# УРОК 1. СИГРУППА ГАЛИЛЕЯ-ЛОРЕНТЦА

*Проведенный анализ обобщенной модели электромагнитных явлений позволяет по-новому оценить и интерпретировать экспериментальные факты, которые принято описывать в рамках специальной теории относительности. Мы вправе рассматривать взаимодействие электромагнитного поля со средой как динамический процесс. Он имеет начальную стадию, описываемую группой Галилея и конечную стадию, описываемую группой Лорентца. При измерении параметров электромагнитного поля роль физической среды выполняет измерительное устройство. По этой причине измерение есть динамический процесс. Его стадии описываются преобразованиями координат и времени вида*

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1 - w\frac{u^2}{c^2}}}, dy' = dy, dz' = dz\,, dt' = \frac{dt - w\frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1 - w\frac{u^2}{c^2}}}$$

*В такой форме они были получены в начале века Игнатовским, Франком и Роттом. Однако параметр* $w$ *тогда не получил физической интерпретации и он не был введен в уравнения электродинамики. Сейчас понятно, что в электродинамику нужно было ввести новую величину. Она названа показателем отношения и в простых случаях связана, как показано выше, с показателем преломления* n. *Показатель отношения, с одной стороны, указывает стадию динамического процесса взаимодействия электромагнитного поля со средой, с другой стороны, он характеризует изменение частоты поля, которое происходит при таком взаимодействии.*

*Расчеты показывают, что указанные выше преобразования относятся к идеализированному случаю движения электромагнитного поля в вакууме. В реальной ситуации требуется использовать показатель преломления, не равный единице.*

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1 - wn^2\frac{u^2}{c^2}}}, dy' = dy, dz' = dz, dt' = \frac{dt - wn^2\frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1 - wn^2\frac{u^2}{c^2}}}.$$

*Кроме этого, место формальной скорости в преобразованиях координат и времени занимает физически содержательное выражение*

$$U = (1-w)u_{fs} + wu_m.$$

*Понятно, что речь идет об анализе симметрии процесса взаимодействия электромагнитного поля со средой, роль которой, в частности, выполняет измерительное устройство.*

*Поскольку в обобщенной модели электромагнитных явлений все расчеты проводились в одной системе координат в рамках пространства размеров Ньютона, мы вправе интерпретировать пространство Минковского как частный случай пространства скоростей. Модель, в которой пространство размеров согласовано с пространством скоростей естественно отнести к модели расслоенных многообразий. В общем случае такое согласование может быть достаточно сложным. Более того, оно подчинено системе динамических законов. Заметим, что метрика пространства скоростей в сочетании с величинами, описывающими свойства среды и ее скорости, входит в физическую модель через связи между полями и индукциями.*

*В силу указанных причин становится возможным анализ свойств света в собственной системе отсчета. На место бесструктурных квантов света приходит модель структурных частиц света, которые имеют внутреннее механическое движение.*

*Самостоятельной задачей становится анализ математической структуры симметрии, характеризующей процесс взаимодействия электромагнитного поля со средой. Мы знаем теперь, что симметрия динамического процесса объединяет в одно семейство неизоморфные группы. В обобщенной электродинамике так используются группа Галилея и группа Лорентца. Симметрию процесса назовём сигруппой, приняв сокращение слов «система групп».*

*Понятно, что желательно иметь общую теорию для симметрии динамических процессов. Тогда ряд физических задач можно будет решать на этой основе, что способно существенно упростить анализ и, по крайней мере, быстро и корректно получать оценки ситуаций, необходимые для практики. Поскольку такие системы могут быть разными, требуется провести их классификацию, а также указать их приложения в физике.*

*Актуальной становится задача построения калибровочных теории на сигруппах.*

**Свойства сигруппы Галилея-Лорентца**

Рассмотрим пару преобразований дифференциалов координат и времени, принадлежащих сигруппе:

$$\begin{pmatrix} dx' \\ cdt' \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_1}{c} \\ w_1 \frac{u_1}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx'' \\ cdt'' \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_2}{c} \\ w_2 \frac{u_2}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ cdt' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} dx' \\ cdt' \end{pmatrix},$$

$$\gamma_1 = \left(1 - w_1 \frac{u_1^2}{c^2}\right)^{-0,5}, \gamma_2 = \left(1 - w_2 \frac{u_2^2}{c^2}\right)^{-0,5}.$$

