)f(g_3)f(g_4)-\left(f(g_1)g_2\right)f(g_3)f(g_4)-\left(g_1f(g_2)\right)f(g_3)f(g_4)+$$
$$+f(g_1)\left(f(g_2)g_3\right)f(g_4)+f(g_1)\left(g_2f(g_3)\right)f(g_4)-f(g_1)f(g_2)\left(f(g_3)g_4\right)-$$
$$-f(g_1)f(g_2)\left(g_3f(g_4)\right)+f(g_1)f(g_2)f(g_3)g_4=0.$$

Следовательно,

$$\Delta_3=f(g_1,g_2,g_3)(g_4-I)=-\Phi(g_1,g_2,g_3,g_4)=$$
$$=-g_1f(g_2,g_3,g_4)+f(g_1g_2,g_3,g_4)-f(g_1,g_2g_3,g_4)+f(g_1,g_2,g_3g_4)-f(g_1,g_2,g_3).$$

Когомологический полином, в этом частном случае, показывает отклонение функции $f(g_1,g_2,g_3)g_4$ от значения $f(g_1,g_2,g_3)$:

$$\Phi(g_1,g_2,g_3,g_4)=f(g_1)f(g_2)\big(f(g_3)(I-g_4)\big).$$

Поскольку возможны другие решения, смысловое значение и физическое наполнение когомологического полинома может быть другим. В этом случае, равно как и при решении системы дифференциальных уравнений, мы сталкиваемся с трансфинитностью решений. В зависимости от того, какие условия накладываются на функции, мы будем иметь разные решения на основе одного и того же функционального уравнения.

Когомологические многочлены можно рассматривать теперь как представления системы разностей:

$$\begin{aligned}
&H_1 \Rightarrow \Delta_1 = f(g_1)(g_2-I),\\
&H_2 \Rightarrow \Delta_2 = f(g_1,g_2)(g_3-I),\\
&H_3 \Rightarrow \Delta_3 = f(g_1,g_2,g_3)(g_4-I)...
\end{aligned}$$

Цепочку можно продолжить на когомологии более высоких порядков. В рассмотрение введён новый математический объект. Он может иметь физическую интерпретацию.

Подойдём к исследуемому уравнению для когомологий третьего ранга с другой стороны. Выполним циклическую замену индексов в исходном когомологическом полиноме.

На её основе введём систему ассоциированных когомологических уравнений:

$$\varphi^0(g_1,g_2,g_3,g_4)=g_1f(g_2,g_3,g_4)+g_2f(g_3,g_4,g_1)+g_3f(g_4,g_1,g_2)+g_4f(g_1,g_2,g_3),$$

$$\varphi^1(g_1,g_2,g_3,g_4)=f(g_1g_2,g_3,g_4)+f(g_2g_3,g_4,g_1)+f(g_3g_4,g_1,g_2)+f(g_4g_1,g_2,g_3),$$

$$\varphi^2(g_1,g_2,g_3,g_4)=f(g_1,g_2g_3,g_4)+f(g_2,g_3g_4,g_1)+f(g_3,g_4g_1,g_2)+f(g_4,g_1g_2,g_3),$$

$$\varphi^3(g_1,g_2,g_3,g_4)=f(g_1,g_2,g_3g_4)+f(g_2,g_3,g_4g_1)+f(g_3,g_4,g_1g_2)+f(g_4,g_1,g_2g_3),$$

$$\varphi^4(g_1,g_2,g_3,g_4)=f(g_1,g_2,g_3)+f(g_2,g_3,g_4)+f(g_3,g_4,g_1)+f(g_4,g_1,g_2),$$

$$\varphi^5(g_1,g_2,g_3,g_4)=f(g_1,g_2,g_3)g_4+f(g_2,g_3,g_4)g_1+f(g_3,g_4,g_1)g_2+f(g_4,g_1,g_2)g_3.$$

Альтернированные столбцы этой системы функций при нулевом весе функции φ^5 задают стандартные условие для коцикла вида

$$g_1f(g_2,g_3,g_4)-f(g_1g_2,g_3,g_4)+f(g_1,g_2g_3,g_4)-f(g_1,g_2,g_3g_4)+f(g_1,g_2,g_3)=0.$$

Альтернированные столбцы этой функций при нулевом весе функции φ^4 задают неоднородные когомологические уравнения вида

$$g_1 f(g_2, g_3, g_4) - f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_1, g_2 g_3, g_4) - f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_1, g_2, g_3) g_4 = 0.$$

Расположим в одном месте систему ассоциированных когомологических уравнений для разных групп когомологий.

