

УРОК 2. РАССЛОЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

С философской точки зрения мнения исследователей, изучающих пространственно-временные свойства физической реальности, разделились на две основные группы:

- Пространство и время вторичны по своей сути и форме, они выражают объективно существующие свойства отдельных физических изделий и их системы и согласованы со свойствами используемых для их количественной оценки измерительных устройств. Ни пространство, ни время не существуют сами по себе, они не обладают материальной субстанциональностью. Так считал Лейбниц, такое математическое пространство и время принял Ньютон, к такой же позиции склонялись Фарадей, Максвелл, Томсон. Первичны по своей физической сути и форме объекты и их взаимодействия. Свойства пространства и времени вторичны. Поскольку объекты, как и их свойства, различны, могут меняться свойства пространства и времени. Каковы они? Этот вопрос больше относится к эксперименту, но данный подход оставляет достаточно «места» для теоретиков, моделирующих объекты и их свойства.*
- Пространство и время первичны по своей сути и форме, они выражают собой саму реальность, они объективны сами по себе. Они могут меняться, формируя физические изделия, их свойства, определяя их взаимодействие между собой. Объекты вторичны и существуют только потому, что есть пространство и время. Измерительные устройства также включаются в эту схему как вторичные элементы теории и практики. Такая точка зрения была присуща Канту, Маху, Декарту. В яркой и прагматичной форме она выражена Эйнштейном в общей теории относительности и основанной на ней теории гравитации. Это направление исследований достаточно бурно развивалось в 20 столетии.*

Под термином пространство принято понимать множество элементов любой природы, имеющих физическое обоснование и наделённое в соответствии с ним математической структурой, которая позволяет описывать динамику величин, ассоциированных с исследуемыми явлениями.

Практическое применение моделей пространства и времени сводится к тому, чтобы использовать их стороны и свойства в математических моделях, описывающих физические объекты и их взаимодействия. Естественно возникает ряд вопросов:

- Какое математическое многообразие или их систему следует использовать при моделировании конкретных физических изделий и их*

свойств? Каковы, в частности, дифференциальные операторы, требуемые для этого, каковы должны быть величины, описывающие объекты, как учесть разнообразные механические и немеханические движения объектов? Как эти проблемы реализуются в моделях касательных и кокасательных многообразий?

- Какова размерность пространства и времени, каковы физические и математические истоки их размерности?
- Как согласовывать между собой свойства изделий и их взаимодействий со свойствами пространства и времени? Какие системы метрик и системы связностей нужны для этого, насколько они полны? Нужны ли некие дополнительные структуры, ассоциированные с ними, чтобы обеспечить условия для расширения и углубления исследований?
- Какие дополнительные стороны и свойства физических изделий и их взаимодействий столь же фундаментальны, как и свойства пространства и времени? Когда можно считать, что нам известна вся система фундаментальных свойств материи?

Эти проблемы имеют философский, физический, математический смысл. Их решение важно для практики. Развитие моделей пространства и времени определяет стратегию развития не только физики, но и науки в целом.

В данном разделе представлены черты модели расслоенного пространства-времени, иницируемая анализом обобщенной релятивистской электродинамики, свободной от сингулярностей.

Назовем физическим пространством и временем модель реального пространства и времени, каждый элемент которой допускает прямую или косвенную экспериментальную проверку.

Многообразие P , составленное из базового пространства $B_{(1)}$ и группы заполнения G_Z , а также из пространства $B_{(2)}$ и группы проявления G_P , назовем физически расслоенным, если указанные элементы совместно образуют некоторую конструкцию, согласованную системой дополнительных элементов T .

Форму и сущность всех элементов будем устанавливать в соответствии с потребностями и практикой моделирования физических объектов и явлений. Рассмотрим простой случай, когда пространство размеров выполняет роль базы, а пространство скоростей выполняет роль слоя. Для наглядности изобразим пространство P посредством рис. 1.