Получим произведение элементов вида

$$\begin{pmatrix} dx'' \\ cdt'' \end{pmatrix} = \gamma_2 \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 + w_1 \frac{u_1 u_2}{c^2} & \frac{u_1 + u_2}{c} \\ \frac{w_1 u_1 + w_2 u_2}{c} & 1 + w_2 \frac{u_1 u_2}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} =$$

$$= \gamma_2 \gamma_1 \frac{\gamma_{1,2}}{\gamma_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_1 + u_2}{c} \\ \frac{w_1 u_1 + w_2 u_2}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} + \gamma_2 \gamma_1 \frac{u_1 u_2}{c^2} \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix},$$

$$k = \frac{\gamma_2 \gamma_1}{\gamma_{1,2}}, \sigma = \gamma_2 \gamma_1 \frac{u_1 u_2}{c^2} \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}, \gamma_{1,2} = \left(1 - \left(\frac{w_1 u_1 + w_2 u_2}{c}\right)\left(\frac{u_1 + u_2}{c}\right)\right)^{-0,5}$$

Его свойства таковы:

$$A \cdot B = \kappa C + \sigma_1, B \cdot A = \kappa C + \sigma_2,$$
$$A, B, C \Rightarrow M_1, \kappa, \sigma_i \Rightarrow M_2, M_3,$$

$$\Delta = A \cdot B - B \cdot A = \sigma_1 - \sigma_2,$$
$$\frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A) = \kappa C + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Элементы $A, B, C$ принадлежат сигруппе $M_1$, элементы $\kappa, \sigma$ принадлежат, соответственно, мультипликативной и аддитивной группам, ассоциированным с данной сигруппой. Кроме операции произведения нам необходимо использовать операцию сложения. Следовательно, сигруппа задает алгебраическое множество, свойства которого следует изучить. Покажем, что произведение элементов сигруппы согласуется со структурой сигруппы. Зададим элемент сигруппы через элемент канонической группы Лорентца и элемент группы треугольных матриц, принадлежащих унимодулярной группе. Получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-w\frac{u^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}1 & \frac{u}{c}\\ w\frac{u}{c} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}1 & \frac{u}{c}\\ \frac{u}{c} & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-w\frac{u^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}\dfrac{1-\frac{u^2}{c^2}w}{1-\frac{u^2}{c^2}} & 0\\ \dfrac{(w-1)\frac{u}{c}}{1-\frac{u^2}{c^2}} & 1\end{pmatrix}.$$

По этой причине действие сигруппы можно рассматривать как действие произведения двух согласованных между собой неизоморфных групп. Выразим элемент, принадлежащий группе треугольных матриц, в виде произведения элементов двух других групп. Получим

$$G_{1,2}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-w\frac{u^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}\dfrac{1-\frac{u^2}{c^2}w}{1-\frac{u^2}{c^2}} & 0\\ \dfrac{(w-1)\frac{u}{c}}{1-\frac{u^2}{c^2}} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{(w-1)\frac{u}{c}}{1-\frac{u^2}{c^2}w} & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-w\frac{u^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}\dfrac{1-\frac{u^2}{c^2}w}{1-\frac{u^2}{c^2}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow G_1\cdot G_2.$$

Структура группы $G_1$ задана выражением вида

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \sigma & 1\end{pmatrix},\ \sigma=\frac{(w-1)\frac{v}{c}}{1-\frac{v^2}{c^2}w}\cong w-\frac{v}{c}+w^2\frac{v^2}{c^2}-w\frac{v^3}{c^3}.$$

Структура группы $G_2$ такова:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},\ a=\frac{\sqrt{1-w\dfrac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=1+\frac{1}{2}(1-w)\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{4}w\frac{v^4}{c^4}.$$

Выразим сигруппу Галилея-Лорентца через группу Галилея. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1-w\dfrac{u^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{u}{c} \\ w\dfrac{u}{c} & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-w\dfrac{u^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{u}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{w\dfrac{u}{c}}{1-w\dfrac{u^2}{c^2}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-w\dfrac{u^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оба разложения формально похожи друг на друга. Они имеют общие свойства и по-разному выражают скалярную деформацию группы Лорентца. В окрестности единичного элемента сигруппы имеет вид

$$Sg_e=I+a_k\alpha^k+b_l\beta^l+c_m\gamma^m+\dots$$

Он аналогичен локальной записи группы. Однако параметры групп, которыми представлена сигруппа, в данном случае зависимы друг от друга.

Это обстоятельство играет решающую роль при анализе законов сохранения, ассоциированных с сигруппой, а также в теории калибровочных полей, индуцируемых сигруппой.