На группе H^3 имеем (с точностью до цикла по переменным) уравнения вида

$$g_1 f(g_2, g_3, g_4) + g_2 f(g_3, g_4, g_1) + g_3 f(g_4, g_1, g_2) + g_4 f(g_1, g_2, g_3) = 0,$$

$$f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_2 g_3, g_4, g_1) + f(g_3 g_4, g_1, g_2) + f(g_4 g_1, g_2, g_3) = 0.$$

На группе H^2 имеем уравнения вида

$$g_1 f(g_2, g_3) + g_2 f(g_3, g_1) + g_3 f(g_1, g_2) = 0,$$

$$f(g_1 g_2, g_3) + f(g_2 g_3, g_1) + f(g_3 g_1, g_2) = 0,$$

$$f(g_1, g_2 g_3) + f(g_2, g_3 g_1) + f(g_3, g_1 g_2) = 0,$$

$$f(g_1 g_2) + f(g_2 g_3) + f(g_3 g_1) = 0.$$

На группе H^1 имеем уравнения вида

$$g_1 f(g_2) + g_2 f(g_1) = 0,$$

$$f(g_1 g_2) + f(g_2 g_1) = 0,$$

$$f(g_1) + f(g_2) = 0.$$

Стандартные уравнения для коциклов и неоднородные когомологические уравнения получаются для групп H^1, H^2 аналогично алгоритму, предложенному для группы H^3.

Подойдём к исследуемому уравнению для когомологий третьего ранга с другой стороны. Рассмотрим таблицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & + & g_1 f(g_2,g_3,g_4) & g_2 f(g_3,g_4,g_1) & g_3 f(g_4,g_1,g_2) & g_4 f(g_1,g_2,g_3) \\ 2 & - & f(g_1g_2,g_3,g_4) & f(g_2g_3,g_4,g_1) & f(g_3g_4,g_1,g_2) & f(g_4g_1,g_2,g_3) \\ 3 & + & f(g_1,g_2g_3,g_4) & f(g_2,g_3g_4,g_1) & f(g_3,g_4g_1,g_2) & f(g_4,g_1g_2,g_3) \\ 4 & - & f(g_1,g_2,g_3g_4) & f(g_2,g_3,g_4g_1) & f(g_3,g_4,g_1g_2) & f(g_4,g_1,g_2g_3) \\ 5 & + & f(g_1,g_2,g_3) & f(g_2,g_3,g_4) & f(g_3,g_4,g_1) & f(g_4,g_1,g_2) \\ 6 & - & f(g_1,g_2,g_3)g_4 & f(g_2,g_3,g_4)g_1 & f(g_3,g_4,g_1)g_2 & f(g_4,g_1,g_2)g_3 \end{pmatrix}$$

Суммируя элементы таблицы по строкам, получим систему циклических уравнений:

$$\varphi^0(g_1,g_2,g_3,g_4) = g_1 f(g_2,g_3,g_4) + g_2 f(g_3,g_4,g_1) + g_3 f(g_4,g_1,g_2) + g_4 f(g_1,g_2,g_3),$$

$$\varphi^1(g_1,g_2,g_3,g_4) = f(g_1g_2,g_3,g_4) + f(g_2g_3,g_4,g_1) + f(g_3g_4,g_1,g_2) + f(g_4g_1,g_2,g_3),$$

$$\varphi^2(g_1,g_2,g_3,g_4) = f(g_1,g_2g_3,g_4) + f(g_2,g_3g_4,g_1) + f(g_3,g_4g_1,g_2) + f(g_4,g_1g_2,g_3),$$

$$\varphi^3(g_1,g_2,g_3,g_4) = f(g_1,g_2,g_3g_4) + f(g_2,g_3,g_4g_1) + f(g_3,g_4,g_1g_2) + f(g_4,g_1,g_2g_3),$$

$$\varphi^4(g_1,g_2,g_3,g_4) = f(g_1,g_2,g_3) + f(g_2,g_3,g_4) + f(g_3,g_4,g_1) + f(g_4,g_1,g_2),$$

$$\varphi^5(g_1,g_2,g_3,g_4) = f(g_1,g_2,g_3)g_4 + f(g_2,g_3,g_4)g_1 + f(g_3,g_4,g_1)g_2 + f(g_4,g_1,g_2)g_3.$$