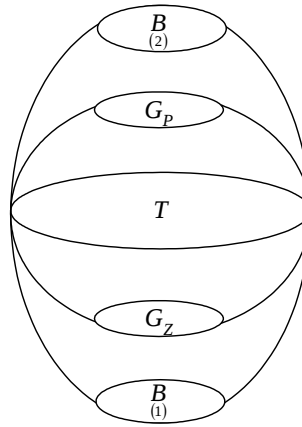


Рис.1. Конструкция, иллюстрирующая единство размеров и скоростей

Здесь буквой (π) обозначены всевозможные согласования элементов $P = \left(B_{(1)}, G_Z, \pi, G_P, B_{(2)} \right)$: связи между $B_{(1)}$ и G_Z , между $B_{(2)}$ и G_P , между парами $\left(B_{(1)}, G_Z \right)$ и $\left(B_{(2)}, G_P \right)$, а также их связи с T . Рисунок относится только к паре пространств. Он учитывает размеры и скорости. В общем случае, когда мы желаем рассмотреть всю систему уровней ранговых движений, и рисунок, и ситуации сильно усложнятся. Поскольку эксперимент в состоянии учесть лишь конечную систему ранговых движений, физическая модель пространства-времени обычно будет иметь конечное число элементов.

Согласно развиваемому подходу, разные уровни материи согласованы между собой. По этой причине требуется выполнить сравнительный анализ их структуры и поведения, что представляет собой достаточно сложную проблему.

Пусть на $B_{(1)}$ заданы окрестности точки x вида $\{v_i\}, i \in M$ и локальные системы координат.

Преобразование координат на пересечении окрестностей определим через представления группы G_Z :

$$g_{ij}^{(1)}(x): v_i^{(1)} \cap v_j^{(1)} \rightarrow G_Z^{(1)} \quad (\alpha)$$

Введем пространство $F_{(1)} = B_{(2)}$, которое назовем слоем. Покроем его системой открытых окрестностей с координатами (ξ) . Введем гомеоморфизм

$$\Phi_i^{(1)} : v_i^{(1)} \times F_{(1)} \rightarrow \pi^{-1} \left(v_i^{(1)} \right),$$

с проекцией $\begin{pmatrix} (1) \\ \pi \end{pmatrix}$ вида

$$\pi^{(1)} \Phi_i^{(1)}(x, \xi) = x, \quad \forall x \in v_i^{(1)}, \quad \xi \in F_{(1)}.$$

Определим карту

$$\Phi_{i,x}^{(1)} : F_{(1)} \rightarrow \pi^{-1}(x), \quad x \in v_i$$

по правилу

$$\Phi_{i,x}^{(1)}(\xi) = \Phi_i^{(1)}(x, \xi), \quad x \in v_i^{(1)}, \quad \xi \in F_{(1)}.$$

Для пары окрестностей $B_{(1)}$ с индексами $i, j \in N$ и каждой точки $x \in v_i \cap v_j$

получим гомеоморфизм $\Phi_{i,j;x}^{(1)} = \Phi_{j,x}^{(1)-1} \Phi_{i,x}^{(1)} : F_{(1)} \rightarrow F_{(1)}$. Условие

$$\Phi_{i,j;x}^{(1)} = g_{j,x}^{(1)-1}(x) \quad (\beta)$$

согласовывает координатные преобразования в базе $B_{(1)}$ с преобразованиями слоя $F_{(1)}$ в соответствии с группой $G_{(1)}$. Тогда

$$F_{(1)} = \left\{ B_{(1)}, G_{(1)}, \pi_{(1)}, F_{(1)} \right\}$$

есть расслоение. Оно однозначно определено преобразованиями (α) и (β) , а также слоем $F_{(1)}$, на котором группа $G_{(1)}$ действует непрерывно и эффективно.

Если слой $F_{(i)}$ образован группой $G_{(i)}$, рассматриваемой как топологическое пространство, расслоение $E_{(i)}$ называется главным расслоением. Известно, что оно является фундаментальным объектом в классе всех расслоений с данной базой B и данной G -структурой.