Обратим внимание на специфику структуры исследуемой сигруппы. Заметим, что возможен вариант аддитивного представления сигруппы Галилея-Лорентца, используя каноническую группу Лорентца:

$$\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{u}{c} \\ \dfrac{u}{c}w & 1 \end{pmatrix}=\frac{\gamma_1}{\gamma}\gamma\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{u}{c} \\ \dfrac{u}{c} & 1 \end{pmatrix}+\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{v}{c}(w-1) & 1 \end{pmatrix}-\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим аддитивное разложение группы Лорентца:

$$\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{u}{c} \\ \dfrac{u}{c} & 1 \end{pmatrix}=\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{u}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{v}{c} & 1 \end{pmatrix}-\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа Лорентца выражена через группу Галилея. Новым группам дадим название группы Барыкина и группы Ньютона. Получим морфологическую связь формул для групп:

Ньютон + Лорентц = Галилей + Барыкин.

Аддитивное разложение сигруппы Галилея-Лорентца по группе Галилея выглядит просто:

$$\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c}w & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\gamma_1+\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{u}{c}w & 1 \end{pmatrix}-\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В частности, каноническая группа Лорентца выступает в роли группы Галилея, дополненной группой растяжения времени и группой согласованных деформаций для координат и времени. Группа Галилея может рассматриваться как группа Лорентца, дополненная аналогичными группами. Действительно, получим

$$\gamma\begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix}-\gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аддитивное и мультипликативное представления сигруппы Галилея-Лорентца согласуются между собой по формуле:

$$g_1g_2g_3 \Leftrightarrow SG \Leftrightarrow \bar{g}_1+\bar{g}_2+\bar{g}_3.$$

Произведение элементов сигруппы можно вложить в алгебраическое множество, содержащее элементы $(\alpha,\beta)$. Матрицу размерности $2\times 2$ можно записать в форме сигруппы и диагональной матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & d-1 \end{pmatrix}=\alpha+\beta.$$

В таком виде, с точностью до коэффициентов, задается произведение элементов сигруппы. Прямой расчет показал, что элементы сигруппы принадлежат алгебре Йордана:

$$x \circ y = y \circ x, \quad \begin{array}{c} \left(x^2 \circ y\right) \circ x = x^2 \circ \left(y \circ x\right), \\ x \circ y = \frac{1}{2}\left(xy + yx\right). \end{array}$$

В форме обычного произведения матриц вида

$$x = k_1 \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix}, y = k_2 \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix}$$

она подчинена условиям:

$$xy \neq yx,$$

$$\left(yx^2\right)x + x\left(x^2 y\right) = x^2\left(xy\right) + \left(yx\right)x^2.$$

Оно является следствием ассоциативности матриц, вытекающим из общего закона, справедливого для алгебры Йордана:

$$\left(x^2 y\right)x + \left(yx^2\right)x + x\left(x^2 y\right) + x\left(yx^2\right) = x^2\left(yx\right) + x^2\left(xy\right) + \left(yx\right)x^2 + \left(xy\right)x^2.$$

В рассматриваемом случае

$$\left(yx\right)x^2 = \left(yx^2\right)x, x\left(x^2 y\right) = x^2\left(xy\right).$$

С учетом данного обстоятельства получим закон Йордана, зеркальный относительно знака равенства

$$x\left(x^2 y\right) + \left(yx\right)x^2 = x^2\left(xy\right) + \left(yx^2\right)x.$$

В данном случае возможно обобщение закона произведения. Действительно, введем

$$x \tilde{\circ} y \neq y \tilde{\circ} x = \lambda xy \pm \mu yx.$$

В этом случае также справедлив зеркальный закон Йордана. Заметим, что элементы сигруппы подчинены также условиям, используемым для квазигруппы Муфанг:

$$z\left(\left(xy\right)z\right) = \left(zx\right)\left(yz\right) = \left(z\left(xy\right)\right)z.$$

Однако сигруппа не является квазигруппой из-за свойств произведения используемых нами матриц.

Для сигруппы Галилея-Лорентца справедливо условие эластичности:

$$(xy)x = x(yx).$$

При использовании матриц оно является частным случаем ассоциативности матриц. Известно, что изотопически инвариантный класс аналитических луп, удовлетворяющий тождеству эластичности, шире класса луп Муфанг. В силу указанных обстоятельств мы вправе считать, что релаксационный процесс в обобщенной электродинамике движущихся сред описывается наряду с алгеброй Йордана эластичной алгеброй со свойствами

$$xy \neq yx,$$

$$(xy)x = x(yx).$$

Легко доказать, что сигруппа Галилея-Лорентца подчинена также условиям

$$xy \neq yx,$$

$$(x^2 y)x = x^2 (yx).$$