Альтернированные суммы элементов, представленных столбцами этой системы функций при нулевом весе функции φ^5, задают стандартные условие для коцикла вида

$$g_1 f(g_2,g_3,g_4) - f(g_1g_2,g_3,g_4) + f(g_1,g_2g_3,g_4) - f(g_1,g_2,g_3g_4) + f(g_1,g_2,g_3) = 0.$$

Альтернированные суммы элементов, представленных столбцами этой системы функций при нулевом весе функции φ^4, задают неоднородные уравнения

$$g_1 f(g_2,g_3,g_4) - f(g_1g_2,g_3,g_4) + f(g_1,g_2g_3,g_4) - f(g_1,g_2,g_3g_4) + f(g_1,g_2,g_3)g_4 = 0.$$

Расположим в одном месте систему уравнений, ассоциированных с когомологиями.

На группе H^3 имеем (с точностью до цикла по переменным) уравнения вида

$$g_1 f(g_2,g_3,g_4) + g_2 f(g_3,g_4,g_1) + g_3 f(g_4,g_1,g_2) + g_4 f(g_1,g_2,g_3) = 0,$$

$$f(g_1g_2,g_3,g_4) + f(g_2g_3,g_4,g_1) + f(g_3g_4,g_1,g_2) + f(g_4g_1,g_2,g_3) = 0.$$

На группе H^2 имеем таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|c|ccc} 1 & + & g_1 f(g_2, g_3) & g_2 f(g_3, g_1) & g_3 f(g_1, g_2) \\ 2 & - & f(g_1 g_2, g_3) & f(g_2 g_3, g_1) & f(g_3 g_1, g_2) \\ 3 & + & f(g_1, g_2 g_3) & f(g_2, g_3 g_1) & f(g_3, g_1 g_2) \\ 4 & - & f(g_1, g_2) & f(g_2, g_3) & f(g_3, g_1) \\ 5 & + & f(g_1 g_2) g_3 & f(g_2 g_3) g_1 & f(g_3 g_1) g_2 \\ 6 & - & f(g_1, g_2, g_3) & f(g_2, g_3, g_1) & f(g_3, g_1, g_2) \end{array}\right).$$

Их сумма по строкам даёт циклические уравнения:

$$g_1 f(g_2, g_3) + g_2 f(g_3, g_1) + g_3 f(g_1, g_2) = 0,$$

$$f(g_1 g_2, g_3) + f(g_2 g_3, g_1) + f(g_3 g_1, g_2) = 0,$$

$$f(g_1, g_2 g_3) + f(g_2, g_3 g_1) + f(g_3, g_1 g_2) = 0,$$

$$f(g_1, g_2) + f(g_2, g_3) + f(g_3, g_1) = 0,$$

$$f(g_1 g_2) g_3 + f(g_2 g_3) g_1 + f(g_3 g_1) g_2 = 0,$$

$$f(g_1, g_2, g_3) + f(g_2, g_3, g_1) + f(g_3, g_1, g_2) = 0.$$

Сумма четырёх элементов по столбцам с учётом знаков таблицы даёт когомологические уравнения:

$$g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2, g_3) - f(g_1, g_2) = 0,$$

$$g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2) g_3 = 0,$$

$$g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2, g_3) - f(g_1, g_2) = 0.$$

На группе H^1 имеем уравнения вида

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & + & g_1 f(g_2) & g_2 f(g_1) \\ 2 & - & f(g_1, g_2) & f(g_2, g_1) \\ 3 & + & f(g_1) & f(g_2) \\ 4 & - & f(g_1 g_2) & f(g_2 g_1) \\ 5 & + & f(g_1) g_2 & f(g_2) g_1 \end{array}\right).$$