Аналогичные рассуждения можно провести для расслоения

$$F_{(2)} = \left\{ B_{(2)}, G_{(2)} = G_p, \pi_{(2)}, F_{(2)} \right\}.$$

В общем случае возможно рассмотрение системы расслоений

$$\bigvee_{(i)} E, i=1, 2, \dots k.$$

Знак $\bigvee$ соответствует выбору любых возможностей объединения и пересечения расслоений. Рис.1 соответствует случаю, когда используется пара главных расслоенных многообразий: $E_{(1)}, E_{(2)}$, согласованных системой элементов T . Тривиальное расслоение соответствует случаю, когда

$$E = B \times F.$$

Тогда проекция $\pi : E \rightarrow B$ является проекцией на первый сомножитель. В этом случае атлас (система карт) состоит из одной карты $u_\alpha = B$. Имеется только одна функция склейки $\Phi_{ii} = id$. Локально тривиальные расслоения изоморфны тогда, когда функции склейки Φ_{ij} и Φ'_{ij} согласованы с гомеоморфизмами слоев

$$h_i : V_i \times F \rightarrow V_i \times F$$

так, что

$$\Phi_{ij} = h_i^{-1} \Phi'_{ij} h_j.$$

Векторные расслоения, по определению, это локально тривиальные расслоения со структурной группой G , у которых роль слоя выполняет конечномерное векторное пространство, размерность которого, например, $\dim R^n = n$ задает размерность векторного расслоения E_ζ . Для сечений

$$s_1, s_2 : B \rightarrow E_\zeta$$

выполнены условия

$$(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x), \quad x \in B,$$

$$(\lambda s_1)(x) = \lambda(s_1(x)), \quad \lambda \in R, \quad x \in B.$$

Они задают на пространстве $\Gamma(\zeta)$ всех сечений структуру векторного пространства.

Множество всех векторов, касательных к многообразию B , обозначим T^*x . Оно снабжается естественной топологией. В ней для касательного вектора ξ_0 в точке x_0 окрестностью V является множество таких касательных векторов η в точках x , для которых

$$\rho(x, x_0) = \sum_{k=1}^n (\eta_{\alpha}^k - \xi_{0\alpha}^k)^2 < \varepsilon$$

для некоторого числа $\varepsilon > 0$ и карты $V_{\alpha} \in x_0$.

Пусть $\pi^*: T^*B \rightarrow B$ есть отображение, сопоставляющее касательному вектору ξ^* точку x , в которой вектор ξ касается многообразия B . Оно непрерывно и задает векторное расслоение с базой B , общим пространством T^*x и слоем, изоморфным линейному пространству R^n .

Заметим, что для физической модели требуется задать несколько векторных расслоений.

Во-первых, нужно охватить и проявить смещения точечного события, которое задается дифференциалами координат многообразия, ассоциированного с B . Получим

$$\{d^k x\}_{k=1,2,..,n} \in T^* \boxed{B}, \quad \boxed{B} \rightarrow \dot{B}.$$

Знак $\boxed{B}$ соответствует словам "множества, ассоциированные с B ".

При рассмотрении задач, относящихся к движению электромагнитного поля в среде, движущейся со скоростью $\vec{u}_{(m)}$, от источника излучения, движущегося со скоростью $\vec{u}_{(fs)}$, мы обязаны ввести пространство $B_{(m)}$ и $B_{(fs)}$. Тогда

$$\boxed{B} \equiv \begin{cases} B_{(m)}, d x_{(m)}^k / d s = u_{(m)}^k, \\ B_{(fs)}, d x_{(fs)}^k / d s = u_{(fs)}^k, \end{cases}$$

где ds –некоторый инвариантный интервал, охватывающий и проявляющий конкретную ситуацию. Величины $u_{(m)}^k$ и $u_{(fs)}^k$ физически независимы, однако они согласованно влияют на поведение электромагнитного поля. Мы частично задаем эту согласованность, полагая, что $\vec{u}_{fs}$ и $\vec{u}_m$ гомотопически эквивалентны, выражением

$$\vec{u} = (1 - w)\vec{u}_{fs} + w\vec{u}_m.$$

Здесь w – показатель отношения электромагнитного поля к физической среде. Само поле имеет "смещения"

$$\frac{d x_f^k}{d s} = v_f^k, \quad \frac{d x_g^k}{d s} = v_g^k,$$

которые задают его фазовую и групповую скорости.

