БАРЫКИН В.Н.

АЛГЕБРА С ОТНОШЕНИЯМИ ИЛИ СИСТЕМА СУПЕРАЛГЕБР

Найдена система супералгебр)W(для группы G_B, состоящей из обратимых симметричных и антисимметричных матриц. Показано, что группы G_B имеют прямую связь с физическими моделями. Найдена новая пара групп: знаковая и комбинаторная.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях научных исследований мы имеем дело с группами, которые образованы симметричными и антисимметричными матрицами. Однако до сих пор не найдена система алгебр, которой подчинена произвольная такая группа. В данной работе показано, что существует система супералгебр)W(для группы G_B, состоящей из обратимых симметричных и антисимметричных матриц.

1. НОВАЯ СУПЕРАЛГЕБРА

Пусть группа G_B состоит из симметричных матриц с элементами $S_{ij} = S_{ji}$ и антисимметричных матриц $A_{ij} = -A_{ji}$. Тогда $\{A_{ij}, \quad S_{ij}, \quad A_{ij}^{-1}, \quad S_{ij}^{-1}, \quad I\} \in G_B$. Введем индекс симметричности

$$\chi(A_{ij}) = 0,$$

$$\chi(S_{ij}) = 1$$

и фактор симметричности

$$\sigma = (-1)^{\chi} .$$

Он задает одномерное проективное представление группы G_B, так как

$$\sigma(\zeta) = \sigma(\xi \cdot \eta) = f(\xi, \eta)\sigma(\xi) \cdot \sigma(\eta),$$

где $(\xi, \eta, \zeta) \in G_B$, $f(\xi, \eta) \in Z_2 = [-1, 1]$. Найдем алгебру, которой подчинена группа G_B, учитывая факторы симметричности ее элементов. Заметим, что

$$\sigma(\xi) \neq 0, \ \sigma^2(\xi) = 1, \ \sigma^{-1}(\xi) = \sigma(\xi), \ \sigma(ab) = \sigma(ba).$$

Факторы симметричности образуют абелеву группу отношений между элементами группы G_B. Будем для удобства обозначать элементы группы G_B латинскими буквами. Введем произведение ее элементов, учитывая группу отношений $\sigma(\xi)$. Пусть

$$\langle ab \rangle = ab - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)ba,$$
$$\langle bc \rangle = bc - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)cb,$$
$$\langle ca \rangle = ca - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)ac.$$

Определим

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle = \langle a\,b\rangle c - \sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)c\langle ab\rangle,$$

$$\langle\langle bc\rangle a\rangle = \langle bc\rangle a - \sigma(b,c)\sigma(a)\sigma(b,c,a)a\langle bc\rangle,$$

$$\langle\langle ca\rangle b\rangle = \langle ca\rangle b - \sigma(c,a)\sigma(b)\sigma(c,a,b)b\langle ca\rangle.$$

Они содержат множители

$$\sigma(a,b),\ \sigma(b,c),\ \sigma(c,a),\ \sigma(a,b,c),\ \sigma(b,c,a),\ \sigma(c,a,b),$$

которые следует определить из дополнительных условий. Будем искать их, предполагая возможность циклического условия

$$A\langle\langle ab\rangle c\rangle + B\langle\langle bc\rangle a\rangle + C\langle\langle ca\rangle b\rangle = 0.$$

Найдем выражения для B и C, при которых получается тождество. Имеем

$$A\{\langle ab\rangle c - \sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)c\langle ab\rangle\} + B\{\langle bc\rangle a - \sigma(b,c)\sigma(a)\sigma(b,c,a)a\langle bc\rangle\} +$$

$$+ C\{\langle ca\rangle b - \sigma(c,a)\sigma(b)\sigma(c,a,b)b\langle ca\rangle\} =$$

$$= A\{abc - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)bac - \sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)[cab - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)cba]\} +$$

$$+ B\{bca - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)cba - \sigma(b,c)\sigma(a)\sigma(b,c,a)[abc - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)acb]\} +$$

$$+ C\{cab - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)acb - \sigma(c,a)\sigma(b)\sigma(c,a,b)[bca - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)bac]\} = 0.$$