Их сумма по столбцам даёт когомологические уравнения:

$$g_1 f(g_2) - f(g_1, g_2) + f(g_1) = 0,$$

$$g_1 f(g_2) - f(g_1, g_2) + f(g_1) g_2 = 0,$$

$$g_1 f(g_2) - f(g_1, g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1) g_2 = 0.$$

Их сумма по строкам даёт циклические уравнения:

$$g_1 f(g_2) + g_2 f(g_1) = 0,$$

$$f(g_1 g_2) + f(g_2 g_1) = 0,$$

$$f(g_1) + f(g_2) = 0.$$

При альтернированном сложении элементов некоторые циклические уравнения берется с нулевым весом. Они задают обобщение теории когомологий. Дифференциалы от функций получают дополнительные слагаемые. Так учитываются свойства объектов и явлений, «упущенные» при стандартном анализе коцепей и их дифференциалов.

Анализ группы H^1 позволяет предложить физическую интерпретацию функциям, ассоциированным с когомологиями. Назовём элементы g объектами. Назовём функцию $f(g)$ воздействием объекта на себя. Функция $f(g_1 g_2)$ пусть задает воздействие первого объекта на второй объект. Функция $g_1 f(g_2)$ задает изменение объекта g_1 под воздействием справа объекта g_2 с влиянием $f(g_2)$. Речь идет о совокупности объектов с согласованными воздействиями друг на друга.

По этой причине ясно, что начальные группы когомологий описывают систему свойств для 2,3,4 объектов. Когомологиям H^N более высоких порядков соответствует

Возможна «физическая» интерпретация формул, соответствующих ассоциированным когомологическим функциям.

На примере группы H^1 интерпретация выглядит так:

- изменение первого объекта под воздействием второго объекта уравновешено изменением второго объекта под воздействием первого;

$$g_1 f(g_2) + g_2 f(g_1) = 0,$$

- влияние первого объекта на второй уравновешено влиянием второго объекта на первый (аналог закона Ньютона о равновесии действия и противодействия):

$$f(g_1g_2)+f(g_2g_1)=0,$$

- в системе объектов их влияние на себя уравновешено:

$$f(g_1)+f(g_2)=0.$$

Для ассоциированных когомологических групп более высоких порядков речь идет о совокупности свойств большего числа объектов:

$$H^1\to 2, H^2\to 3, H^3\to 4 \ldots H^N\to N+1\ldots$$

Покажем, что рассматриваемые уравнения задают дополнительные свойства физической реальности. Проанализируем некоторые частные решения. Уравнение

$$\varphi^0(g_1,g_2,g_3,g_4)=g_1f(g_2,g_3,g_4)+g_2f(g_3,g_4,g_1)+g_3f(g_4,g_1,g_2)+g_4f(g_1,g_2,g_3)=0$$

допускает решение в виде совокупности функций, согласованных с их множителем:

$$\begin{aligned}g_1f(g_2,g_3,g_4)&=g_1\left(g_2-g_1^{-1}g_2g_1+g_3-g_1^{-1}g_3g_1+g_4-g_1^{-1}g_4g_1\right)=\\&=g_1g_2-g_2g_1+g_1g_3-g_3g_1+g_1g_4-g_4g_1.\end{aligned}$$

Эти уравнения инициируют построение коммутаторов алгебры симметрии. Уравнение

$$\varphi^1(g_1,g_2,g_3,g_4)=f(g_1g_2,g_3,g_4)+f(g_2g_3,g_4,g_1)+f(g_3g_4,g_1,g_2)+f(g_4g_1,g_2,g_3)=0$$

допускает решение

$$f(g_1g_2,g_3,g_4)=\varphi^1(g_1)+\varphi^2(g_2)-\varphi^3(g_3)-\varphi^4(g_4).$$

Оно задаёт линейную суперпозицию независимых функций, ассоциированных с исследуемыми объектами. Решения имеют аналогичный вид для других когомологических групп. В общем случае решения ассоциированных когомологических уравнений имеют систему новых свойств. Они могут найти применение в физике. Неоднородные когомологические уравнения можно рассматривать как обобщение стандартной когомологической системы уравнений.