Поскольку каждый из указанных элементов нужен в модели, для их совокупности можно ввести систему пространств

$$T^* \boxed{B} \equiv \bigvee_i T^*_{(i)} B, \quad i = 1, 2 \dots k.$$

Можно поступить иначе. В физике обычно используется этот вариант. Считается, что величины $\{v_f^k, v_g^k, u_{(m)}^k, u_{(fs)}^k \dots\}$ заданы в одном многообразии B и в одном векторном пространстве $T^* B$. Указанный подход упрощает анализ, но нужно действовать осторожно, так как система векторных расслоений существенно сложнее одного векторного расслоения.

Во-вторых, нужны ковекторные расслоения. Они охватывают и проявляют дифференциальные изменения, которым подчинены физические законы. Их базис образуют частные производные

$$\{\partial/\partial x^k\}, \quad k = 1, 2 \dots n \in T_* \boxed{B}, \quad \boxed{B} \rightarrow B.$$

Отображение $\pi_* : T_* B \rightarrow B$ сопоставляет кокасательному вектору ξ_* точку x , в которой он присоединен к многообразию B . Слой ковекторного расслоения $T_* B$ изоморфен линейному пространству. Мы вправе использовать в физической модели систему пространств $T_* \boxed{B}_{(i)}$, согласовав их друг с другом.

В-третьих, нужны физические величины Φ , которые допускают возможность измерения, охватывают и проявляют данные опыта, входят в уравнения физической модели. Обычно таких величин несколько. Базис пространства для величин Φ задан тензорным произведением базисов векторного и ковекторного пространств. Мы получаем для модели систему величин: скаляров φ , векторов v^k , ковекторов V_k , тензоров второго ранга φ^{ij} , φ^i_j , φ_{ij} . Они отличаются друг от друга законами преобразования при изменении системы координат.

В-четвертых, нужно выполнить согласование элементов, используемых в физической модели. Например, возможно расширение частных производных до ковариантных:

$$\partial_i \Rightarrow \nabla_i = \partial_i + A_i.$$

Здесь A_i --связность, совокупность величин, посредством которых согласуется изменение физических величин в окрестностях разных точек базы B .

Стандартным способом можно реализовать учёт свойств пространства-времени, в котором рассматриваются явления и заданного координатами x^k , а также некоторого внутреннего пространства с координатами ξ^k . Так, следуя Картану, можно ввести ковариантную производную для векторного поля X^i :

$$DX^i = dX^i + C_{kh}^i(x, \xi) X^k d\xi^h + \Gamma_{kh}^i(x, \xi) X^k dx^h = \Gamma_{kh}^{*i}(x, \xi) X^k dx^h,$$

$$\Gamma_{kh}^{*i} = \Gamma_{kh}^i - C_{kj}^i \Gamma_{rh}^j \xi^r = \Gamma_{hk}^{*i}.$$

Общий алгоритм расчёта позволяет на этой основе получить выражение для тензора кривизны, а также для других элементов используемой модели. Соединим отмеченные выше элементы в рис.2, формируя уточненную конструкцию физически расслоенного многообразия

$$\left(B, G_z, \pi, G_p, B_{(2)} \right) \oplus (T_*(\xi), T^*(\xi), \Phi, S).$$