Отсюда

$$(A - \sigma(b,c)\sigma(a)\sigma(b,c,a)B)abc + (A\sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab) - B\sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc))cba +$$

$$+ (C - \sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)A)cab + (C\sigma(c,a)\sigma(b)\sigma(c,a,b)\sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca) - A\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab))bac +$$

$$+ (B - \sigma(c,a)\sigma(b)\sigma(c,a,b)C)bca + (B\sigma(b,c)\sigma(a)\sigma(b,c,a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc) - C\sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca))acb = 0.$$

Следовательно,

$$A - \sigma(a)\sigma(b,c)\sigma(b,c,a)B = 0, \qquad (\alpha)$$

$$A\sigma(a)\sigma(ab)\sigma(a,b)\sigma(a,b,c) - \sigma(bc)B = 0, \qquad (\alpha^*)$$

$$B - \sigma(b)\sigma(c,a)\sigma(c,a,b)C = 0, \qquad (\beta)$$

$$B\sigma(b)\sigma(bc)\sigma(b,c)\sigma(b,c,a) - C\sigma(ca) = 0, \qquad (\beta^*)$$

$$C - \sigma(c)\sigma(a,b)\sigma(a,b,c)A = 0, \qquad (\gamma)$$

$$C\sigma(c)\sigma(ca)\sigma(c,a)\sigma(c,a,b) - A\sigma(ab) = 0. \qquad (\gamma^*)$$

Примем условие, что

$$\sigma(\eta,\xi) = \sigma(\xi,\eta) = \sigma(\xi\eta) = \sigma(\eta\xi).$$

Из (γ) и (γ^*) получим

$$\sigma(a,b,c)\sigma(c,a,b) = 1,$$

$$C = \sigma(c)\sigma(ab)\sigma(a, b, c)A.$$

Тогда

$$B = \sigma(b)\sigma(\ c)\sigma(ab)\sigma(ac).$$

Из (β*) следует, что

$$\sigma(b, c, a) = \sigma(a, b, c).$$

Из (α) получим

$$\sigma(a, b, c) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc).$$

Примем условие, что

$$\sigma(a, b, c) = \sigma(b, c, a) = \sigma(c, a, b).$$

Тогда, поскольку $A \neq 0$, имеем циклическое тождество, определяющее алгебру с отношением

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle + \langle\langle bc\rangle a\rangle\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac) + \langle\langle ca\rangle b\rangle\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc) = 0.$$

Это выражение умножим на $\sigma(b)\sigma(ac)$. Получим в симметричном по $\sigma(\xi)$ виде:

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle\sigma(b)\sigma(ac) + \langle\langle bc\rangle a\rangle\sigma(c)\sigma(ba) + \langle\langle ca\rangle b\rangle\sigma(a)\sigma(cb) = 0.$$

2. НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

1. Пусть $\sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(c) = 1$. Тогда $\langle ab\rangle = ab - ba = [a,b]$.

Имеем тождество Якоби: $[[a,b]c] + [[b,c]a] + [[c,a]b] = 0$

2. Пусть $\sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(c) = -1$. Тогда $\langle ab\rangle = ab + ba = \{a,b\}$.

Имеем тождество: $[\{a,b\}c] + [\{b,c\}a] + [\{c,a\}b] = 0$.

Действительно, $\langle ab\rangle = ab - (-1)(-1)(-1)ba = ab + ba$

$\langle\langle ab\rangle c\rangle = \langle ab\rangle c - \sigma(a,b)\sigma(c)\sigma(a,b,c)c\langle ab\rangle = \langle ab\rangle c - \sigma(ab)\sigma(c)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc)c\langle ab\rangle$

$=\langle ab\rangle c - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc)c\langle ab\rangle = \langle ab\rangle c - (-1)(-1)(-1)(-1)c\langle ab\rangle = \langle ab\rangle c - c\langle ab\rangle$.

Действуя аналогично, получим

$(ab + ba)c - c(ab + ba) + (bc + cb)a - a(bc + cb) + (ca + ac)b - b(ca + ac) = abc + bac - cab - cba +$

$+ bca + cba - abc - acb + cab + acb - bca - bac = 0$.

Заметим, что антикоммутаторы имеют всегда ненулевой цикл, что свидетельствует о глубинной неассоциативности алгебры матриц, содержащей подалгебры антикоммутативного типа.