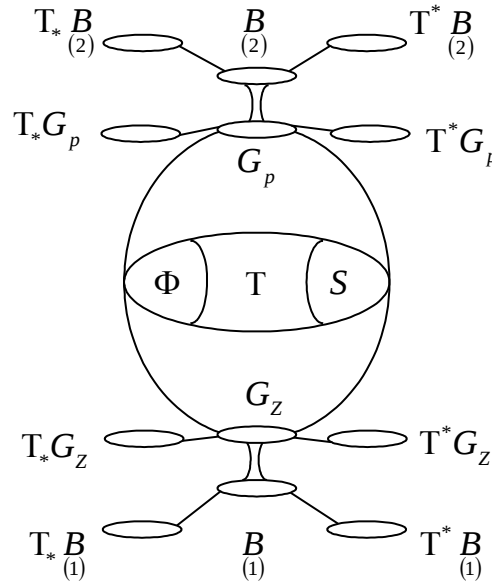


Рис. 2. Уточненная конструкция пространства размеров и пространства скоростей.

Физическая модель использует, так или иначе, все указанные элементы. Конкретизируем рис. 2 в соответствии с найденной ранее единой спинорной формой фундаментальных уравнений физики. Используем для этого уравнения электродинамики без ограничения скорости. Нам понадобились такие элементы:

а) пространство размеров $M_{ss} = B_{(1)} = R^3 \times T^1$, соответствующее практике физических измерений и опыту макроскопических наблюдений, оно является пространством размеров для физических конструкций, ассоциированных с наблюдателем, непосредственно или мысленно покоящегося относительно этой конструкции.

б) группа заполнения физических явлений $G_z = SL(4, R)$, ее алгебра $T^*SL(4, R)$, функции от элементов A алгебры, например, $Y = \det \|\lambda I - A\|$, где $A \in T^*SL(4, R)$, $Y \in T_*SL(4, R)$;

в) касательные и кокасательные пространства, ассоциированные с M_{ss} , посредством которых заданы дифференциалы $dx^k \in T^*B_{(1)}$ и частные производные $\partial/\partial x^k \in T_*B_{(1)}$;

а*) пространство скоростей $M_{ss} = B_{(2)} = M_4$, где M_4 --пространство Минковского, которое соответствует практике изменения скоростей конструкции или ее частей, присущих явлениям и опыту для прямых или косвенных микроскопических наблюдений, оно является пространством измеренных скоростей, ассоциированных с системой движущихся наблюдателей. Такой подход отстаивал Зоммерфельд.

б*) группа проявления физических явлений $G_p = U(1)$, ее алгебра $P \in T^*U(1)$, функции от элементов алгебры, например, $X = \det \|\lambda I\| - P$, $X \in T_*U(1)$, где $U(1)$ - унитарная группа;

в*) касательные и кокасательные пространства, ассоциированные с M_{SE} , посредством которых заданы дифференциалы $dx^k \in T^*_{(2)}B$ и частные производные $\partial/\partial x^k \in T_*B$;

Заданы также величины, характеризующие электромагнитные поля посредством тензора $F_{mn} = F_{mn}(\vec{E}, \vec{B})$ и индукции, выраженные тензорной плотностью $\tilde{H}^{ik} = \tilde{H}^{ik}(\vec{H}, \vec{D})$ веса (+1), а также тензорная плотность веса (+1) для четырехтоков $\tilde{S}^k = \tilde{\rho} U^k$. Тогда $\Phi: (\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{D}, F_{mn}, \tilde{H}^{ik}, \tilde{\rho}, U^k, \tilde{S}^k \dots)$. Используются величины, соединяющие элементы в единую конструкцию: ε , μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости, $n = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ - показатель

преломления, $w = 1 - \exp\left(-P_0 \frac{\rho}{\rho_0}\right)$ - показатель отношения, тензор

$\Omega^{kn} = \alpha \Theta^{kn} + \beta U^k u^n$, четырехметрики r^{ij} , $n^{ij}(+)$, $n^{ij}(-)$, g^{ij} , тензор Кронекера $\varepsilon_{klrs}^{ij} \dots$. Тогда

$$S: (\varepsilon, \mu, w, \Omega^{kn}, r^{ij}, n^{ij}, g^{ij}, \varepsilon_{klrs}^{ij} \dots).$$

Сделаем несколько замечаний. Величины заданы над полем комплексных чисел C типа $(a + ib)$, они соединены посредством теневых комплексных чисел $\mathcal{V}$:

$$A + iB\dot{\mathcal{V}}(a_1 + ib_1) + \mathcal{V}(a_2 + ib_2),$$

что позволяет провести согласованный анализ кинематического и динамического изменения полей.