Все элементы группы G_B могут быть на основе ее супералгебры)*W*(поделены на классы, в которых выполняется то или другое сочетание коммутаторов $[\cdot,\cdot]$ и антикоммутаторов $\{\cdot,\cdot\}$. Выполним проверку циклического условия, задаваемого супералгеброй)*W*(в общем виде. Так,

$0=\langle\langle ab\rangle c\rangle\sigma(b)\sigma(ac)+\langle\langle bc\rangle a\rangle\sigma(c)\sigma(ba)+\langle\langle ca\rangle b\rangle\sigma(a)\sigma(cb)=$

$=(\langle ab\rangle c-\sigma(ab)\sigma(c)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc)c\langle ab\rangle)\sigma(b)\sigma(ac)+$

$+(\langle bc\rangle a-\sigma(bc)\sigma(a)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc)a\langle bc\rangle)\sigma(c)\sigma(ba)+$

$+(\langle ca\rangle b-\sigma(ca)\sigma(b)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab\sigma(ac)\sigma(bc)b\langle ca\rangle)\sigma(a)\sigma(cb)=$

$=(\langle ab\rangle c\sigma(b)\sigma(ac)-\sigma(a)\sigma(bc)\sigma\langle ab\rangle)+(\langle bc\rangle a\sigma(c)\sigma(ba)-\sigma(b)\sigma(ac)a\langle bc\rangle)+$

$+(<ca>b\sigma(a)\sigma(cb)-\sigma(c)\sigma(ab)b<ca>)=$
$=abc\sigma(b)\sigma(ac)-\sigma(a)\sigma(ac)\sigma(ab)bac-\sigma(a)\sigma(bc)cab+\sigma(b)\sigma(bc)\sigma(ab)cba+$
$+bca\sigma(c)\sigma(ba)-\sigma(b)\sigma(ba)\sigma(bc)cba-\sigma(b)\sigma(ac)abc+\sigma(c)\sigma(ac)\sigma(bc)acb+$
$+cab\sigma(a)\sigma(cb)-\sigma(c)\sigma(ca)\sigma(cb)acb-\sigma(c)\sigma(ab)bca+\sigma(a)\sigma(ab)\sigma(ca)bac=0.$
Введем
$<<<ab>c>d>=<<ab>c>d-\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(d)<<ab>c>.$

Легко показать, что имеет место тождество:

$\{<<<ab>c>d>\sigma(b)\sigma(ac)+<<<bc>d>a>\sigma(c)\sigma(bd)+$
$+<<<cd>a>b>\sigma(d)\sigma(ca)+<<<da>b>c>\sigma(a)\sigma(db)\}+$
$\{<<<bc>a>d>\sigma(c)\sigma(ba)+<<<cd>b>a>\sigma(d)\sigma(cb)+$
$+<<<da>c>b>\sigma(a)\sigma(da)+<<<ab>d>c>\sigma(b)\sigma(ab)\}+$
$\{<<<ca>b>d>\sigma(a)\sigma(cb)+<<<db>c>a>\sigma(b)\sigma(dc)+$
$+<<<ac>d>b>\sigma(c)\sigma(ad)+<<<bd>a>c>\sigma(d)\sigma(ba)\}=0.$
Так три четырехарных цикла компенсируют друг друга. Очевидно, что это условие зависит от факторов симметричности.

3. СУПЕРАЛГЕБРА ДЛЯ ГРУППЫ ПАУЛИ

Группа Паули состоит из матриц

$$\sigma^0 = I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = a, \quad \sigma^1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = b,$$

$$\sigma^2 = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix} = c, \quad \sigma^3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = d.$$

Ее факторы симметричности таковы:

$$\sigma(a) = -1, \ \sigma(b) = -1, \ \sigma(c) = 1, \ \sigma(d) = -1.$$

Найдем ее супералгебру $)W($.
1. Класс элементов, содержащих a и любую пару остальных элементов, подчинен условию
$\{\{ab\}d\}+[[bd]a]-\{\{da\}b\}=0.$
Действительно,

$<ab>=ab-(-1)(-1)(-1)ba=ab+ba,$
$<bd>=bd-(-1)(-1)(1)db=bd-db,$
$<da>=da-(-1)(-1)(-1)ad=da+ad,$
$<<ab>d>=<ab>d-(-1)(-1)(-1)(1)d<ab>=<ab>d+d<ab>,$
$<<bd>a>=<bd>a-(-1)(-1)(-1)(-1)a<bd>=<bd>a-a<bd>,$
$<<da>b>=<da>b-(-1)(-1)(+1)(-1)b<da>=<da>b+b<da>.$
$0\equiv<<ab>d>(-1)(-1)+<<bd>a>(-1)(-1)+<<da>b>(-1)1=$
$=(ab+ba)d+d(ab+ba)+(bd-db)a-a(bd-db)-(da+ad)b-b(da+ad)=0.$
2. Класс элементов без единицы подчинен тождеству Якоби:

$[[bc]d]+[[cd]b]+[[db]c]=0.$

3. Единичные элементы удовлетворяют соотношению

$[\{aa\}a]+[\{aa\}a]+[\{aa\}a]=0.$

4. СУПЕРАЛГЕБРЫ ДЛЯ МОНОМИАЛЬНОЙ ГРУППЫ

Рассмотрим все варианты различных расположений единиц. Получим матрицы

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Они образуют группу. В ней есть подгруппа P:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Введем числа $a+ib+jc$. Найдем таблицу их умножения, используя P. Получим соответствие

$$\uparrow\left(a_1+ib_1+jc_1\right)\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}a+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}b+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}c.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\c_1&a_1&b_1\\b_1&c_1&a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2&b_2&c_2\\c_2&a_2&b_2\\b_2&c_2&a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2+c_1b_2 & a_1b_2+b_1a_2+c_1c_2 & a_1c_2+b_1b_2+c_1a_2\\ a_1a_2+a_1c_2+b_1b_2 & c_1b_2+a_1a_2+b_1c_2 & c_1c_2+a_1b_2+b_1a_2\\ c_1a_2+c_1a_2+a_1b_2 & b_1b_2+c_1a_2+a_1c_2 & b_1c_2+c_1b_2+a_1a_2\end{pmatrix}.$$

Отсюда, выполнив обратное проектирование, получим

$$\left(a_1+ib_1+jc_1\right)\left(a_2+ib_2+jc_2\right)=a_1a_2+b_1c_2+c_1b_2+i\left(a_1b_2+b_1a_2+c_1c_2\right)+j\left(a_1c_2+b_1b_2+c_1a_2\right).$$

Примем законы:

$1\cdot 1=1$, $\quad i\cdot j=j\cdot i=1$,

$i\cdot 1=1\cdot i=i$, $\quad i\cdot i=j$,

$j\cdot 1=1\cdot j=j$, $\quad j\cdot j=i$.

Получим числа с единицами, которые подчинены условиям

$1\cdot 1\cdot 1=1$, $\quad i\cdot i\cdot i=1$, $\quad j\cdot j\cdot j=1$.

Понятно, что они дублируют свойства матриц подгруппы P.
Остальные матрицы таковы:

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$
.

Ими учтены все возможные варианты. Мы получили мономиальную группу $MN(3)$ над группой $Z_2 = [-1,1]$. В силу ассоциативности матриц они задают алгебру с отношениями, формируя их набор, согласованный с распределением отношений $w_M = [-1,1]$ по группе $MN(3)$. Сопоставим матрицам трехуровневую систему отношений. Пусть, во-первых, задано соответствие,

$$a \to \sigma(a),\ \ b \to \sigma(b),\ \ c \to \sigma(b),$$

где $\sigma(\xi)=1$ или -1. *Их распределение может быть произвольным, подчиняясь некоторому дополнительному правилу*. Пусть, во-вторых, произведению элементов сопоставлены отношения:

$$ab \to \sigma(ab),\ \ ba \to \sigma(ba),\ \ ac \to \sigma(ac),$$

$$ca \to \sigma(ca),\ \ bc \to \sigma(bc),\ \ cb \to \sigma(bc)\dots$$

Примем, в-третьих, условие, что

$$\sigma(\xi\eta) = \sigma(\eta\xi),$$

где ξ, η - любые элементы мономиальной группы.

Найдем алгебры с отношениями. Используем выражения, полученные ранее. Так,

$$\langle ab\rangle = ab - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)ba\,,$$

$$\langle bc\rangle = bc - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)cb\,,$$

$$\langle ca\rangle = ca - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)ac\,,$$

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle = \langle ab\rangle c - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc)c\langle ab\rangle\,,$$

$$\langle\langle bc\rangle a\rangle=\langle bc\rangle a-\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ba)\sigma(ca)a\langle bc\rangle,$$

$$\langle\langle ca\rangle b\rangle=\langle ca\rangle b-\sigma(c)\sigma(a)\sigma(cb)\sigma(ab)b\langle ca\rangle.$$

Общее циклическое условие

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle\sigma(b)\sigma(ac)+\langle\langle bc\rangle a\rangle\sigma(c)\sigma(ba)+\langle\langle ca\rangle b\rangle\sigma(a)\sigma(cb)=0$$

задает взаимосвязи элементов с отношениями. Их легко получить. Если, например,

$\sigma(a)=\sigma(b)=\sigma(c)=\sigma(ab)=\sigma(ac)=\sigma(bc)=1$, то $[[ab]c]+[[bc]a]+[[ca]b]=0$.