- Пространство $B_{(1)}$ и группа $G_{(1)}$ согласованы между собой.
- Пространство $B_{(1)}$, как и другие элементы в конструкции расслоенного многообразия, допускает не только внешнюю (out-) координатизацию, например, посредством координат x^k , но и внутреннюю (in-) координатизацию, например, посредством координат y^α , что учитывает внутренние степени свободы. Поэтому элементы пространства состояний M_{SS} , формирующие остов физической модели, индуцируют метрики

$g_{ij}(x^k, y^\alpha)$, связности $\Gamma_{jk}^i(x^k, y^\alpha)$, величины $F_{mn}(x^k, y^\alpha)$, производные $\nabla_k = \partial/\partial x^k + \Gamma_k^\alpha \partial/\partial y^\alpha \dots$

- Пространство $B_{(1)}$, как и другие элементы в конструкции расслоенного многообразия, допускает многоуровневость точек. Так, если точка задана координатами

$$\left(\left(\begin{pmatrix} x & \beta + \alpha \\ (-2) & (-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \beta + \alpha \\ (-1) & (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \beta + \alpha \\ (-1) & (-1) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha + \beta x \\ (1) & (1) & (1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + \beta x \\ (2) & (2) & (2) \end{pmatrix} \right),$$

мы работаем в модели с пятиуровневым расщеплением. Соответственно требуются изменения частных производных, дифференциалов координат, величин, а также системы их соединений. Соединим указанные элементы воедино (рис.3). Они образуют строительный материал для физической модели.

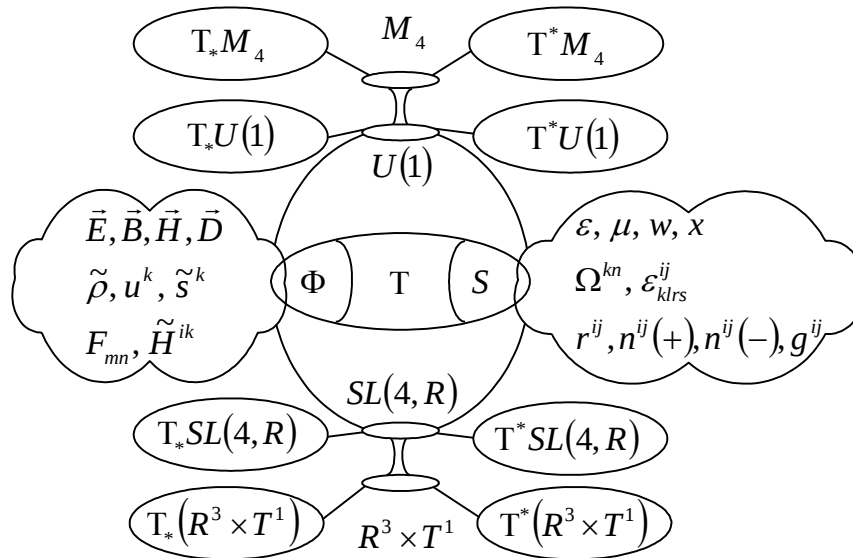


Рис.3. Реальное расслоенное многообразие.

Таковы новые черты модели и концепции пространства-времени. Она опирается более всего на динамическую модель релятивистских эффектов в электродинамике, представленную в спинорной форме.

Модель расслоенного пространства времени с активными базами и слоями, согласованными друг с другом, адекватна накопленному опыту и стимулирует дальнейшую практику.