Если

$\sigma(a)=\sigma(b)=\sigma(c)=-\sigma(ab)=-\sigma(ac)=-\sigma(bc)=1$, то $[\{ab\}c]+[\{cb\}a]+[\{ca\}b]=0$.

Аналогично выводятся все варианты взаимосвязей для элементов. Некоторые их них отличаются только порядком следования элементов a, b, c. Укажем несколько возможностей:

$$\{[ab]c\}-\{[bc]a\}-\{[ca]b\}=0,$$

$$[\{ab\}c]-[\{bc\}a]+[\{ca\}b]=0,$$

$$[\{ab\}c]-[\{bc\}a]+[\{ca\}b]=0,$$

$$\{[ab]c\}+\{[bc]a\}-\{[ca]b\}=0,$$

$$[\{ab\}c]-[\{bc\}a]+[\{ca\}b]=0,$$

$$[\{ab\}c]+[\{bc\}a]+[\{ca\}b]=0\ \ldots$$

По-видимому, ими можно пользоваться как средством, позволяющим расширить картину взаимосвязей объектов, реализующуюся через алгебру с отношениями.

Покажем, что данные взаимосвязи находят аналогию в произведениях векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, заданных в трехмерном пространстве. Пусть

$$[\vec{a}\vec{b}]=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}=\vec{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\vec{j}(b_xa_z-a_xb_z)+\vec{k}(a_xb_y-a_yb_x),\ \text{где}\ [\vec{a}\,\vec{b}]=-[\vec{b}\,\vec{a}],$$

$$\{\vec{a}\vec{b}\}=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}=\vec{i}(a_yb_z+a_zb_y)+\vec{j}(b_xa_z+a_xb_z)+\vec{k}(a_xb_y+a_yb_x),\ \text{где}\ \{\vec{a}\vec{b}\}=\{\vec{b}\,\vec{a}\}.$$

Рассмотрим выражения:

$$[\{\vec{a}\,\vec{b}\}\vec{c}]=\vec{i}\left((a_xb_z+a_zb_x)c_z-c_y(a_xb_y+a_yb_x)\right)+\vec{j}(-1)\left((a_yb_z+a_zb_y)c_z-c_x(a_xb_y+a_yb_x)\right)+$$

$$+\vec{k}\left((a_yb_z+a_zb_y)c_y-c_x(a_xb_z+a_zb_x)\right),$$

а также

$[\{\vec{b}\,\vec{c}\}\vec{a}] = \cdots, \quad [\{\vec{c}\,\vec{a}\}\vec{b}] = \cdots.$

Получим тождество

$[\{\vec{a}\,\vec{b}\}\vec{c}] - [\{\vec{b}\,\vec{c}\}\vec{a}] - \{[\vec{c}\,\vec{a}]\vec{b}\} = 0.$

Аналогично выводятся равенства

$$[[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}] + [[\vec{b}\,\vec{c}]\vec{c}] + [[\vec{c}\,\vec{a}]\vec{b} = 0,$$

$$\{[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}\} + \{[\vec{b}\,\vec{c}]\vec{a}\} + \{[\vec{c}\,\vec{a}]\vec{b}\} = 0 \ldots$$

Заметим, что введенная операция и коммутативна и некоммутативна, что управляется распределением факторов симметричности на числовом множестве. Легко обнаружить, что новая операция ассоциативна и неассоциативна. Действительно, получим

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle - \langle a\langle bc\rangle\rangle = \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)(ac)b - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)b(ac) +$$

$$+\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)b(ca) - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc)(ca)b.$$

Эта разность зависит от распределения факторов симметричности или от отношений и может быть равной или не равной нулю. Следовательно, *концепция отношений способна качественно изменить сущность числового множества*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдена новая супералгебра. Она проиллюстрирована на нескольких примерах. Сделан вывод, что числовое множество способно существенно измениться, если к нему присоединить концепцию отношения между числами. Фактически речь идет об изменении числового множества при введении в него дополнительной структуры.